フーリエ解析と表現論

佐野　茂

2008 年 10 月 12 日

1　はじめに

20 世紀の前半に、非可換群の分類が明確になされたことは理論上とても興味深い．このように分類が明確に与えられることはまれなことだが、単純群の分類としてディンキンダイアグラムや佐武ダイアグラムを使って明確に与えられたのである．少し広げた簡約群の研究は 20 世紀に活発になされ，多くの成果が生み出されていった．

解析的構造をもつ簡約リー群上では、フーリエ解析に対応する理論の構築が表現論を用いて試みられた．この歴史的な考察はコンパクト群の場合には杉浦光夫先生により深くなされてきたが、非コンパクト群の場合の研究についてはまだ未整理のままである．

非コンパクト半単純リー群では無限次元表現論がヒルベルト空間論やバナッハ空間論を用いられて展開された．無限次元表現に対する指標や不変固有超関数の理論にはシュワルツの超関数論が用いられた．さらに非コンパクト簡約リー群から特徴づけられるリーマン対称空間上でのヘルガソン予想には佐藤の超関数論が用いられた．このように新しい解析学での成果を取り込みながら理論が雄大に構築されていった．この分野では日本人の貢献も大きい，こうした興味深い歴史を追ってみたい．

20 世紀後半から現代にいたるまでの理論を適切に含むように理論構成を試みながら、全体像が分かるようにまとめてみたい．私自身が理論構築に身を投じることにより、踏み込んだ形でその魅力を伝えたい．以前、現在までの理論における不十分なところを指摘しておいた．そこを復習しながら，改善した新たな構想を示す．

G/H を H-C クラスの簡約対称空間とする．簡約群 G の対称空間 G/H への作用を考えると表現論の立場から調和解析の基本的な問題は次のようにまとめられる．

（１）G/H 上の左不変微分作用素環 $\mathbf{D}(G/H)$ によるスペクトル分解を与える．すなわち $L^2(G/H)$ の関数を $\mathbf{D}(G/H)$ の固有関数で分解する．

（２）G の $L^2(G/H)$ における正則表現

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x)\ (x \in G/H, g \in G)$$

を G の既約ユニタリ表現により分解する．これは Plancherel 公式である．

（３）eH (e は G の単位元) 上のディラク測度を H-不変固有超関数で展開する．これは逆 Fourier 変換である．

従来の理論では、それぞれの対称空間を独立の空間として考えている．たとえば次の対称空間

$$Sp(2n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{C}),\ Sp(2n,\mathbb{R})/S(GL(2n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}),$$
$$Sp(2n,\mathbb{R})/S(U(2n-j,j)\times\mathbb{R}),\ Sp(2n,\mathbb{R})/Sp(2n-j,\mathbb{R})\times Sp(j,\mathbb{R})$$

は $G=Sp(2n,\mathbb{R})$ の対称空間である．G のどの表現が正則表現 $L^2(G/H)$ の分解に寄与しているかどうかは他の正則表現 $L^2(G)$ や $L^2(G/H')$ の分解と比較できるように統一的に理論構成するのが望ましい．ところが従来の理論では、それぞれ対称空間ごとに主系列表現を決める G の放物部分群 P を軌道 PH が開軌道となるようにとるために，主系列表現が対称空間ごとに異なり不統一であった．

また対称空間 G/H の離散系列表現は G の離散系列表現がそのまま現れる場合と G の主系列表現の連続パラメターが退化した場合とがあるがその部分も不明確になっている．さらに表現の重複度についても，元になる放物部分群を色々と変えてしまうので不鮮明である．

群多様体 G は対称空間 $G\times G/\Delta$ と同一視できるが，この場合には表現の指標により展開されるのが自然な理論と言える．ところが既存の理論では指標とは関係付けられない Eisenstein 積分を用いている．そのため不変固有超関数など，群多様体における魅力ある理論が消されている．またその c-双対である G_c/G についても不変帯球超関数の理論が使えたが，この理論も消されている．やはり対称空間に概念を広げたからには既存の理論を自然に含み，統一的に理解できるのが望ましい．

こうした問題点を解決するには，どの対称空間 G/H に対しても、G の尖点的放物部分群 $P=M_PA_PN_P$ を用いて主系列表現を構成するのがよい．ところが軌道 PH が G の開軌道には一般的にならないので、新たに尖点的放物部分群 P に従う軌道分解を与えることにする（文献 [S4]）．

そしてこの新しい軌道分解に従って，Eisenstein 積分を定義して理論構成をしていくこととする．こうすることにより，先に述べた理論上の問題点を解消することができるのである．

2 簡約対称空間

G を H-C クラスの簡約対称空間とする．σ を G の対合的自己同形とし，G^σ を G の σ-不変元全体の部分群とする．G^σ の開部分群 H をとり、簡約対称空間 G/H を扱っていく．θ を σ と可換な Cartan 対合とする．$K=G^\theta$ とする．$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし，σ による固有空間分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}$ とする．また θ による固有空間分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ とする．

$\mathfrak{q}$ の θ-不変 Cartan 部分空間 $\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ をとる．この $\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ を含む，$\mathfrak{g}$ の θ,σ-不変 Cartan 部分環 $\mathfrak{j}$ をとる．

$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{j}\cap\mathfrak{p}$, に対して $L=Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ そして $X(L)=\mathrm{Hom}(L,\mathbb{R}^\times)$ とおく．L の部分群を

$$M=\bigcap_{\chi\in X(L)} Ker\mid\chi\mid,\quad A_\mathfrak{p}=\exp\mathfrak{a}_\mathfrak{p}.$$

と定義すると，分解 $L=MA_\mathfrak{p}$, $M\cap A_\mathfrak{p}=\{e\}$ を得る．ルート系 $\Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\mathfrak{g})$ の順序を $\mathfrak{h}$-compatible となるようにとり，$\mathfrak{n}=\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}^\alpha, N=\exp\mathfrak{n}$, とおくと尖点的放物部分

群 $P = MA_{\mathfrak{p}}N$ of G が決まる．これは尖点的放物部分群 P のラグランジュ分解 $P = M_PA_PN_P$ $(M_P = M, A_P = A_{\mathfrak{p}}, N_P = N)$ とも表わせる．$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}$ に対応した Weyl 群 W とその部分群 W_H を

$$W = N_K(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})/Z_K(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}), \quad W_H = N_{K\cap H}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})/Z_{K\cap H}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}).$$

と定義し，その商空間を $W^* = W/W_H$ とおく．$w \in W$ に対し $N^w = w^{-1}Nw$ ，$P^w = MA_{\mathfrak{p}}N^w$ とする．

命題 1． G/H の各軌道 K_HwP^wH は開軌道である．開軌道

$$\bigcup_{w\in W^*} K_HwP^wH \subset G/H$$

は互いに素で稠密である．

この軌道分解を用いて統一的に調和解析を展開していく．

3　Eisenstein 積分

(τ, V) を K の有限次元表現とする，関数 $f : G/H \to V$ が関係 $f(kx) = \tau(k)f(x)$ $(k \in K, x \in G/H)$ を満足するとき $\tau-$ 球関数という．

尖点的放物部分群 $P = MA_{\mathfrak{p}}N$ に対する先の軌道分解を用いて Eisenstein 積分を定義しよう．$\nu \in \mathfrak{a}_c^*$，$\phi \in C^\infty(M)$ に対して，次のように Φ_ν^w を定義する

$$\Phi_\nu^w(gH) = \begin{cases} \phi(m)\exp(-\nu + \rho_P)(X) & gH = lmanwH \in K_HwP^wH \\ & (a = \exp X \in A = \exp \mathfrak{a}, l \in K_H, man \in P) \\ 0 & gH \notin K_HwP^wH \end{cases}$$

ここで $\rho_P = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ である．Eisenstein 積分を次のように定義する

$$E(P^w, \phi, \nu) = \int_K \tau(k^{-1})\Phi_\nu^w(kx)dk$$

この Eisenstein 積分の意味するところを，いくつかの場合について例で考えてみよう．

1．リーマン対称空間 G/K 場合，$\sigma = \theta$ となり $\Phi_\nu(gH)$ は球関数を表している．球関数による展開はよく知られた理論となる．

2．群多様体 $G \times G/\Delta$ の場合，対合自己同形 $\sigma((x,y)) = (y,x)$ に対し $\Delta = G^\sigma = \{(g,g) : g \in G\}$ となり，対応 $G \ni g \to (g,1) \in G \times G/\Delta$ により，同一視できる．群多様体 G の主系列表現の指標は対称空間 $G \times G/\Delta$ の Φ_ν により表される．群多様体における不変固有超関数の魅力ある理論が，対称空間において明確に位置づけられ統一的に理解できることになる．

3．対称空間 G_c/G の場合，複素簡約リー群 G_c における複素共役をとる対合自己同形 $\sigma(g) = conj(g)$ により $(G_c)^\sigma = G$ とする．この複素簡約リー群 G_c においては Borel 部分群 B により主系列表現が与えられる．対称空間 G_c/G ではこの Borel 部分群 B から決まる主系列表現の退化した系列がランクの数だけ現れる．またこれらの系列は不変帯球超関数により捉えられる．こうした理論も適切に全体の一部として入ってくる．

4 尖点的放物部分群に付随した極限項

ここでは尖点的放物部分群 $P = M_P A_P N_P$ のスプリット部分は $A_P = A_{\mathfrak{p}} = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ における，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{q}$ の $A = \exp \mathfrak{a}$ での N_P に依存した極限を考える．これは $A_{\mathfrak{p}}$ の対称空間 G/H で意味をもつ A の Weyl 領域での極限のことである．P のレビ部分 $L_P = M_P A_P$ は H-C クラスの簡約リー群となる．対称空間上の関数の極限への増大度を明確にするため記号を準備する．

$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ を固定し，$A_0 = \exp \mathfrak{a}_0$ とおく．

$$\gamma(x) = |a| \quad (x = kaH \in G/H, k \in K, a \in A_0)$$

次に群 G 上の Ξ 関数を用いて，G/H 上の増大度を捉えるために

$$\Theta(x) = \sqrt{\Xi(g\sigma(g)^{-1})} \quad (x = gH \in G/H)$$

とおく．

(τ, V) を K の有限次元ユニタリ表現とし，$\tau-$ 球関数 $f : G/H \to V$ が条件，定数 $r \geq 0$ が存在して，すべての $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して

$$\sup_{x \in G/H} |(l(D)f)(x)|(1 + \gamma(x))^{-r}\Theta(x)^{-1} < \infty$$

を満たすとき，弱不等式を満足するという．

関数空間を次のように定義する．

$C^\infty(G/H, \tau)$: G/H 上の C^∞ な $\tau-$ 球関数

$\mathcal{A}(G/H : \tau)$: $C^\infty(G/H, \tau)$ に属する $\mathcal{D}(G/H)-$ 有限な関数

$\mathcal{A}_{temp}(G/H : \tau)$: $\mathcal{A}(G/H : \tau)$ に属する弱不等式を満足する関数

定理 2. $\mathcal{A}_{temp}(G/H : \tau)$ の関数 φ に対して，$\mathcal{A}_{temp}(L/L \cap H : \tau)$ に属する φ_P が存在して

$$\lim_{t \to \infty} \delta_P^{1/2}(m(\exp tX))\varphi(m(\exp tX)) - \varphi_P(m(\exp tX)) = 0 \quad (m \in L, X \in \mathfrak{a}')$$

が成り立つ．ここで，δ_P は P のモジュラー関数である．

もちろん一般の放物部分群でも同じような議論は出来る．

参考文献

[BS] E.van den Ban, H.Schlictkrull, *Harmonic analysis on reductive symmetric spaces*, European Congress of Mathematics, Barcelona 2000, **vol 1**,(2001),pp. 565–582.

[C] E.Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symmetrique clos*, Rend.Circ.Mat.Palermo, **53**,(1929),pp. 217–252.

[D1] P.Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math., **147**,(1998),pp. 417–452.

[H1] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Funct. Anal., **19**,(1975),pp. 104–204.

[H2] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups II*, Invent. Math., **36**,(1976a),pp. 1–55.

[H3] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups III*, Ann. of Math., **104**,(1976),pp. 117–201.

[K-] M.Kashiwara, A.Kowata, K.Minemura, K.Okamoto, T.Oshima and M.Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann, of Math.,**107**,(1977),pp. 145–200.

[O1] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学, (1985),pp. 97–112.

[O2] T.Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces,Non commutative harmonic analysis and Lie groups(Marseille-Luminy,1980)*, Lecture Notes in Math., **880**,Springer,(1981),pp. 357-369.

[O3] T.Oshima, *Asymptotic behaviour of spherical funcions on semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **14**,(1988),pp. 357-369.

[OM] T.Oshima, T.Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 331–390.

[OS1] T.Oshima, J.Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on a semisimple symmetric space*, Inv. Math. **57**,(1980),pp. 1-81.

[OS2] T.Oshima, J.Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 433-497.

[S1] 佐野　茂, 保型形式の哲学と群上の調和解析 (第１２回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **23**,(2002),pp. 100-104.

[S2] S.Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier invertion formula on $GL(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{R})$ J.Math. Soc. Japan, **36**,(1984),pp. 191-219.

[S3] S.Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G J.Math. of Kyoto Univ., **31**,(1991),pp. 377-417.

[S4] 佐野　茂, フーリエ解析の非可換化への最近９５年簡の歩み, Bull.Polytechnic.Univ. **25-A**,(1996),pp. 115-123.

[SI] S.Sano, I.Iida, *Automorphic forms on the space* $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{C})\ /SU(2)$, Bull. Polytechnic University, **31-A**,(2002),pp. 189-194.

[Su] M.Sugiura, *Representaions of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces*, Proc.Japan Acad., **38**,(1962),pp. 111-113.