負の数の歴史
中学校の教材に潜む大学数学

中根美知代[1]

I. はじめに：数学・数学教育と数学史

2007年度，立教大学理学部数学科で，数学史の卒業研究を担当する機会を得た．今回は，学生たちの研究の中身の紹介とともに，卒業研究に数学史を選択することの意義を，数学史教育の立場から考えていきたい．

数学史に惹かれる層は広い．しかし，それを専門的に学び，研究している者との関係は，うまくいっているとは言いがたい．数学史での一定の約束ごとを認識した上で，この分野にかかわることが必ずしもなされていないからである．

数学の中身が理解できなくても，数学史のような「お話」ならばなんとかなるから，学生にやらせてみようと考えている数学関係者は，どの程度の割合かはわからないが確かに存在する．数学者は数学史を一段低く見ているわけだから，数学史家とうまくコミュニケーションがとれるわけはない．数学教育への関心から，数学史に興味を持つ小・中・高校の教員は多い．しかし，生徒に興味を持たせるような「こぼれ話」をたくさん知っていることが有用という以上に数学史を学ぶ意味を見い出せないという人を多数見かける．数学史の数学教育への適用を意識した著作を読むと，歴史的な状況をどの程度意識しているのか不安に感じることがままある．たとえば，ニュートンは，微積分学を駆使して近代力学を展開し,『プリンキピア』を書いたなどいう記述である．微積分学と力学とのかかわりを生徒に教えるという点では有用であるが，史実としては誤りだから，歴史の専門家からすれば否定的にならざるを得ない．

このような現状を見ると，数学者にこれは一つの学問である納得させるような数学史や，数学教育にも役立つ形で，かつ数学史研究者を満足させるような数学史の研究は，不可能なように思える．しかし，幻想・妄想とはいえ，数学史は重要という認識が数学者・数学教育者の間にあるのだから，まじめに取り組めば，そのような研究を可能にするための糸口が見つからないでもないだろう．

そこで，卒業研究を担当するにあたって次のような目標を立てた．まず，数学科の４年生が行うものだから，大学で学んだ数学の理解を深めることができるような機会となることである．数学史の卒業研究だから，３年生の専門科目より高いレベルの数学的知識は要求しないが，そこまでのことを復習する程度のことはやりたかった．

次に，数学史（あるいは科学史）の専門の立場から見て納得のいくような卒業研究であることを心がけた．原典を読んで思いついたことを言うのが歴史研究ではない．先行研究を押さえ内容を自分なりに把握する，原典を読んで先行研究と付き合わせ，自分なりの見解をまとめ，とにかく論文の形にする．もちろん学部生のことだから，扱える文献には限りがあるし，その知見は幼稚なものであろう．しかし，この過程を踏んで，数学史の「研究」は何なのかを知ってもらいたかった．数学史の研究の手続きが数学者の間で共通の理解になれば，数学史はきちんとした学問であり，数学と異なるとはいえ，数学より簡単だとはいえなくなるだろう．しかもそのような手続きは，今後社会にでてからさまざまな場で必要となるのだから，卒業研究の段階で経験しておくのも悪くはないだろう．

さらに，教員志望の学生が実際に教壇に上がったとき，何か役に立つ知識が得られることが望ましかった．数学者のこぼれ話は，数学史関係の本を読み進めるうちに必ず出会うだろうが，そうしたものを超えて，生徒たちの数学の理解を助けることが得られないだろうか．そういったものが見つかれば，数学史の研究者が納得するような形で数学史を数学教育に生かすことができよう．

数学史や科学史の研究は，さまざまな角度からアプローチできる．その分，何をやっていいのか，基本的な素養として何を学生に期待・要求していいのかわからないことが多い．数学科という制約は，むしろ有効に機能する．語学力や歴史的な知識は期待できないが，学部３年生程度の数学の素養は強く要求しても問題がないという方針で，ゼミを展開していけるからである．その

[1] e-mail:michiyo.nakane@nifty.com

上で,「数学と数学史,数学教育と数学史を有機的に結びつけるような卒業研究」という課題を目標を明確にしておいたほうが,かえってやりやすくなるとはいえよう.

II. 卒業研究の成果の紹介:負の数の歴史

0. 課題の設定

取り上げる話題に興味があるから,先生の講義が面白かったから,このゼミを選んだという学生はあまり多くはない.私の場合は,卒研を担当するのが決まったのが,その年の2月中旬で,急遽学生を募集したのだから,余計に望めない.案の定,「数学史に興味がある」こととはほとんど関係のない要因で,何人かが別のゼミから動いてきた.当然,数学史は勉強したことはない.ただ,ゼミ生全員が教育実習に行き,3名が教員志望だったので,「教科書のコラムに書いてある歴史的なお話は,怪しいことが結構ある,それをきちんと勉強して,生徒たちにウソを教えないようにしよう」という方向から問題を提示した.

その上で,彼らが選んだのは,正の数・負の数,文字式,方程式であった.正・負の数や文字式は方程式とかかわる.ちょうどアルベルト・マルティネス著『負の数学』(青土社)の邦訳が 2006 年末に出版されたので,負の数の歴史を課題に選ぶことにした.負の数をめぐる興味深い論争があったのは,18 世紀末から 19 世紀のイングランドであるから,万一,先に進んで勉強したい学生が出てきた場合に重要な原論文が英語で読めることも一つの判断基準である.

いきなり本格的な数学史の本に取り組むのでは大変なので,歴史的な事柄が沢山書いてある数学の解説書を読み,歴史の概略をつかんだ上で,しっかりした数学史のテキストにあたることにした.マルティネスの本は前者なのだが,数学史の概略をある程度知っていないとついていけない記述が多く,初学者向きではない.そこで,最初に読んだのは,木村俊一著『天才数学者はこう解いた,こう生きた:方程式四千年の歴史』(2001 年,講談社選書メチエ)である.歴史を語ることにより方程式論を解説するという性質のものであったが,歴史的にそう大きな誤りはないし,問題となる記述があればこちらが指摘すればよいので,解説書というだけではずしてしまう必要はないと判断した.二冊目として V. カッツ『カッツ:数学の歴史』(2005 年,共立出版)から方程式の歴史を扱ったところを拾い読みした.同じような内容を2回読むことになるのだが,このくらいやらないと学生の頭には残らない.その上で,各自が課題を選び,この時点でマルティネスの本も参照して,本格的な卒業研究を開始した.以下,彼らの研究成果をもとに,負の数の歴史を概観してみよう.

1. 負の数との遭遇

負の数の起源はヨーロッパではなく,中国・インド起源である.文献学的に裏付けられるのは『九章算術』に登場することで,この本は漢の時代には成立していたと考えられている.ただし,日本語で読める先行研究では,『九章算術』第8章で負の数が登場したことは書かれていても,具体的にどのように導入されたかは明らかになっていない.春原和也(現:公立中学校教諭)の卒業論文,『『九章算術』に見る負の数』は,その点を深く掘り下げたものである.

『九章算術』の第8章では,いわゆる連立方程式が扱われている.この書は具体的な問題を与えて,それに対する解法をしめすという構成になっている.第一問は次のようである.

問題1「上禾3束と中禾2束と下禾は1束では,実は 39 斗であり,上禾2束と中禾3束と下禾1束では実は 34 斗であり,上禾1束と中禾2束と下禾3束では,実は 26 斗である.問う,上中下禾の実は1束それぞれいくらか」.

禾とは茎つきの粟のことである.それが上・中・下と3種類あり,それぞれの禾についている粟の実の数を求めるという問題で,今日では方程式

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

を解くことに相当する.『九章算術』では,連立方程式の拡大係数行列に相当する部分を変形することによって,この方程式を解いている.実際には,拡大係数を行列を縦に書き,その縦の並び

を操作して変形がなされているのだが，ここでは，横書きのまま，その変形の仕方を見ていこう．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \text{第 2 行} \times 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 6 & 9 & 3 & 102 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \text{第 2 行-第 1 行} \times 2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \text{第3行} \times 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 3 & 6 & 9 & 78 \end{pmatrix} \quad \text{第1行-第3行} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\text{第 3 行} \times 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 20 & 40 & 195 \end{pmatrix} \quad \text{第 3 行- 第 2 行} \times 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{pmatrix}$$

このようにして，$z = 11/4$ が得られれば，$y = 17/4$，$z = 37/4$ が順次得られる．式変形の途中経過は実際には示されておらず，ある行を何倍かして，別の行に加えたり，引いたりせよといった指示しかない．もちろん，どうしてこのようにすれば問題が解けるのかといった説明もない．しかし，行列の基本変形に相当する操作を行って上半三角行列を作り，連立方程式を解くことがここでなされているのである．

さて，負の数が登場するのは，次の問題である．

問題３「上禾は２束，中禾は３束，下禾は４束あるが，実は１斗にみたない．だが，上禾は中禾を，中禾は下禾を，下禾は上禾をそれぞれ１束ずつとれば，実はいずれも１斗となる．上中下禾の実は一束それぞれいくらか.」

この問題に対して連立方程式を立てると

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ x + 4z = 1 \end{cases}$$

となる．これまでなされてきたように，拡大係数行列の係数部分を上半三角行列になるように変形していこう．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{第 3 行} \times 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{第 3 行-第 1 行} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \text{第3行} \times 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 24 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{第3行+第2行} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & 4 \end{pmatrix}$$

これより $z = 4/25$，$y = 7/25$，$x = 9/25$．よって，上禾１束 9/25 斗，中禾１束 7/25 斗，下禾１束 4/25 斗という結果が得られる．上に示した式変形からわかるように，この過程で，負の数が出てきたのである．もちろん『九章算術』には，操作の方法が書かれているだけだから，(-3) は表立ってでてくるものではない．そして最終的な結果は，現実に即して正の数になる．実は，負の数は，形式的な計算の過程で，密かに導入されていたのである．文献学的な裏づけが取れるものとしては，これが最古の例であろう．

なお，卒論で解読した『九章算術』(『中国天文学・数学集』(科学の名著)，1980 年，朝日出版) は３世紀に活躍した劉徽の編纂したもので，彼による注がつけられている．劉徽は，正の数・負の数の混ざった場合の加法・減法の計算規則を示している．また当時は，正の数は黒，負の数は赤の算木を使っていたことも知られている．

2. ヨーロッパへ渡った負の数

中国・インドで生まれた負の数は，インドでは7世紀に，中国では遅くも11世紀には，加減乗除の計算規則が確立していた.（マイナス）×（マイナス）はプラスになることも含めて，負の数とその計算規則は，15世紀にはヨーロッパに導入された模様である．16世紀半ばになると，3次方程式の解の公式で有名な Girolamo Cardano (1501 - 1576)，古代ギリシア数学の研究者 Frederico Commandino (1506-1575) といった，有力な数学者たちが負の数に対して言及しているので，この頃には，ヨーロッパの数学関係者の間で広がっていたことは間違いない．そして，その実体をめぐって大きな論争が起こった．

負の数は，現実に存在する対象と直接対応させられない．特に，負の数と負の数をかけると正の数となり，正の数のほうは現実と結びつくから，余計に混乱する．François Viète (1540-1603) や Blaise Pascal(1623-1662) のように負の数をまったく認めないという数学者もいた．一方では，たとえば商取引にあたって負の数が有効に働くことは認められたから，人物名は特定できなくても，とにかく負の数を導入して，（マイナス）×（マイナス）をプラスと認めてしまえば話はまとまるとして，負の数を採用していた数学者も必ずやいたであろう．負の数とはそもそも何なのか，それは実体があるのか，負の数かける負の数が正の数になるというのは，どういう意味かといった問題は，実は19世紀半ばまで論じられたのである．マルティネスの記述をもとにして，卒業研究では，そのいくつかのポイントを扱った．

2-1. n 次方程式の負の根は認められるか

方程式の理論は，中世アラビア世界で発達していたが，そこでは負の根は受け入れていなかった．ヨーロッパでは，その考え方は引き継がれていく．

16世紀になると，ヨーロッパ独自の方程式論の成果が生み出されていく．この発展は，記号代数学の進歩によるところが大きく，特に既知数を文字化した Viète の功績が注目に値する．三浦祐司（現：公立中学校教諭）の卒業論文『記号法の歴史の転換点：既知数の記号化をめぐって』では，これに比べれば，René Descartes (1596-1650) が同次の法則をはずしたことは，そう重大ではなく，文字式の歴史における Viète の位置づけの見直しを求めている．

さて，カッツによれば，Viète は方程式論でもいくつかの成果を挙げ，根と係数の関係についても言及している．また n 次方程式に対して n 個の根を考えるといったことも行っている．しかし彼は，負の根は認めていなかった．

このような状況の中，方程式の負の根を認めたのは，Descartes (1596-1650) であった．1637年の『幾何学』において，彼は「偽根」と称しつつも，負の根を認める立場をとる．藤間亜希子（仮名）（現：公立中学校教諭）の卒業論文『近代ヨーロッパにおける方程式論：負の根は誰によって認められたか』では，この大きな転換の要因を，Descaretes が「代数学の基本定理」を知っていたことであるとする.「代数学の基本定理」とは，Albert Girard (1595-1661) が1629年の『代数学における発見』で述べたもので,「すべての代数方程式は，最高次の項の次数と同じだけの根を持つ」とするものである．証明はついていない．しかし，Descartes は，この結果を受けとめ，方程式の根の個数を合わせるために，負の根を受け入れたのであった．そして，Descartes が方程式の根を作図するという意図を持っていたのだから，当然「偽根」もまた，作図されていた．

Pierre de Fermat (1601-1665) は，Descartes とほぼ同じ時期に，軌跡と不定方程式を対応させるような座標軸の着想を得ていた．彼らはふたりとも，変動する一つの量に対して一つの尺度となる軸を導入したが，それに応じて変動するもう一つの量に対する軸は，最初の軸と直交するものとして与えていない．座標系の導入という観点からすると，このふたりの寄与は明確に識別できないようにも思える．しかし負の数の導入という点では，両者の間には決定的な相違がある．Fermat の場合は，これらの変量が動く範囲は正にとどまっているが，Descaretes の場合,「偽根」が変量を表す一つの軸上に描かれることになる．実際 Descartes は，線分上で（座標軸とはかぎらない），ひとつの基準点 C に対し，別の点 A を定め，方程式の根 $+p$ は，A と同じ方向に，$-p$ は A と反対側にとるということを行っているのである（『幾何学』邦訳，p.68）．Descartes が使った座標平面の中には，負の根の居場所があった．

数直線上で，原点の左側に負の数を記したのは John Wallis (1616-1703) といわれている．しかし，Descartes からの影響を調べた上で，Wallis のなしたことを明確する必要性がでてきたことを

藤間の卒論は示唆している．

2-2. 負の数の大きさと向き付け

Wallis は，数直線上に負の数を記したが，一方で，負の数は「無より小さい大きさ」とし，大きさが無より小さくなるのは不可能であるからとして，負の数には否定的な立場をとっていた．大きさというのは，現実に目に見えるもの，手に触れるものなのだから，無よりも小さい大きさというのは，考えがたかったのであろう．また Wallis は，正の数を正の数で割るとき，分母が小さくなると，割り算の答えが大きくなる，ゼロで割ると無限大になる，そこで，分母が負になると，答えは無限大より大きくなるから，負の数は無限大より大きくなるといった見解もとっている．

負の数が正の数と反対の向き付けを持つものとして数直線上で表されること，その一方で無より小さい大きさであることは，17-18 世紀の数学者の共通認識であった．向き付けという概念を導入すると負債，温度が下がっていく，反対方向に移動するといった状況に負の数が対応することになるから，負の数を現実的なものとして捉えることは可能である．とはいっても，大きさとしてみれば負の数は無より小さい．したがってよくわからない．このような事態に直面して，数学者たちの対応は，いくつかに別れた．Nicholas Saunderson (1682 - 1739) のようにそのような数は認められないとする者，Colin Maclaurin (1698-1746) のように，ある特定の現象を表現するときに限って負の数の使用を認めてもよいとする者，あるいは Leonhard Euler (1707-1783) のように，無より小さいことをそう深刻に受け止めず，採用していくという具合である．

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) はこのような状態を見て，「負の数は平行線公準や無限大の問題と並ぶ，数学の重要な課題」とした．そして，自らの見解を『百科全書』の項目 *Négative* で表明する．湯浅友絵（現：会社勤務）は，卒業論文『負の数への挑戦：ダランベールの『百科全書』を読む』の作成にあたり，この項目をフランス語から邦訳した．その結果以下のようなことが明らかになった．d'Alembert は，負の数は「無より小さいものではない」という，それまでの数学者とは全く違った考え方をしていた．彼は，負の数をその数の絶対値とマイナスの符号の組み合わせと考える．そして，負の数を足すことは，正の数を引くことというように，マイナスは反対の操作を意味すると考えれば，負の数はすべて正で置き換えられるとするのである．「マイナスの大きさ」そのものを考えるのではなく，その大きさが正と反対の操作で捉えられるという姿勢を徹底すれば，「無より小さい」ということはないとするのが，d'Alembert の見解であった．負の数は数直線上の正の数と反対の向きにあると示しつつ，無より小さいと大きさとした Wallis および同時期の数学者に対する d'Alembert の新しさは，「大きさ」という理解を入れることなく，向き付けだけで負の数を捉えようとしたことであった．d'Alembert はまた，虚数と対比した上で，負の数の実在性も強調していた．湯浅の卒論は，これらのことを押さえた上で，「d'Alembert は負の数を不要としていた」とするマルチネスの見解を論破している．

3. 数学の転換と負の数

負の数の計算規則の中で一番問題になったのは，(マイナス) × (マイナス) はどうしてプラスになるのかということである．もちろん，負の数の意味を問題にするのではなく，このように計算していけば，矛盾が出てこないという理由で，徐々にこの計算法則が受け入れられてきてはいた．また，d'Alembert によれば，負の数を引くことは正の数を足すこと，すなわち $+a$ を $+b$ 回足すことだから，$-a$ かける $-b$ は $+ab$ ということで説明がつけられる．しかし，とくにイングランドでは，依然として実体を伴わない負の数を認めないという考え方が強く，18 世紀の終わりになっても，負の数を扱わない代数学の教科書もあった．

この状況が切り崩されたのは，19 世紀に入り，新しい代数学がイングランドで形成されたためであった．George Peacook (1791-1858) は『代数学』(1830 年) で，実体を伴う「算術的代数」と対比させた形で「記号的代数」の考え方を提示した．たとえば，算術的代数においては，$a > b$ が成り立つときのみ $a - b$ が成り立つ．記号的代数学では，記号の操作は算術での操作との類似したものでなければならないが，a と b の大きさの関係にそのような制約をつけなくても，その操作は成り立つとする．記号代数学においては，負の数は，$-a$ という形の記号以上のものではない．

算術的代数学では，$a > b$ かつ $c > d$ のとき，$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$ が成り立つが，記号代数では，そのような制約はない．そこで，$a = 0$，$c = 0$ とおくと，$(-b)(-d) = bd$ となり，(マイナス) × (マイナス) がプラスになることが導かれたのである．記号代数学は，イングランドで Augustus De Morgan (1806-1871) によりさらに発展させられていった．

一方大陸でも，群・環・体といった考え方が出てくるようになる．また，現実とは異なる非ユークリッド幾何学も登場する．数学は現象を表現する手段というよりも，そこで得られた成果をもとに一つのまとまった体系を構成する学問としての色彩が強くなってきた．つまり，負の数が意味する大きさは何かという疑問は棚上げにし，正の数の算術と同じ規則が成り立つという理由で，負の数や虚数およびその計算規則が正当化されるようになったのである．このような考え方が定着したことを証拠づけるのは難しく，マルティネスもその時期を特定してはない．しかし，Richard Dedekind (1831-1916) の『連続性と無理数』(1872 年) には「負数および有理数を扱う計算法則が正の整数を扱う計算法則に引き直されなければならない」との記述があるところから，19 世紀後半には，このような考え方が定着したと考えてもいいだろう．

(マイナス) × (マイナス) がプラスとの合意が得られたのは，負の数の実体に即して説得的な説明が与えられたからではない．数学という学科の性質が変わってきたからである．岩田匡平（現：アパレルメーカー勤務）は，卒業論文『マイナスかけるマイナスは本当にプラスか：そのとき数学が変わった』で，このような歴史的経過を明確に述べ，自分自身が中学生以来持っていた疑問を解決した．

補：負の数の歴史を考察する上での問題点

以上，学生たちの成果も取り込んで負の数の歴史を概観してみた．するとあらためて「負の数が登場した，使われていた」としたときの「負の数」とは何かという問題が浮き上がってくる．17-19 世紀のヨーロッパでは，負の数は「無より小さい大きさ」とも，「正の数と反対の数」とも捉えられていた．前者だとすると理解不能だが，後者であるとして受け入れられてきたことも示されている．このふたつの性質はどのように包括的に理解されたのかが気にかかるが，最終的には抽象代数の立場から負の計算法則の説明がつけられ，負の数をめぐる論争は一応終結してしまったので，この問題に対する解答は得られていないはずである．

今，「ゼロより小さい数」と「反対の数」を区別しよう．『九章算術』で暗黙のうちに使われたのは「ゼロより小さい数」である．しかし，古代中国で赤い算木で表されたのは負債を意味する「反対の数」である．14 世紀頃，ヨーロッパで発明された複式簿記では，貸し借りを左と右で書き分けているが，これは「負の数なしで計算するために発明された」と評価されている．複式簿記で「反対の数」は導入されているが，これは「負の数」とはみなさない．赤い算木で表された数を「負の数」と呼んでいいのかどうかは，もう少し慎重に考えなければならない．さらに，中国・あるいはインドでは，「ゼロより小さい数」と「反対の数」の関係はどのように捉えられていたのかも，振り返る必要があろう．

中学校では，負の数は「ゼロより小さい」と導入しつつ，数直線で正の数の反対側にあるものと教える．そして，計算法則は，「反対の数」に持ち込んで教え，この過程でいつの間にか「ゼロより小さい」ことは「数直線でゼロより左側にあること」になってしまう．たとえば，重さがだんだん軽くなっていき，ゼロより軽くなっていることが，「数直線で左にあること」で把握できるのだろうか．「ゼロより小さい数」と「反対の数」は等価な概念なのだろうか．歴史研究でも，そして教育の場においても，この問いはつねに意識されねばならない．

III. 卒業研究での発見：数学史の数学教育への効用

中学１年生で学ぶ負の数の歴史ならば，数学的にやさしいだろうと想像して卒業研究に数学史を選んだ，大学の数学には太刀打ちできないが，中学校・高校時代は数学が得意だったから中学校・高校教員になろうという学生に対して，この卒業研究は，大変衝撃的な結果を与えた．負の数の歴史を考察するためには，線形代数での行列の基本変形・代数学の基本定理・抽象代数学の考え方といった，大学で学ぶ知識が必要なことがわかったからである．冷静に考えれば，たとえ

中学校で学ぶ概念であっても，その定式化は現代数学の立場からなされているのだから，その概念を理解するために大学程度の数学が要求されても不思議ではない．しかし，このことを改めて認識できたのは，大きな意味があるといえよう．

また，中学校・高校の教員が数学史を学ぶ意義にかんしても，新しい発見があった．生徒たちは，しばしば「なぜそのようになるのですか」という質問を発する．過去の数学者もまた，そのような問いを立て，答えを見出そうとして数学を発展させてきた．その探求の過程をたどれば，生徒たちの「なぜ」に対する答えが得られる場合も多い．このこと自体はいわれるまでもないことだが，卒研によって，具体的なことがわかったのは大きい．この卒研に参加した学生であれば，(マイナス) × (マイナス) はなぜプラスかと尋ねられたとき，計算の整合性を重視して数学を作ろうとしたためであること，負の数がゼロより小さい量であることは無視されているが，数学では，現実から離れたことを問題にする側面もあるからこのような計算規則になっていることを伝えられる材料は持っているだろう．少なくとも頭ごなしに生徒の問いをはねつけることはないと思う．そして，他の話題についても，同じような対処が期待できるであろう．中学生・高校生に数学の歴史を教える機会や必要性はないかもしれない．しかし，子供たちの好奇心に応えるような対応の仕方ができるような先生，その先の数学への興味をそそらせるような先生になる上で，数学史の素養が生かせるのである．

このようなことを教員に期待するのであれば，教育に役立つ数学史とは，こぼれ話の羅列でも，「教育に役立つことを意識して描いた歴史」と称する作り話でもなく，丹念に資料を読んで，物事を実証的に示していくような，本格的な数学史研究のスタイルをとるものだということになろう．

IV. 数学科での数学史の卒業研究のあり方

結論からいえば，当初の目的にかなった卒業研究は可能である．数学科で行うときは，歴史研究で強調される，「歴史の転換点を捉え，その転換の状況を探る」ことを当初は棚上げにし，数学を学んでいたり教えていたりして難しいと感じた概念の形成過程を調べるとして問題を設定するのである．ある話題の歴史的背景を知るための数学的素養は，学校でその題材に出会った時の素養よりも高いものが要求されるままある．これまでの経験からすると，中学生に教えることを意識して問題を設定すると，学部生の数学的な知識で対応できる程度の研究になろう．

このように問題を立てた上で，関係する先行研究を読む，原論文で確認するという手順は通常の歴史研究とまったく同じである．学部生のことであるから，扱える先行研究は日本語で読めるものだけでも十分であるし，原論文も翻訳を使ってよい．科学史の専門家を養成するわけではないのだから，語学ができないといって必要以上に締め上げるのはあまり意味があるとは思えない．そのかわり，課題にかかわる数学的な知識はきちんと扱う．

さて，本の一部，50ページくらいの文章を自分なりにまとめさせたり，ある事柄について何冊かの本の記述を比較して整理させたり，ある本の歴史的な記述を原典に直接あたって検討させたりすると，程度の差はあっても，学生は何らかの発見をしてくる．まだ学部生のことだから，たわいないものもある．しかし，自分で発見したということを持ち上げて，それをより厳密に捉えるように方向付けると，全員ではないが，こちらも感心するようないい知見が出てくる．数学史の本や論文ではあまり見かけないが，数学史上，重要な指摘をしてくることは，本稿第II章でもみたとおりである．この発見を元に，欧文でなされたものまで含めた先行研究をきちんと調べ，それなりの議論を展開すれば，かなり水準の高い学術論文を書けそうな，あるいはそれへの糸口となる程度の発見が複数でてきたのは，少し驚いた．

専門的な研究者たちは，常に先行研究を意識し，その中で自分たちが何をなすべきかを考える．学生たちには，そのような考えはもちろんない．しかし，彼らは，あと数ヶ月に教壇に立ち，正の数・負の数を教えなくてはならないという緊張感を持っている．実際に塾やボランティア活動で，子供たちを教えることに心を砕いている．そのようななかで，卒業研究から役に立つものを引き出そうとという意識が，暗黙のうちに，しかしかなり強力に働いているのが見てとれる．専門の研究者とは違う視点ではあるが，真剣に数学史と向き合っているのは事実である．そのような中から，専門家は持ち得ないが，いわれてみれば重要と判断せざるをえない問題意識がはぐく

まれたのであろう．日本語の先行研究しか読んでいないのだからと見下すのではなく，彼らの発見の重要性を見極めること，その上で卒論としての形を整えることが，指導教員の仕事であろう．

先に歴史の転換点を問題にするのが歴史研究だと述べた．学生が何かを発見したら，その時点で，それが歴史の流れから見て，どのような転換を引き起こしていたかを改めて考えさせればよい．その上で，限られた量ではあるが，自分であたった先行研究の見解と自分の意見との相違点を明確にする形で卒論にまとめさせる．卒研の最終段階に入れば，学生の方もだいぶ数学史に慣れてきているので．歴史の転換点といっても，そう驚くことなく対応出来るようになっている．多少の示唆を与えれば，歴史らしい卒論になってくる．このようにすれば,「数学科のための数学史」としても「歴史研究としての数学史」としても納得のいく卒業研究ができよう．

なお，卒論として文章にまとめる段階で，いかに数学的な事柄を表現するのが難しいのか，それらを正確に表現するためにはどの程度深い理解が必要かを実感したことも,「数学科のための数学史」としては，意義が深かった．

V. おわりに

数学史をやろうとする初学者が面食らってしまうのは，必要とされる素養が膨大であることであろう．数学の知識は広範囲に渡って必要，語学はいくつもできなくてはならない，世界史は知らなくてはならない，哲学の素養は不可欠など，さまざまなことが要求される．自分の記憶をたどっても,「何も知らない，あのことができない」といわれ続けていた気がする．しかし，そのように説教していた先生方ご自身の言動をよく分析していると，ご自身が詳しい話題に対して，こちらが適切に反応できないとき，そのような言葉が発せられたように思う．しばらく時間がたつと，私のほうこそ「あの先生，こんなことも知らないで，よくいうよ」と思うことのほうが多くなった．見方を変えれば，自分の得意なこと，興味があること，打ち込んだことがあれば，そこを生かして勝負できるのが数学史なのである．

第２外国語を頑張って勉強した，数学の公式に対して妙なこだわりがある＝これは，哲学的素養があるとみなすことができる，子供たちを教えるのに一生懸命など，数学史の研究に生かせる要素を多くの学生が持っている．そこを生かせる科目であることを強調した上で，さらにいい研究をすすめるにはこのようなことも勉強しましょうね，として動機付けをするのがいいのではないだろうか．この１年間,「数学史の先生」と呼ばれる立場になって感じたのは，このようなことである．