解析概論の系譜

高瀬正仁
（日本オイラー研究所／九州大学大学院数理学研究院）

はじめに　「解析概論の系譜」を語る三つの契機

数学を学び始めてまもないころ，微積分を勉強するためのテキストに選んだのは，高木貞治の著作『解析概論』（昭和13年=1938年，岩波書店）と『シュヴァルツ解析学』（ロラン・シュヴァルツの著作"Cours d'analyse"，クールダナリーズ，の翻訳書．東京図書）であった．等しく微積分といいながら，理論展開の様相に大きな相違が感じられ，どうしてこのようなことがあるのだろうという素朴な疑問に悩まされた．微積分の姿はひとつではないのである．以来，微積分の成立過程に関心が向かい，解析概論の系譜についてまとまったものを書きたいという願いを抱いたが，さまざまな困難にはばまれてなかなか実行に移す機会が得られなかった．ところが近年になって三つの出来事が相次ぎ，長年懸案の課題の考察に向かうよう，強くうながされることになった．

まずはじめに，西村重人さんが試みている翻訳により，フーリエの著作『熱の解析的理論』（1822年）とコーシーの著作『解析教程』（1821年）の翻訳稿を閲覧することができた．ともに解析学の草創期から今日の微積分へと移り行く転換点に位置する重要な作品だが，これまではこの二冊を読む機会がなかったため，解析概論の系譜をたどろうとすると途中で道が途絶えてしまったのである．

第二の出来事は高木貞治の著作『新式算術講義』を読んだことである．昨年，この作品が筑摩書房の学芸文庫に入ったが，その際，解説を書き，量と数について再考する機会が与えられた．微積分の歴史を振り返ると，微分と積分の対象は当初は「変化量」だったところ，ある時期から「変数の関数」に転換した．このような経緯を理解するうえで，量と数の関係の考察は不可欠なのである．

第三に挙げられるのは，『追想　高木貞治先生』（編集発行は高木貞治先生生誕百年記念会．昭和61年刊行）所収の森繁雄のエッセイ「書物は手許に」を読む機会があったことである．それによると，昭和初期，グルサの『解析教程』を翻訳した人がいて，岩波書店に出版を依頼した．これを受けて，高木貞治は，そろそろわれわれ独自の解析概論をもってもよいころだと応じたというが，高木はみずから岩波講座「数学」に「解析概論」を執筆し，後日，単行本の『解析概論』となって刊行された．『解析概論』の成立事情を物語る興味深いエピソードである．

このエピソードに登場するグルサの『解析教程』の翻訳は藤岡茂によるもので，『解析原論』（全四巻，大阪，文進堂，昭和19年 =1944年 - ）を指している．

ヨーロッパの数学史を回想すると，ライプニッツとニュートンのアイデアにより微積分が創始されて以来，各時代の数学的状況を象徴する解析概論の出版が行われ，一連の系譜を形作っている．すべてを網羅して比較対照し，微積分の姿の変容を追うのが望ましいが，この作業を完全に遂行するのは尚早である．本稿では予備作業として検討課題となる著作の目録を提示し，今後の究明を念頭に置いて研究計画を素描した

いと思う.

ヨーロッパの解析概論の系譜は日本にも及び，高木貞治の『解析概論』が出現した.日本で出版された解析概論のもうひとつの例を挙げると，藤原松三郎の『数学解析第一編　微分積分学』（全二巻．巻1，昭和9年；巻2，昭和14年．内田老鶴圃）も，高木貞治の『解析概論』に似た雰囲気をもっている.

（訳語について）

Cours d'analyse（クールダナリーズ）は「解析教程」と訳出し，"Traité d'analyse"（トレテダナリーズ）は「解析概論」と訳出する.

1「曲線の世界」とロピタルの『曲線の理解のための無限小解析』

微積分を創造したのはライプニッツとニュートンと見てよいが，この二人に先立って，微積分の揺籃期というべき時代があった．デカルト，フェルマ，パスカル，ウォリス，カルカヴィなどの名が次々と念頭に浮かぶ.

微積分の古典はライプニッツの無限解析とニュートンの流率法である．検討するべき基礎文献は多いが，ライプニッツについては次に挙げる二論文が基本である.

「分数量にも無理量にも適用される，極大と極小および接線に対する新しい方法.ならびにそれらのための特殊な計算法」（1684年．微分計算）

「深い場所に秘められた幾何学，および不可分量と無限の解析について」（1686年．積分計算）

ニュートンについては，ホワイトサイドが編纂した『ニュートン数学著作集』（全八巻）があるが，現在，ここからいくつかの草稿を選んで邦訳を作成する作業が進行中である．しばらく状況を見守りたいと思う.

ライプニッツの微積分が成長していく姿を観察するためのもっとも基本的な資料は，ライプニッツとベルヌーイ兄弟（ヤコブとヨハン）の往復書簡である．ゲルハルト版『ライプニッツ数学手稿』から拾うと，1687年に1通（ヤコブ・ベルヌーイからライプニッツへ），1690年に1通（ライプニッツからヤコブ・ベルヌーイへ），1693年にも1通（ヨハン・ベルヌーイからライプニッツへ）というふうに文通が始まり，以後，1694年には5通，1695年には17通というふうににわかにその数を増していき，十八世紀のはじめあたりにかけておよそ200通ほどに達する．これらの書簡群の解読はもっと基礎的な作業になるが，実行はむずかしく，邦訳もまだなされていない.

ヨハン・ベルヌーイは兄のヤコブとの語り合いやライプニッツとの文通を通じて無限解析を理解したようで，二つの講義録

「微分計算」（1691-92年）

「積分計算」（1691-92年）

を遺した．1742年にはヨハン・ベルヌーイの全集（全4巻）が刊行され，積分計算の講義録は巻3に収録された．そこに附されたタイトルは，

「マルキ・ド・ロピタルが使用するために書き留められた積分法その他に関する

ヨハン・ベルヌーイの数学講義」

というのである．原文はラテン語だが，ドイツ語訳もあり，オストヴァルト・クラシカー，no.119（1914年）に収録されている．微分計算の講義録の方はこのときの全集には未収録だったが，ヨハンの甥のニコラウス・ベルヌーイ(I)（1687-1759）が作成した微分計算の講義録の写しが，1922年になってバーゼルで見つかった．

微分計算の講義録が全集に収録されなかった背景にはやや複雑な事情があった．1691年，ヨハンはジュネーブに行き，ジュネーブからパリに向かった．パリでフランスの数学者たちが集るマールブランシュのサロンに顔を出し，微積分を講義した．ロピタルにもここで出会った．ロピタルはライプニッツの無限解析についてベルヌーイと語り合い，特別講義を依頼した．ベルヌーイはこれを受け，1691年の末から翌92年7月にかけて，Oucquesにあったロピタルの別荘で微分計算と積分計算を講義した．パリを離れ，バーゼルにもどった後も文通が続き，1696年，ロピタルはヨハン・ベルヌーイに教えられたことを再現して一冊の著作を刊行した．それは，

『曲線の理解のための無限小の解析学　第一部　微分計算』（1696年）．

という書物である．第一部のテーマは微分計算とされている．1716年，第二版刊行．1768年，第三版刊行．1725年，ヴァリニョンの解説書『無限小解析の解明』が刊行された．このロピタルの作品の内容は，1922年に発見されたヨハン・ベルヌーイの講義録とほぼ完全に同じである．ヨハンは微分計算の講義録を公表しないという契約をロピタルとの間で交わしていたようで，そのために全集に収録しなかったのである．

続いてロピタルは積分計算をテーマにして第二部も企画していたが，これは実現しなかった．

このような経緯はともかくとして，ロピタルの著作は草創期の微積分の姿を今日によく伝えている．次に挙げるのは緒言の抄訳である．

緒言（未完．未定稿）

この著作において解き明かされる解析学は通常の解析学を前提としているが，通常の解析学に比してだいぶ趣を異にしている．普通の解析学が取り扱うのは有限量のみだが，本書の解析学は無限の世界それ自体にまで入り込んでいくのである．その解析学では複数の有限量の無限に小さい差が比較され，それらの差の比がみいだされ，そうしてそのような手順を踏むことにより，有限量の差についての知識が得られるのである．それらの有限量は，無限小と比較すると，さながら無限大の大きさをもつかのようである．こんなふうにも言える．この解析学は無限大を超えた世界にまで広がっている，と．というのは，この解析学の守備範囲は無限小の差に限定されているわけではなく，無限小の差のそのまた差とそれらの比もみいだされるし，さらに進んで第三，第四・・・の差の比というものまでも，途中で阻止されることなく，どこまでも明るみに出されていくことになるからである．それゆえこの解析学には単に無限のみにとどまらず，無限の無限，言い換えると無限に多くの無限が包摂されているのである．

このような性格を備えた解析学，ただそれだけが，曲線というものの真実の根源へとわれわれを導いてくれる力をもっている．なぜなら曲線とは無限に多くの辺をもつ多角形にほかならず，しかも曲線と曲線が相違していると言えるのは，

無限に小さい辺と辺がなす角に相違が見られるときのみに限られるからである．辺々が形成する曲がり具合，すなわち曲線の接線，法線，彎曲点もしくは尖点，反射線，屈折線等々の知見の獲得をめざして辺々の状態を決定する力があるのは，無限小の解析学のみである．

曲線に内接もしくは外接する多角形は，辺々の数を限りなく増やしていくことにより，ついには曲線そのものと区別がつかなくなってしまう．そのような多角形はつねに，曲線それ自体に代わって取り上げられてきた．だが，それよりも先に進んでいくことはなかった．このアイデアの広さと豊饒さがよく感知されるようになったのは，ようやくここで取り上げられている解析学の発見からこのかたのことにすぎないのである．

このテーマをめぐって幾人かの古代の人物，わけてもアルキメデスがわれわれの手にあることは，確かに賞讃に値する．だが，彼らが手がけたのはごくわずかな曲線にすぎないし，しかもあっさりと触れたにすぎない．なされたことはといえば，ほとんどすべての人の場合，個別的で，しかも乱雑ないくつかの命題にすぎず，そこには規則正しく，筋道の通った方法は何も見あたらない．しかしこれは，彼らに対して正当性のある非難を加える余地があるということではない．雲をなす不明瞭な事態を見通して，まったく未知の世界に初めて踏み込んでいくために，彼らは極端なほどの天賦の能力を必要とした．もし彼らが遠い時代の人々ではなかったなら，もし彼らが長い回廊を通って歩みを進めていったなら，少なくとも，ヴィエートが何を言おうとも，彼らは道に迷うことはなかったのである．彼らのたどった道が歩みがたく，しかも茨に満ちていたならばいたほど，それだけにいっそう，彼らが道に迷わなかったことは感嘆に値する．ひとことで言うなら，古代の人々が彼らの時代にいっそう多くの事柄をなしえたとは思えない．彼らはわれわれのエスプリが彼らの位置にあったなら遂行したであろうことを行ったのであり，もし彼らがわれわれの位置にあったなら，われわれと同じ視点を手にしたことであろうと考えるのが至当である．このような事態のすべてはエスプリというものの生来の平等と，さまざまな発見の必然的な継続との帰結なのである．

このような次第であるから，古代の人々がそれほど遠い地点にいたわけではないからといって，驚くにはあたらない．だが，幾多の偉大な人々，しかも疑いもなく古代の人々と同じくらい偉大な人々がかくも長い間，その場にとどまっていたこと，しかも古代の人々の著作に対してほとんど盲目的なほどの讃美を表明し，読んで註釈するだけに甘んじて，古代の人々に追随するために必要とされた事柄以外のことに彼らの学問の力を利用しようとはせず，ときには自分自身で思索したり，古代の人々が見つけた事柄を越えた地点にまで考えを押し進めていくという罪を敢えて犯すことがなかったことについてだけは，まったく驚くほかはない．こんなふうに人々は努力を重ね，書き物をし，書物は山をなしたが，何事も先に進まなかった．何世紀にも及ぶ仕事のすべては，うやうやしい註釈と，しばしばまったく取るに足りないオリジナルの翻訳の世界を一杯に満たしただけのことであった．

デカルトにいたるまでの数学と，わけても哲学の状況はこんなふうであった．この偉大な人物は，天性の資質と，みずから自覚をもっていた優越性の感情の力に背を押されて，古代の人々から離れ，古代の人々が追随したのと同じ議論を追うだけのことから免れた．この幸福な大胆不適さは反抗と見られたのだが，物理学と幾何学の双方にとって有益な新しい知見を，われわれに無数にもたらしてくれた．人々の目はこのとき開かれて，大胆に思索するようになったのである．

この場で問題になっているのは数学だけだが，数学についてのみ語ると，デカルトは古代の人々が歩みを終えた場所から歩み始め，古代の人々がみな立ち止まったとパップスが言うところの一問題の解決から出発した．デカルトが解析学と幾何学をどの地点まで運んでいったのか，彼が解析学と幾何学を素材にして作り出した合成物が，デカルト以前にはとうていうかがい知るのことできそうもないと思われた無数の問題の解決をどれほど容易にしたのか，よく知られている．だが，彼はこれを主に等式の解法に適用したので，曲線に対しては，等式の根を見つけるのに役立ちうる限りにおいてしか注意を払わなかった．そのためには通常の解析学で十分だったので，彼は敢えて他の解析学を探究しようとはしなかったのである．それでもなお，彼は幸いにも接線の探索の場でこれを利用した．そうして彼がそのために発見した『方法』は，彼の目にあまりにもみごとに映じたので，「この問題は，『幾何学』において彼が知っていたばかりではなく，かつて知ることを望んだ最高に有益で，しかも最高に一般的な問題でもあった」と難なく言うことができたのである．

デカルトの『幾何学』は等式の解法を通じて諸問題の作図を大いに流行に応じて遂行し，そのためにいくつもの広大な突破口を開いたから，たいていの幾何学者はそこに専念し，数々の新発見を行った．それらの発見は日ごとに増大し，改良されていった．

パスカルはといえば，彼はまったく別の方面に目を向けた．彼は曲線をそれ自体において，しかも多角形の形状を与えたうえで調べたのである．彼はいくつかの曲線の長さ，曲線が囲む領域，それらの領域が描く立体，それらの立体や他の立体の重心などを究明した．そうしてそれらの図形の構成要素，すなわち無限小の考察のみを通じて，彼は一般的な『方法』を発見したが，解析学なしに思索の力だけでそれに到達したように思われるのであるから，それだけにいっそう驚くべきである．

接線を引くためのデカルトの『方法』の出版の後にまもなく，フェルマもまたひとつの方法を見つけた．デカルトは最後にはフェルマの方法の方が自分の方法よりずっと簡明であることを認めた．

・・・・・・・・・・・

私はこの書物を十個の章に分ける．第一章の内容は微分計算の諸原理である．第二章では，あらゆる種類の曲線の接線をみいだすのに，微分計算をどのようにして使うべきかということが示される．この場合，曲線を表す方程式の中に未知数がいくつ入っていてもかまわない．クレイグ氏は機械的曲線すなわち超越的曲線にまで適用範囲を広げるのが可能とは信じなかったが，それにもかかわらずこれは可能なのである．第三章では，極大と極小に関するあらゆる諸問題を解くのに，微分計算がいかにして用いられるのかということが示される．

（以下，略）

ロピタルの著作は全部で10個の章で構成されている．目次は次の通り．

目次

極大と極小に関する諸問題はそこに帰着されていく．
第IV章 彎曲点と尖点を見つけるために微分計算を利用すること．
第V章 展開をみいだすために微分計算を利用すること．
第VI章 反射により焦線をみいだすために微分計算を利用すること．
第VII章 屈折により焦線をみいだすために微分計算を利用すること．
第VIII章 与えられた無限に多くのちょくせんもしくは曲線に接触する曲線上の点をみいだすために微分計算を利用すること．
第IX章 これまでに挙げたいろいろな方法に基づくいくつかの問題の解決
第X章 幾何学的曲線における微分計算の新しい利用法．デカルトとヒュッデの方法がそこから導かれる．

ロピタルの著作のタイトル」を見ると，無限解析の一語に「曲線を理解するための」という形容句が附されているが，この事実はライプニッツが創始した無限解析の初期の姿をよく象徴していると思う．今日の微積分のように関数の性質を解析する理論ではなく，曲線というものの性質をどこまでも深く認識しようとするところに，無限解析の真意があった．曲線を理解するための理論ということであれば，無限解析の発明以前にもさまざまな試みがなされていたであろうことは想像に難くないし，何よりも先に多種多様な曲線の作る彩りのある世界がすでに開かれていたことであろう．ディオクレスのシソイドやニコメディスのコンコイドのように，遠いギリシアへの回想を誘う曲線もあり，近代になると曲線の種類は格段に増加する．

曲線に接線を引こうとしたり，曲線の長さを算出したり，曲線で囲まれた複雑な形状の領域の面積を求めようとしたり，曲線の縮閉線や伸開線を求めたり，最短降下線を決定しようとすることが，すなわち「曲線の諸性質を知ること」であった．どうしてそのような熱情が人々の心をとらえたのであろうか．今では想像するのはむずかしいが，そんな試みが長い年月をかけて続いた後に究極の手法が出現した．ライプニッツの無限解析はそのような計算法なのであった．

2　オイラーの三部作

オイラーの数学の師匠はヨハン・ベルヌーイであり，この点はロピタルと同じである．だが，オイラーの無限解析はロピタルの無限小解析とは明らかに一線を画している．オイラーには，ロピタルにはないアイデアがあった．それは「関数」の概念である．無限解析を語るオイラーの三部作は次の通り．

『無限解析序説』（全二巻．1748年）
『微分計算教程』（全一巻．1755年）
『積分計算教程』（全三巻．巻1，1768年．巻2，1769年．巻3，1770年）

『無限解析序説』の巻1は関数概念の記述から説き起こされている．それは「解析的表示式」という関数である．関数とは定量と変化量を用いて組み立てられた解析的表示式のことであるという有名な概念規定が見られるが，解析的表示式というものそ

れ自体の定義はない．だが，関数概念の導入を試みたオイラーの目的にとって，解析的表示式の守備範囲を規定することは不要であり，無規定のままにしておく方がかえって好都合だったのではないかと思う．

オイラーのねらいは『無限解析序説』の巻2に移ると明らかになるが，依然として「曲線を理解すること」であり，ロピタルと同じく無限解析の本来の企図が継承されている．ところが，曲線というものの把握の仕方は大きく変遷した．ロピタルのテキストでは，曲線は「無限小の辺をつなげて形成される無限多角形」とされているが，オイラーは関数の描くグラフとして曲線を理解しようという，真に斬新なアイデアを持ち込んだ．『無限解析序説』の巻1で関数の一般理論を展開したのはそのためであり，巻2では関数の諸性質に基づいて曲線の諸性質が組織的に導かれていくのである．

オイラーは解析的表示式のほかになお二種類の関数概念を提案した．ひとつは「複数個の変化量が相互に依存しあいながら変化する状勢」に着目することにより手に入る関数であり，『微分計算教程』に書き留められている．オイラーが挙げてい事例でいえば，火薬を推進力にして大砲から砲弾を打ち出すとき，砲弾が描く軌跡を決定しようとすると，複数の変化量や定量が相互に影響しあいながら混在する状況が現れる．そこで，ある変化量 w が他の変化量 $x, y, z \cdots$ に依存しつつ変化するとき，w を x，y，$z \cdots$ の関数と呼ぶのである．ただし，この段階でも微分と積分の対象は変化量である．

もうひとつの関数概念は，振動する弦の状勢を記述する微分方程式の解とは何かという問いから生れたものであり，抽象的な「一価対応」を関数と見る今日の流儀の淵源である．この第三の関数については関数そのものの微分や積分を考えなければならないが，新たなアイデアが要請される．この課題を推進したのがコーシーである．

第二と第三の関数は「曲線を理解すること」という，当初の無限解析の企図を超越し，数理物理への関心が新たに芽生えている．

3　ラグランジュの著作『解析関数の理論』

ラグランジュの著作『解析関数の理論』（1797年）は，オイラーの三部作に続く微積分のテキストである．フルタイトルは，

『微分計算の諸原理に関する解析関数の理論』．

1813年，第二版刊行され，その際，ラグランジュ自身により大幅な増補改訂が行われた．1847年，第三版刊行．巻末にJ.-A.セレによるノートが附された．セレはラグランジュ全集の編纂者である．第三版は第二版のそのままの復刻である．第二版のミスがひとつ，そのまま再現されているが，そこには脚註が附されている．

第三版の構成は次の通り．

序文
第一部　全16章
第二部　全14章
第三部　全7章
第一部と第二部への補足

J.-A.セレのノート

長い序文が附され，無限解析の形成過程が回想されているが，同時にラグランジュの著作の意図も明確に表明されている．ラグランジュは無限解析の理論構成から無限小の観念を捨象したいと願ったのである．序文は次の通り．

序文　（大意．未定稿）

一個もしくはいくつかの量の関数というのは，それらの量が任意の仕方で入っている計算式（expression de calcul）のことをいう．その式には他の諸量が混じっていてもよい．それらの諸量というのは，関数を構成する諸量が可能な限りあらゆる値を受け入れる際に，与えられた値を保持し続ける量である．したがって，関数の考察にあたり，考察を加えなければならないのは「変化する」と考えられている量のみであり，関数に混じっている定量は考慮する必要はない．

「関数」という言葉は初期の解析学者たちにより，一般にある同じ量の冪を表すために使われていた．その後，この言葉の意味合いは拡大され，ある量が，他の量を用いて任意の仕方で作られているとき，その量もまた関数と呼ばれるようになった．ライプニッツとベルヌーイ家の数学者たちは，この一般的な意味ではじめて関数という言葉を使った．これは今日でも一般的に採用されている．

ある関数の変化量に対し，その変化量にある不定量を加えて何らかの増大を与えるとき，もし関数が代数的であれば，代数学の通常の諸規則により，その不定量の冪に沿って関数を展開することができる．この展開の初項は提示された関数である．提示された関数のことは「原始関数」という名で呼ばれる．以下に続く諸項は同じ変化量のさまざまな関数で作られていて，その関数には不定量の相次ぐ冪が乗じられている．これらの新たな関数は原始関数に一意的に依存していて，原始関数から導かれ，「導関数」と呼ばれる．一般に，原始関数が何であっても，代数的であろうとなかろうと，原始関数は同じように展開可能であるか，もしくは展開可能とみなされて，導関数を生み出すのである．関数というものをこの視点から考察すると，関数は，その一般性と数々の用途により，通常の解析学にある意味で優越する解析学を構成する．俗に「超越的」とか「無限小」などと呼ばれている解析学は，結局のところ，原始関数と導関数の解析学にほかならない．また，微分計算と積分計算は，適切に言うなら，これらの関数を対象とする計算にほかならない．この著作において，その様子を目の当たりにするであろう．

微分計算を用いた初期の幾何学者たち，ライプニッツ，ベルヌーイ家の数学者たち，ロピタルなどは，さまざまな階層の無限小量の考察と，相互に無限小量だけしか食い違わない諸量は等しいと見て取り扱うことができるという仮説の上に，微分計算を基礎づけた．微分計算の手順をたどることにより，迅速でしかも確実な諸結果に到達することに満足して，彼らはこの計算の諸原理を明らかにする仕事には携わらなかった．彼らに続いた人たち，オイラーやダランベールなどは，いくつかの個別の適用を通じて，量と量の間の無限小と見られる差は絶対的に0でなければならないこと，およびそれらの比は，この計算の中に実際に入ってくる量は比だけなのだが，有限差，言い換えると不確定な差の比の極限にほかならないことを示すことにより，この欠陥を補おうした．

だが，このアイデアは，たとえそれ自体としては正しいとしても，確実さが明証さの上に打ち立てられるべき科学の基本原理として使うためには，わけても初学者に提供するためには，十分な程度に明瞭とは言えないことは認めなければな

らない．そのうえ，使用される微分計算では，無限小量もしくは無限小とされる量そのものが考察されたり計算されたりするのであるから，この計算の真実のメタフィジックは，この偽りの仮説から生じる誤りが計算の過程から発生する誤りにより是正され，相殺されてしまうところに認められるのである．この過程に沿って進むとき，微分において保持されるのは同位数の無限小量のみである．たとえば，曲線を，各々が無限小である無限個の辺をもつ多角形と見ることにするなら，各辺を延長してできる線は曲線の接線になるのだが，この場合，誤った仮説を設定しているのは明白である．だが，この誤りは，計算の中で無限小量を削除することにより正されることがわかる．これは，さまざまな例において容易に示すことのできる事柄だが，一般的な証明を与えるのはおそらく困難である．

ニュートンは無限小の仮説を回避するために，数学的諸量は運動により生成されると見て，これらの量の生成を伴う速度，あるいはむしろ可変速度の比を直接決定するための方法を探究した．これが，ニュートンにならって，「流率の方法」もしくは「流率計算」と呼ばれるものである．というのは，ニュートンは速度のことを量の「流率」と名づけたのであるから．この方法は，もしくはこの計算は，根本のところで，また演算に関して言えば，微分計算と一致していて，異なるところといえばメタフィジックのみにすぎないし，そのメタフィジックは，実際のところ，いっそう明晰に見える．というのは，だれもがみな速さの観念をもっているか，あるいはもっていると思っているからである．しかし，一方では，代数的な量だけしか目的としない計算に運動を持ち込むということは，素性の知れない観念を持ち込むということであり，これらの量を「動く物」の動きにより描かれる線とみなすことを強いられてしまう．他方では，速度が変化するとき，ある点の各々の瞬間における速度というものについて，透明な観念を持ち合わせていないことを告白しなければならない．そうしてマクローリンの『流率概論』により，流率の方法を厳密に説明するのはどれほどむずかしいか，また，この方法のさまざまな構成部分を説明するために，どれほど多くの特殊な技巧を使わなければならないのかということが理解されるのであう．

ニュートン自身もまた，その著作『プリンキピア』において，より手短に，消失しつつある量の最後の比の方法を好んだ．近年の解析学において，流率の方法に関する論証が帰着されていく先は，この方法の諸原理なのである．しかしこの方法は，適切に言えば前述した極限の方法の代数的翻案にすぎないのだが，極限の方法と同じく，言わば，量であることをやめている状態において量を考察するという，大きな不都合をもっている．というのは，二つの量の比は，それらの量が有限に留まる限りつねに実際に考えられるとはいうものの，この比を作る二つの項が双方ともに同時に０になるとたちまち，もはや明瞭かつ精密な観念を心に結ばないのである．

ある熟達したイギリスの幾何学者が，この人物は解析学において重要な発見をした人なのだが，近年，それまではイギリスのあらゆる幾何学者は細心の注意を払って流率法に追随していた流率法に代って，ある純粋に解析的な別の方法を使うことを提案したのは，このような困難を予告するためなのである．その方法は微分計算によく似ているが，変化量の無限小の差，言い換えると０だけしか使わないことにするのではなく，まずはじめに変化量のさまざまな値を使い，次にそれらを等値するのだが，それに先立ってこの等式が０になる原因となる因子を割り算を行って消しておくのである．このようにすることにより，無限小や消失する量が実際に回避される．だが，この計算の手順や適用はめんどうだし，それにあまり自然ではない．微分計算を基本原理の場においていっそう厳密なものにし

てくれるこのような手立ては，微分計算の主な利点，方法の簡明さと演算の簡易さを失わせてしまうことを認めないわけにはいかない．（ジョン・ランデンの著作『剰余解析　代数的技法の新しい一分野』，ロンドン，1764年，および，同じテーマについて同じ著者により1758年に公表されたディスクールを参照せよ．）

微分計算の諸原理を確立し，提示しようとする様式と，この計算の呼称にこのようなヴァリエーションが見られるということは，演算のメカニズムの面で一番単純で一番便利な諸規則がまずはじめに見つけられたとはいうものの，真実の理論がまだ把握されていなかったということを示している．そんなふうに私には思われる．

このテーマに関する新しい考察は『関数計算講義』の第一講に出ている．

1772年のベルリンのアカデミーの諸論文に混じって印刷された一論文において，関数の級数展開の理論には，無限小や極限に関するいっさいの考察から解き放たれた微分計算の真の諸原理が内包されていることを，私はあらかじめ提示しておいた．その論文のテーマは，微分と正の冪，および積分と負の冪の間に見られるアナロジーであった．私はこの理論によりテイラーの定理を証明した．この定理は級数の方法の基礎であり，この計算を援用してはじめて，言い換えると無限小差の考察を通じてはじめて証明されたのである．

その後，アルボガスト（Arbogast）が科学アカデミーに一篇の論文を提出したが，そこでは同じアイデアが，彼自身の手になる進展と応用とともに説明されている．だが，この著者はこのテーマに関して何も刊行しなかったし，私はといえば，特殊な諸事情により解析学の一般原理を展開する責務を負うことになったので，微分計算の諸原理に関する昔日のアイデアを回想し，それらの原理を確実なものにして，一般化することをめざして新たな反省を加えた．それがきっかけになって，解析学のこの重要な領域を研究する人々にとって有益でありうることだけを考慮して，この著作を出版することを決意したのである．

これに加えて，微分計算を考察するこのような流儀が，もっと早くから幾何学者たちに提供されていなかったこと，わけても級数の方法と流率法の創始者であるニュートンに抜け落ちていたことは，意外に思われるかもしれない．だが，われわれはこの点に関して，実際のところ，ニュートンは当初は『プリンキピア』の巻2の第三番目の問題を解くため，級数の簡単な考察を利用しただけにすぎないことに注意を喚起しておきたいと思う．その問題では，ニュートンは，重さのある物体がある与えられた曲線を自由に描くために必要な抵抗に関する法則を追究している．これはもとより微分計算もしくは流率計算に依存する問題である．ヨハン・ベルヌーイが，この解を微分計算から帰結する解と比較することにより，誤っていることを発見したことはよく知られている．ヨハン・ベルヌーイの甥のニコラウスは，この間違いは，ニュートンが，与えられた曲線の経線を変形してできる収束級数の第三項をこの経線の二階微分として取り上げ，第四項を三階微分として取り上げたことに起因すると主張した．微分計算の諸規則に沿うなら，これらの項は，一方は対応する微分の二分の一であり，もう一方は六分の一にすぎないのである．（科学アカデミーの1711年の「メモワール」およびヨハン・ベルヌーイの全集の巻1を参照せよ．）ニュートンは，弁明することなく，自分の当初の方法をすっかり放棄して，『プリンキピア』の第二版では，同じ問題の，まさしく微分計算に基づく異なる解を与えた．それ以来，ニュートンが陥った侮蔑を話題にしたり，ニコラウス・ベルヌーイの注意事項を考慮する必要性を強調したりするほかには，この種の問題に対して級数の方法を適用することについて語られることはなくなった．（百科全書の記事「微分」「力」を参照せよ．）だが，

この侮蔑は級数の方法の根柢から発生するのではなく，単にニュートンが，考慮しなければならないすべての項を考えなかったことに由来するにすぎないことを，われわれは示すであろう．そうしてこんなふうにして，『プリンキピア』の註釈者たちがだれも語らなかったニュートンの一番はじめの解を修正したいと思う．

この著作のねらいは，関数を原始関数と見たり導出される関数と見たりする視点に立って関数の理論を与え，この理論により解析学，幾何学，それに力学の主だった諸問題を微分計算に従属させて解き，そうすることにより，これらの問題の解に対し古代の人々の証明に見られる完全な厳密さを付与することである．

ラグランジュは原始関数という言葉を「導関数がそこから導かれる元の関数」という意味で使っているが，これによると導関数があるから原始関数もあることになる．今日の用法では，原始関数と不定積分は意味合いが同じであり，ラグランジュの用法とはちょうど逆になっている．不定積分は，オイラーの時代に単に「積分」と呼ばれていたものの変容である．コーシーはその不定積分の存在を証明しようとして，まずはじめに「定積分」の概念を規定した．定積分が存在すれば，不定積分も存在しそうな感じがするが，それは，積分して微分すると元にもどるからである．不定積分の存在証明を指して，今日では「微積分の基本定理」と呼んでいるのであろうと思う．諸概念が混在して識別がむずかしくなっているが，その原因は，「変化量のその微分」から「関数とその微分積分」へと，無限解析の姿形が大きく変容したからである．オイラーが提示した三種類の関数概念のうち，「一価対応としての関数」の概念が，この大掛かりな変容に契機を与えたのである．

不定積分の意味は定積分の数値を算出するところにをみいだされるのではない．オイラーの用語法によれば，無限小変化量Xdxの積分とは，$dy = X\,dx$ となる変化量yのことをいい，y を $y = \int X\,dx$ と表記するのであるから，オイラーの積分にはむしろ今日の不定積分が相当する．オイラーの積分の実体は変化量なのであり，「定積分」というのは，「積分」という名の変化量の取る個々の特定値を指す言葉である．コーシーはこの流れの筋道を逆転させて，まず関数 $f(x)$ の定積分を定義し，次に $f(x)$ の不定積分の概念を導入した．関数概念に主役の座を譲る方針を打ち出した以上，どうしてもそのようにしなければならなくなったのである．

マクローリンの著作『流率概論（Treatise of fluxions）』（全2巻，1742年）は，バークレーの批判に答えて組織的弁明を試みた作品である．ジョン・ランデン（John Landen, 1719-1790）はイギリスのアマチュアの数学者で，楕円関数論の「ランデン変換」に名をとどめている．アルボガスト（Louis François Antoine Arbogast, 1759-1803）はフランスの数学者である．

ラグランジュには『関数計算講義（Leçon sur le calcul des fonctions）』（1800年）という著作もある．『解析関数の理論』の第一部への註記と補記を企図して執筆された作品である．1806年，新版（増補改訂版）が刊行され，大幅に増補された．

4　コーシーの『解析教程』

コーシーに移ると，微積分の対象は完全に関数になり，関数の微分，関数の積分の概念規定がなされている．1821年の著作『解析教程』では極限の概念が主役に据えられて，数列や無限級数などの収束と発散が論じられている．エコール・ポリテクニク

における講義の記録であり，フルタイトルは，

『王立諸工芸学校（エコール・ポリテクニク）の解析教程　第一部　代数解析』

というのである．これに続いて，コーシーは『無限小計算講義要論』（1823年）という著作を刊行した．これもエコール・ポリテクニクの講義録で，タイトルをそのまま訳出すると，

『王立諸工芸学校（エコール・ポリテクニク）で行われた無限小計算についての講義の要論　第一巻』

というふうになる．緒言は下記の通りである．

緒言（未定稿）

エコール・ポリテクニクの教育評議会の要請を受けて，2年間にわたって行った無限小解析の講義の要約（レジュメ）を提示する．2年間の講義に対応して，二巻の本を作る．まず巻1を刊行する．巻1は40個の講義に分けられて，はじめの10講は微分計算，後の10講は積分計算にあてられている．この講義で採用した方法は，同じテーマの他の著作と比べて多くの点で異なっている．主な目的は，『解析教程』で方針を打ち出した厳密さと，無限小量を直接考察することから帰結する簡明さとの折り合いをつけることである．そのためには，関数の無限級数展開が得られたとき，もしそれが収束しないのであれば放棄しなければならないと確信した．テーラーの公式は積分計算のところに回さなければならなかった．なぜならこの公式は，そこに見られる級数が有限個の項に還元され，ある定積分を添えるときに限って，一般的に成立するとして許容されるから．『解析力学』の著者はこの公式を自分の「導関数」の理論の基礎として採用した．だが，大多数の幾何学者は，発散級数を使うことによって導かれていく諸結果は不確実であることに，今では同意している．いく通りかの場合には，テイラーの定理により関数の収束級数への展開が与えられるように見えるが，その級数の和は提示された関数とは根本的に異なっていることがある（第38講の末尾を見よ）．さらに，私の著作の読者は，私は希望しているのだが，微分計算の諸原理とそのもっとも重要な応用の数々は，級数の介入がなくとも容易に説明可能であることを諒解してくれることであろう．

積分計算では，「積分」もしくは「原始関数」の諸性質を伝える前に，その存在を一般的に証明しておく必要があると私には思われた．これを達成するために，まずはじめに「与えられた限界の間で取られる積分」すなわち「定積分」の概念を確立しなければならなかった．定積分はしばしば無限大になったり不確定であったりすることがありうるから，定積分はいかなる場合にただひとつの有限値を保持するのか，という論点の究明が不可欠であった．この問題を解決する一番簡単な方法は「特異定積分」を使うことである．特異定積分は第25講のテーマである．また，不確定積分に与えることのできる無限に多くの値の中に，特別の注意を払う値打ちのあるものがひとつ存在する．それはわれわれが「主値」と名づけた値である．特異定積分と不確定積分の主値の考察は，一群の諸問題の解決にあたって非常に有益である．この考察から，定積分の決定に有効性を発揮するおびただしい数の一般公式が導かれる．それらは，1841年に学士院に提出した一論文において与えた諸公式と似通っている．第34講と第39講において，この種の公式のひとつが，いくつかの定積分の数値決定にあたって適用される様子を目の当たりにするであろう．それらの数値のうちのいくつかはすでに知られているものである．

コーシーが新たに組み立てようとした「関数の微積分」は，今日の微積分の構成様式にそのまま通じている．無限小の観念から離れて，新たに極限の概念を基礎に据えようとしたアイデアはめざましいが，そこにはラグランジュの強い影響が見て取れるように思う．どうしてそうしなければならなかったのかと問うのであれば，ラグランジュのように単に無限小を嫌ったというだけでは足らず，コーシーにはコーシーに独自のわけがあり，「関数の微積分」を組み立てなければならないという決意をうながされたのであろう．この場合，問題になるのは「関数」の一語の指し示すものの実体だが，コーシーの『要論』を見ると，「ある変化量に伴って変化するもうひとつの変化量(一変数関数)」，「いくつかの変化量に伴って変化するもうひとつの変化量(多変数関数)」が考えられている．

次に挙げるのは関数を語るコーシーの言葉である．『解析教程』からの引用である．

第1章　実関数

§1 関数についての一般的考察

いくつかの変化量が互いに関係をもち，これらの変化量のひとつの値が与えられると，他のすべての変化量の値がそこから導かれるという状勢が認められるとき，通常，いろいろな変化量がそれらの一つを用いて表されている情景が心に描かれる．この場合，そのひとつの変化量は独立変化量と呼ばれる．そして，独立変化量によって表される他の諸量は，この変化量の関数と呼ばれるものである．

いくつかの変化量が互いに関係をもち，それらのうちいくつかの変化量の値が与えられると，他のすべての変化量の値がそこから導かれるという状勢が認められるとき，いろいろな変化量がそれらのうちのいくつかを用いて表される情景が心に描かれる．この場合，それらのいくつかの変化量は独立変化量と呼ばれる．そして，独立変化量によって表される残る諸量は，これらの変化量の関数と呼ばれるものである．

だが，コーシーの理論構成は「抽象的な一価対応としての関数」にもそのまま適用可能である．コーシーの微積分の実体はすでに変化量を離れているのである．

オイラーは弦の振動方程式の解法の問題にうながされて「一価対応」としての関数のアイデアに誘われたが，この系譜はさらに伸展してフーリエの『熱の解析的理論』に及んだ．コーシーが創案した「関数の微積分」の理論は，フーリエの理論を深く諒解するために工夫された概念装置だったと見てよいのではないかと思う．

コーシー以降，19世紀と20世紀の解析学はコーシーが提示した理論の不備を補い，精密化する方向に進んだ．これが，今日のいわゆる実解析の流れである．ディリクレとリーマンのフーリエ解析を解明する作業を通じ，この間の消息はより深く諒解されると思う．

コーシーは無限解析の伝統である「曲線の理解」にも関心を払い，
『無限小解析の幾何学への応用に関する講義』（全2巻．巻1，1826年．巻2，1828年）という著作を遺した．微積分は微積分で独自に構成し，それを幾何に応用するというアイデアであり，ここには「関数の理論を基礎にして曲線を理解する」という，オイラーの『無限解析序説』の思想が生きている．

コーシーには『微分計算講義』（1829年）という著作もある．これは『要論』の前半部のを詳説した作品である．『積分計算講義』という続篇も企画されていた模様だが，これは日の目を見なかった．また，『数学演習』（全4巻．巻1，1826年．巻2，

1841年．巻3，1844年．巻4，1847年）という著作もある．

5　実解析と複素解析

コーシーの『要論』には広義積分の「主値」と呼ばれる概念が出ているが，そのようなものを考案したコーシーのねらいは何かといえば，定積分の数値計算のためであった．原始関数が求められない場合にも定積分の値を算出するための工夫だが，ここから複素変数関数の留数計算までの距離はほんの一歩にすぎない．微積分の伸展につれて数値計算のむずかしい複雑な定積分に次々に出会い，新たな手立てが要請されたのであり，実解析からおのずと複素解析への道が開かれたのである．

複素解析にはそれぞれ性格を異にする三つの契機が存在し，オイラーにもすでに萌芽が現れていた．オイラーは，負数と虚数の対数とは何かという論点をめぐってたたかわされたライプニッツとヨハン・ベルヌーイぼ論争を受けて，「対数の無限多価性」を発見し，この論争に決着をつけたのである．

ライプニッツとヨハン・ベルヌーイがこの問題を取り上げたのは有理関数の積分を考えるためだったが，オイラーにはオイラーに独自の契機があった．たとえば，これはオイラー自身が挙げている例だが，

$$y=(-1)^{x}$$

という簡単な形の式を考えると，これもまた「解析的式」のように見える．言い換えると，関数の仲間に入るように見えるが，たとえ変化量xが実数値のみを取りつつ変化するとしても，この「関数」のグラフを描くのは困難である．なぜなら，この式は

$$y=e^{x\log(-1)}$$

と表示され，ここに負数-1の対数が現れて，負数の対数とは何かという問いに答えるまでは関数値が確定しないからである．このような関数をどのように諒解するのかというのがオイラーが直面した問題であった．負数と虚数の対数とは何かという問いは微積分が創案された当初からすでに発生し，実解析の根幹にまといつき，特別の考察を要請して複素解析の端緒を開く役割を果たしたのである．

コーシーには「広義積分の主値」のアイデアがあったが，実解析から複素解析へと向かう道はここにも開かれていた．これが複素解析の第二の契機である．

第三番目の契機は代数関数論である．オイラーにはまた代数関数の積分，いわゆるオイラー積分の数値表を作成するという課題もあった．オイラーが提示したいろいろな形の積分は，ルジャンドルとビネが導入したガンマ関数とベータ関数を基礎にして整理されたが，それとは別に積分される代数関数の形を一般化する方向もある．この路線はガウス，アーベル，ヤコビに継承され，ヴァイエルシュトラス，リーマンによりほぼ完成の域に到達し，代数関数論が形成された．その際，根幹を据える役割を演じたのは，微積分に複素数を導入するというアイデアであり，ヴァイエルシュトラスもリーマンもそのために複素関数論の基礎を構築したのである．以後，複素解析は解析教程に欠かせないテーマになった．

19世紀の後半から20世紀のはじめにかけてフランスで刊行された解析概論には，代数関数論が全面的に展開されている．これは日本の解析概論には見られない現象である．

6　フランスの解析教程と高木貞治の『解析概論』

コーシー以降の解析教程の系譜をたどるとき，わけても際立った印象を受けるのは，フランスで書き継がれた一系のテキストである．思いつくままに書名を挙げると，下記の通り．

〈1〉エルミート『エコール・ポリテクニクの解析教程』（1873年）

〈2〉ピカール『解析概論』

ピカールはガロアの数学著作集（1897年）に序文を寄せた人である．初版（全3巻）の巻1に出ている序文の日付は「1891年5月4日」．初版の巻1は1891年，巻2は1893年，巻3は1896年に刊行された．巻1は積分論から始まっていて意表をつかれるが，いっそう驚くべきことに，その積分論というのは（一変数の）代数関数の理論である．

〈3〉グルサ『数学解析教程』（全3巻）

初版の巻1は1902年，巻2は1905年，巻3は1913年に刊行された．以後，版を重ね，第5版に及んだ．この時期の微積分のテキストの範例となった作品であり，巨視的に見れば，今日のテキストもなおグルサの影響下にあると見られるであろう．この本には「ロピタルの定理」という呼称が出ているが，初登場という．

〈4〉ジョルダン『エコール・ポリテクニクの解析教程』（全3巻，1893-1896年）

高木貞治の『解析概論』の第一版，第1刷の発行日は1938年（昭和13年）7月15日と記録されている．正確な書名は，『解析概論　微分積分法及初等函数論』であった．1943年（昭和18年）に増訂第二版が出て，このとき書名が変って『解析概論』となった．以後，1961年（昭和36年）5月27日，改訂第三版，第1刷が発行され，1983年（昭和58年）9月には改訂第三版の軽装版が出版された．

高木貞治の『解析概論』にはグルサの『数学解析教程』の影響が濃いという印象を受けるが，独自の創意が盛り込まれた作品である．わけても興味が深いのは，随所にちりばめられている歴史を語る言葉である．

シュヴァルツの『解析教程』（全二巻，1967年）はいわば「ブルバキの解析概論」である．エコール・ポリテクニクの講義録であり，時代を代表する数学者がその時代の微積分のテキストを書くという，フランスの伝統が生きているように思う．邦訳書『シュヴァルツ解析学』（全7巻，1970-1971年．東京図書）が出ている．邦訳の巻1は「集合・位相」の第1章「集合論」，第2節「写像あるいは関数」の冒頭に出ている関数の定義は次の通りである．関数と写像は同じものの別名であるという．

《E,Fを集合とする．Eの各元xにFの一つの元を対応する対応（規則）fをEからFへの写像あるいはEで定義されてFに値を取る関数と言う．xに対応するFの元を$f(x)$と書く．記号$f:E\to F$（註．原文では$E\to F$という表記において，矢印$\to$の上にfが添えられています）は，fがEからFへの写像であることを表す．E,Fをそれぞれこの写像の始集合，終集合と言う．》

オイラーの「解析的表示式」からシュヴァルツの「集合間の一価対応」まで，200年余の歳月が流れている．微積分は歴史の要請に応じて大きく変容し，関数の概念も

また変質したのである．個々の変容過程には深い意味合いを帯びていたこともあるし，形式上の理由しか伴わないこともあった．関数はどうして一価対応になったのか，素朴な疑問がわく場面だが，『シュヴァルツ解析学』には定義があるのみで，理由は記されていない．

現在は新しい解析概論が要請されている時代である．ライプニッツとニュートン以前のいわば「神話の時代」を踏まえ，発端から説き起こし，変容の根幹を明らかにし，歴史の流れに沿いつつ今日に及ぶという新たな解析概論の出現を待ちたいと思う．

（平成21年1月31日）