Éléments de géométrie/1823 の平行線に関する命題 *

堀　井　政　信 † ‡

1　はじめに

昨年のシンポジウム（「*Éléments de géométrie* の平行線に関する命題」）[1] では，Adrien Marie Legendre（1752-1833）の *Éléments de géométrie avec des notes*/1812，蔵書印 École polytechnique(以下，*e.ge.notes*/1812) [2] の公理と平行線に関する命題について述べた．*e.ge.notes*/1812 には公理「1 点を通り与えられた直線に平行な直線は，1 本のみ引かれる」が含まれず，いくつかの命題の証明が正しくないことがわかった．Charles Davies（1798-1876）の *Elements of geometry and trigonometry translated from the french of a.m.legendre*/1834，蔵書印 Harvard University (以下，*e.ge.tr.translated*/1834) [3] と比較対照した．*e.ge.tr.translated*/1834 には公理「1 点を通り与えられた直線に平行な直線は，1 本のみ引かれる」が含まれる．

本報告では，A.M. Legendre の *Éléments de géométrie avec des notes*/1823，蔵書印 東京帝国大学 (以下，*e.ge.notes*/1823) [4] について述べる．まず，*e.ge.notes*/1812 と比較対照する．そして，*e.ge.notes*/1823 の平行線に関する命題について考察する．

---

*津田塾大学 数学・計算機科学研究所 第 19 回数学史シンポジウム，2008.10.12

†e-mail : masa.horii@nifty.com，キーワード：幾何学，平行線公理，A.M. Legendre, École polytechnique

‡メールマガジン 高校教員が始めた数学史 http://www.mag2.com/m/0000125834.htm/（pc），http://m.mag2.jp/M0084409（携帯），ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 http://homepage3.nifty.com/mathhis/

2　*e.ge.notes*/1823と *e.ge.notes*/1812の比較対照

e.ge.notes/1812は第9版，*e.ge.notes*/1823は第12版であり，それらのAXIOMESは一致する．いずれにも公理「1点を通り与えられた直線に平行な直線は，1本のみ引かれる」が含まれない．

e.ge.notes/1823のPROPOSITION XIX,XX，…，XXIVは，いずれも平行線に関する命題である．まず，*e.ge.notes*/1823のPROPOSITION XIXは「三角形の内角の和は2直角」であり，PROPOSITION XXは「多角形の内角の和＝（辺の数－2）×2直角」である．いずれにも対応する命題が *e.ge.notes*/1812にない．

次に，*e.ge.notes*/1823のPROPOSITION XXI，XXII，XXIIIに対応するのは，*e.ge.notes*/1812のPROPOSITION XIX，XXI，XXIIである．しかし，図は異なる．そして，*e.ge.notes*/1823のPROPOSITION XXIVに対応するのは，*e.ge.notes*/1812のPROPOSITION XXIIIである．図も同じである．

3　*e.ge.notes*/1812のPROPOSITION XX

e.ge.notes/1812のPROPOSITION XXは,「BD⊥AB，∠BAEが鋭角→BDとAEは交わる」である．BD⊥AB，∠BAEが鋭角のとき，AE上の点がEの方向に移動すると，その点からAB上に下ろした垂線の足はBに近づくので，直線BDと直線AEは交わるとしている．Semen Emel'yanovič Gur'evがその証明の問題点を明らかにした．彼は,「級数の部分和が単調増加であっても，それが級数の和を超えることを意味しない」と指摘した．この命題はTHÉORÈMEでなくLEMMEであり，対応する命題が *e.ge.notes*/1823にない．

4　*e.ge.notes*/1823の平行線に関する命題

4.1　PROPOSITION XIX

e.ge.notes/1823のPROPOSITION XIXは,「三角形の内角の和は2直角」である．まず，2つの三角形の内角の和が等しいことを示す．次に，∠A，∠A′，∠A″，……が単調減少であることを言う．そして，三角形の内角の和を2直角と2つの内角と1つの外角で表し,「三角形の2つの内角と1つの外角が単調減少でありゼロになるから，三角形の内角の和は2直角になる」としており，証明は正しくない．対応する命題が*e.ge.notes*/1812にない．

4.2　PROPOSITION XX

e.ge.notes/1823のPROPOSITION XXは,「多角形の内角の和＝（辺の数－2）×2直角」である．多角形の1つの頂点と他の頂点を結んでできる三角形の数が（辺の数－2）であり，PROPOSITION XIX「三角形の内角の和は2直角」から証明しており，正しくない．対応する命題が*e.ge.notes*/1812にない．

4.3　PROPOSITION XXI

e.ge.notes/1823のPROPOSITION XXIは,「AB⊥FG，CD⊥FG→AB∥CD」である．PROPOSITION XV「直線DE外の点Aからその直線へはただ1本の垂線しか引けない」により，正しく証明されている．ただ，証明に出てくる点Oが巻末の図にない．

4.4　PROPOSITION XXII

e.ge.notes/1823のPROPOSITION XXIIは,「∠BEF＋∠DFE＝2∠R→AB∥CD」である．点Fから直線ABに垂線FGを下ろし，PROPOSITION XIX Corollaire IV「直角三角形において2つの鋭角の和は直角」から∠DFGが直角になるとしており，正しくない．対応する*e.ge.notes*/1812のPROPOSITION XXIは，PROPOSITION II,VII,XIXにより正しく証明さ

れている.

4.5 PROPOSITION XXIII

e.ge.notes/1823 の PROPOSITION XXIII は,「∠ BEF + ∠ EFD <> 2 ∠ R → AB と CD は交わる」である. Euclid の第 5 公準に相当する. まず, ∠ EFG = ∠ AEF とし, DF が ∠ EFG の中にあることを示す. 次に, MN = FM と仮定し, PROPOSITION XIX Corollaire VI「三角形の外角=隣り合わない内角の和」を用いて, FN が ∠ GFM を 2 等分することをいう. そして, ∠ GFM, ∠ GFN, ∠ GFP, …が単調減少であることより, FD(CD) は AB と交わるとしており, 正しくない.

PROPOSITION XXIII Corollaire は,「1 点 F を通り定直線 AB に平行な直線は 1 本のみ引かれる」であり, 平行線公理に相当する. PROPOSITION XXIII より, ∠ BEF + ∠ EFD が 2 直角より小さいか大きいなら AB と CD は交わるから, ∠ BEF + ∠ EFG が 2 直角となる FG のみが AB と平行であるとしており, 正しくない.

4.6 PROPOSITION XXIV

e.ge.notes/1823 の PROPOSITION XXIV は,「AB ∥ CD → ∠ AGO + ∠ GOC = 2 ∠ R」である. PROPOSITION XXIII より, ∠ AGO + ∠ GOC が 2 直角より小さいか大きいなら AB と CD は交わるとしており, 正しくない.

5 終わりに

e.ge.notes/1823 と *e.ge.notes*/1812 の AXIOMES には, いずれにも公理「1 点を通り与えられた直線に平行な直線は, 1 本のみ引かれる」が含まれない. *e.ge.notes*/1823 の PROPOSITION XIX, XX, および *e.ge.notes*/1812 の PROPOSITION XX には対応する命題がなく, 証明は正しくない.

A.M. Legendre は *e.ge.notes*/1812 の PROPOSITION XX の証明に満足せず [5], *e.ge.notes*/1823 で PROPOSITION XIX, XX に置き換え証明を試みたが, 成功しなかった.

e.ge.tr.translated/1834 に公理「1 点を通り与えられた直線に平行な直線は，1 本のみ引かれる」が含まれるのは，Charles Davies によるのではないかと考える [1] [6]．ただ，まだ確認が必要である．

e.ge.notes の PROPOSITION「BD ⊥ AB，∠ BAE が鋭角→ BD と AE は交わる」について，Semen Emel'yanovič Gur'ev がその証明の問題点を明らかにした．しかし，その指摘は生かされなかった．A.M. Legendre だけでなく，当時の数学者が Gur'ev の指摘をどう評価したかが今後の課題である．

参考文献

[1] 堀井政信「*Éléments de Géométrie* の平行線に関する命題」『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 29 第 18 回数学史シンポジウム (2007)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2008 年，286-291 頁

[2] Adrien Marie Legendre, *Éléments de Géométrie avec des notes*, CHEZ FIRMIN DIDOT, 1812

[3] Charles Davies, *Elements of Geometry and Trigonometry translated from the french of a.m.legendre*, HARPER AND BROTHERS, 1834

[4] Adrien Marie Legendre, *Éléments de Géométrie avec des notes*, CHEZ FIRMIN DIDOT, 1823

[5] 小倉金之助責任編輯，三上義夫校閲，小倉金之助・井出彌門譯註増補，『フロリアン・カジョリ初等数学史』，山海堂出版部，1928 年，436 頁

[6] 堀井政信「*Éléments de Géométrie* の定義・公理・命題」『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 28 第 17 回数学史シンポジウム (2006)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2007 年，374-380 頁