オイラーの変分法

九州大学大学院数理学府　DC 2　尾崎　文秋 (FUMIAKI Ozaki)
Graduate school of Mathematics,
Kyushu University.
日本オイラー研究所

1　はじめに

オイラー全集系列 I の 24 巻である原題

> “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. ”E65
> (極大あるいは極小の性質を備える曲線を発見する方法，あるいは一番広い意味で把握された等周問題の解)

は変分法についての著作であり，これは 1744 年に刊行され，レオンハルト・オイラー (1707–1783) が 37 才のときの作品である．変分法 (Calculus variationum) という言葉が最初に表れたのは 1766 年の論文 “Elementa calculi variationum”E296(変分計算の基礎) であるが，変分法は 1744 年の著作に現れているので，この本を変分法のテキストと呼ばせていただきたい．このテキストが刊行されるまでにオイラーは 4 本の論文 (E9,E27,E42,E56) を刊行している．

＜ 1744 年以前に刊行された変分法についての 4 論文＞

- E9　De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente
  1732 年　ある曲面において任意の 2 点を結ぶ最短線について

- E27　Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis
  1738 年　一番広い意味で理解された等周問題の解

- E42　De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente
  1740 年　任意の抵抗媒体における最速降下線について

- E56　Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis
  1741 年　極大あるいは極小の性質を備える曲線を発見する新しくて簡単な方法

オイラーの変分法は，ヨハン・ベルヌーイの「最速降下線問題」の考察から始まり，そして E42 の論文の題名にも表れているが，物体の運動から表れる微分方程式を題材にしてこれを解くために新たな公式を作りだしている．オイラーはテキストの本文中に

『この方法はすでに前世紀に無限解析が見つかってすぐ後に著名なベルヌーイ兄弟によって創始され，大きく進歩した．一番初めに取り扱われたこの種の問題は力学に関係していて，その上を物体が最も速く降下するところの曲線が探し求められた．この曲線は最速降下線，またはブラキストクローネ曲線と呼ばれた．』

と書いている．ヨハン・ベルヌーイは1697年の論文(ヨハン・ベルヌーイ全集巻I，pp187-193)において「最速降下線問題」の解答がサイクロイドになることを示したときに，これは幾何的に解いたものだったが，その中でサイクロイドを表す微分方程式 $dy = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}dx$ を書いた．これを知ったオイラーは，これを模範例にし，問題を一般化した．そして積分式 $\int Zdx\left(= \int_l Z\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)dx\right)$ の極値問題を解くことで変分法の問題が解決することを発見し，続いて力学の問題にこれを応用し自身の変分法を発展させて行った．このことから1736年に刊行された "Mechanica, volume 1, volume 2" E15,16(力学1,2)で変分法の理論が作り上げられていったのかもしれない．上記の2冊を読んでいない今はただの思いつきでしかないが，いずれ突き詰めてみたいテーマである

2 変分法

オイラー全集はBirkhäuser社から出版されているものを使用した．変分法のテキストが収録されている巻24は，この巻を編纂したドイツ生まれのギリシャ人数学者Constantin Carathéodory(1873-1950)の解説がドイツ語で57ページあり，ラテン語本文は全308ページで構成は6つの章と2つの付録からなる．

＜目次＞

1. De methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere
   一般に適用される曲線を見つけるための極大極小法について

2. De methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta
   曲線を見つけるための極大極小の絶対的方法について

3. De inventione curvarum maximi minimive proprietate praeditarum, si in ipsa maximi minimive formula insunt quantitates indeterminatae
   極大極小式の中に不確定量が存在している場合に，極大あるいは極小の性質を備えている曲線を見つけることについて

4. De usu Methodi hactenus traditae in resolutione varii generis quaestionum
   様々な種類の問題の解決における，これまでに教示された方法の利用について

5. Methodus inter omnes curvas eadem proprietate praeditas inveniendi eam, quae maximi minimive proprietate gaudeat
   ある一つの同じ性質を備える全ての曲線の間で，極大あるいは極小の性質を備えたものを見つける方法

6. Methodus inter omnes curvas pluribus proprietatibus communibus gaudentes eam determinandi, quae maximi minimive proprietate praedita sit
より多くの共通の性質を備えるすべての曲線の間で，極大あるいは極小の性質を持つものを決定する方法

付録 1. De Curvis elasticis
弾性曲線について

付録 2. De Motu Proiectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum detertminando
極大または極小の一般方法によって決定されるべき，抵抗の無い媒体における Proiectus の運動について

各章の内容は 1 章では変分法の基礎理論，2，3 章では絶対的方法，4 章は 2，3 章で作られたオイラー方程式の応用例，5，6 章では相対的方法について書かれている．付録は両方とも力学への応用が書いてあるようである．
オイラーは変分法を絶対的方法と相対的方法の 2 つ分けて考えているのである．

1. 絶対的方法
ヨハン・ベルヌーイの最速降下線問題を手がかりに発展させた問題を取り扱う方法であり，ある 2 点間にあるあらゆる曲線を考えそれらについて極値を持つ曲線を見つける方法．$\int Zdx$ の Z を複雑にさせていき，より高次な微分方程式を作り出している．そしてさらに Z の中に不定積分量 (quantitas integralis indeterminata) が入り込んでいる場合を考え，そこから微分方程式が作り出している．

2. 相対的方法
ヤコブ・ベヌルーイの等周問題を手がかりに発展させた問題を取り扱う方法であり，曲線の長さが一定になる閉じた曲線を考え，それらについて極値を持つ曲線を見つける方法．

現在 4 章までが解読できているので，本稿では変分法の絶対的方法について説明する．

2.1 絶対的方法 (1)Z の中に不定積分が存在しない場合

ここで前章の 1 章では記号の取り扱いが書かれているので補足しておく．例えば高階微分は以下のように定められている．ここで dx は定量としている．

$$\begin{aligned}
dy &= pdx & \\
ddy &= dpdx &= qdx^2 \\
d^3y &= dqdx^2 &= rdx^3 \\
d^4y &= drdx^3 &= sdx^4 \\
d^5y &= dsdx^3 &= tdx^5
\end{aligned}$$

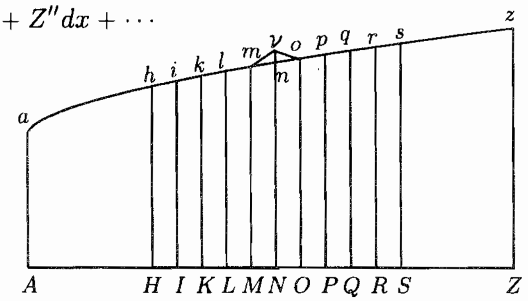
また p,q,r,s,etc. は次のようにも定義されている．このとき y' は切除線 (x 軸) を dx 等分したときの向軸線 (y 軸)y のすぐ後ろの軸である．以下 y'',y''',y^{IV},etc. と続く．

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
p &=& \dfrac{y'-y}{dx} & p &=& \dfrac{y'-y}{dx} \\
p' &=& \dfrac{y''-y'}{dx} & p_{\prime} &=& \dfrac{y-y_{\prime}}{dx} \\
&\vdots&&&& \\
q &=& \dfrac{y''-2y'+y}{dx} & q &=& \dfrac{y''-2y'+y}{dx} \\
&\vdots&&&&
\end{array}
$$

$$r=\frac{y'''-3y''+3y'-y}{dx^3}$$
$$\vdots$$

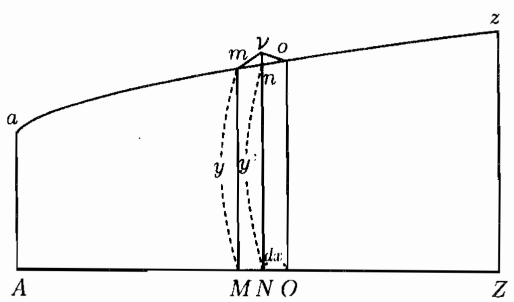
オイラーは積分式を
$$\int Zdx=\cdots+Z_{\prime}dx+Zdx+Z'dx+Z''dx+\cdots$$
$$=\sum Zdx$$
のように無限小等分して，話を展開している．(右図)

この曲線 az を変分し，積分式を微分してこの積分式に極値を与えるような曲線を求めることを問題にしている．



このような曲線とは無限小変分を受けても積分式の値が変化しない曲線である．よって曲線は方程式 $d\cdot\int Zdx=d\cdot\sum Zdx=\sum dZdx=0$ から導かれる微分方程式を満たす．この微分方程式は一般にオイラー方程式と呼ばれている．そしてこの微分方程式を解くことにより曲線を求めている．実際には次のように微分方程式を導いている

$\boxed{\text{問題}}$ Z は，x，y，p の関数とするとき，$\int Zdx$ が極大または極小になるような曲線を見つけよ (下図参照)．



このとき $dZ=Mdx+Ndy+Pdp$ となる．

図の $AM = x$,$Mm = y$,$Nn = y'$ と置く．このとき MN に Zdx が，NO に $Z'dx$ が対応する．

今無限小 $n\nu$ だけ y' を増加させると，

p は，$p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'-y}{dx}$ だから $\dfrac{\nu}{dx}$ だけ増加し，$p' = \dfrac{y''-y'}{dx}$ だから p' は $\dfrac{n\nu}{dx}$ だけ減少する．よって微分 $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ と $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$ がそれぞれ

$$Mdx + Ndy + P\big(dp + \frac{n\nu}{dx}\big)$$

$$M'dx + N'(dy' + n\nu) + P'\big(dp' - \frac{n\nu}{dx}\big)$$

に変わる．今はこの２つだけが曲線の変分によって影響を受ける．
従って，

$$\begin{aligned}
&d\cdot\int Zdx = \sum dZdx \\
&= (Mdx + Ndy + Pdp) + (M'dx + N'dy' + P'dp') \\
&- \left(Mdx + Ndy + P\big(dp + \frac{n\nu}{dx}\big)\right) - \left(M'dx + N'(dy' + n\nu) + P'\big(dp' - \frac{n\nu}{dx}\big)\right) \\
&= n\nu\cdot(P + N'dx - P')
\end{aligned}$$

となる．ここで微分計算により $P' - P = dP$ であり，そして N' の代わりに N と置いてよいので，

$$\sum dZdx = n\nu\cdot(Ndx - dP)$$

となる．そしてこれを 0 と置くと求める曲線の方程式が与えられる．すなわち，

$$0 = Ndx - dP \quad \text{または} \quad N - \frac{dP}{dx} = 0$$

これでオイラー方程式を導かれた．

Z に含まれる導関数の次数に応じて微分方程式の階数が増えていくことを利用すると Z が x，y，p，q の関数の場合には

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$$

と置くとき，オイラー方程式

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,$$

さらに一般に Z が x，y，p，q，r，s，t，etc. の関数の場合には

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \text{etc}$$

と置くとき，オイラー方程式

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \text{etc.}$$

が導かれる．
実際には以下のように使われている．

例　＜2 章 34 節　Ⅲ＞

積分式

$$\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$$

が極大または極小になるような曲線を見つけよ．

$Z = \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$ の全微分を作ると，$dZ = -\dfrac{dx\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{pdp}{\sqrt{x(1+p^2)}}$ dy は無いので $N=0$，そして dp の係数は $\dfrac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}$ だから $P = \dfrac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}$ となる．オイラー方程式 $N - \dfrac{dP}{dx} = 0$ は $N=0$ なので $dP=0$ となる．よって

$$P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \text{Const.}$$

ここで，この Const.$= \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ と置くと，

$$P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \text{Const.} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$ap^2 = x + p^2x$ よって，
$p = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$ と $p = \dfrac{dy}{dx}$ から

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

となる．この微分方程式を満たす曲線はサイクロイドである．
このような例にはヨハン・ベルヌーイの最速降下線問題の影響が伺える．

2.2　絶対的方法　(2) Z の中に不定積分が存在する場合

本文第 3 章では $\int Zdx$ の Z に不定積分量 $\int_a^x [Z]dx$ が入っているときのオイラー方程式を作り出している．

$$\int_l \left\{ \int_a^x [Zdx] \right\} dx$$

本文中では不定積分量 $\int_a^x [Z]dx = \Pi$ と置いて，$\int \Pi dx$ という形で表れる．
なぜこのような形のものを扱うようになったのかは，3 章の最後にある例題に見られる．
その問題は $\int \dfrac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{\Pi}} dx$ の極値問題なのだが，Π が明示的に与えられず，$d\Pi = gdx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{1+p^2}$ のような微分方程式を通して与えられている．オイラーはこのような問題を解くために手始めに Π が明示的に与えられるものから考えていったのである．
ここで微分方程式 $d\Pi = gdx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{1+p^2}$ だが，本文中の記述を直訳すると，

『抵抗媒体の中でその曲線上を 2n 重に比例する速さに沿って降下するとき，この物体は最大速度を得る.』
この条件のときに作られたとある．なぜこのような式になるのかよくわからない．
この運動については “Mechanica, volume 2”E16 の第 3 章 “De motu puncti super data linea in medio resistente.”(抵抗媒体の中で与えられた線上の質点の運動について) において詳しく取り扱われている．よく似た微分方程式は見られるが上記の微分方程式は出てこない．またこの問題を解く中で式変形をしていくと $\frac{2\Pi}{\text{曲率半径}}$ という式が出て来る．このことからオイラーは力学由来の式を参考にして数学の問題が成り立つようにこの式を作ったのではないだろうか？これもオイラーの力学をすべて読んだわけではないのでただの予想でしかない．

さて $\int \Pi dx$ の Π が明示的に与えられたとき，変分の原理は今までと同じで，今度は $\Pi = \int [Z]dx$ の中の [Z] に注目して，その微分 $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{etc.}$ を考え無限小変分をしてオイラー方程式を作り出している．この場合 L を定数として $dZ = Ld\Pi$ と置いて

$$
\begin{aligned}
d \cdot Zdx &= Ldx \cdot d\Pi \\
d \cdot Z'dx &= L'dx \cdot d\Pi' \\
d \cdot Z''dx &= L''dx \cdot d\Pi'' \\
d \cdot Z'''dx &= L'''dx \cdot d\Pi''' \\
d \cdot Z^{IV}dx &= L^{IV}dx \cdot d\Pi^{IV} \\
\text{etc.}
\end{aligned}
$$

と無限小等分して変分の影響を見ている．
この場合 L を定数とおいたので $L'dx \cdot d\Pi'$ 以降に変分の影響が表れる．このため影響の範囲を指定する必要がある．この時代は定積分の記号法が無かったのでオイラーは Π を曲線に沿って積分した全体を H と置いて，影響の無い部分 L を集めて全体から影響の無い定数部分を引いて変分の影響のある範囲を指定している．そしてオイラー方程式

$$
\begin{aligned}
0 = [N](H - \int Ldx) - \frac{d[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int Ldx)}{dx^2} \\
- \frac{d^3[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4[S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \frac{d^5[T](H - \int Ldx)}{dx^5}
\end{aligned}
$$

を与えている．

2.3 これまでに教示された方法の利用について

本文第4章には様々な例題が並んでいる．これまでは直交座標平面の曲線を見つける為にオイラー方程式を作っていたのだが，直交座標を作らない変化量 x と y に関する変分問題もオイラー方程式を用いて解くことができることを解説している．
実際の問題を紹介する．この問題では x と y は極座標で与えられる．

例　I

与えられた中心C(Fig.7)から半径CA，CMを引くとき，角度ACMに含まれるあらゆる線分の間で最も短くなる線AMを見つけよ．

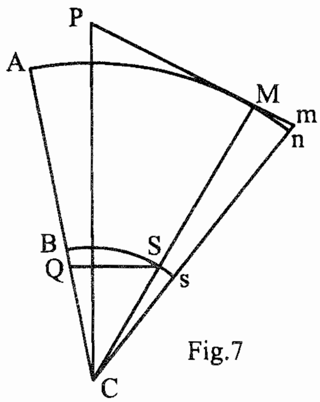


Fig.7

当然のことながらこの求める線は直線だとわかる．だがこの問題は与えられた解法の規則に従うと便利である．結果として方法の正しさはますます明らかになると言える．
線AMの長さは与えられた角度ACMに対して最小にならなければならないから，角度ACMを x と置く．言い換えると中心Cから半径を1として円を描くとき，この弧BSは x となる．半径CMを別の変化量 y とする．この変化量 x と y の間で見つけられる方程式によって求める曲線AMの性質がわかる．そして与えられた半径Cmの近くにSs= dx とmn= dy を取ると．Cn=CMとなる．更に三角形CSsとCMnは相似だから

$$1 : dx = CM[y] : Mn[ydx]$$

となる．これによってMm= $\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}$ となる．一般に $dy = pdx$ だからMm= $\sqrt{y^2 + p^2}$ となる．ここから線AMの長さは $= \int dx\sqrt{y^2 + p^2}$ となる．この線が与えられた x の値に対し最小にならなければならない．この式はオイラー方程式 $N - \dfrac{dP}{dx} = 0$ を使用する場合に所属するから，問題を満足する線は任意の x の値に対し最小になる．$Z = \sqrt{y^2 + p^2}$ だから

$$dZ = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{pdp}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

ここで $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ において

$$M = 0,\ N = \frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}},\ P = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}},\ Q = 0,\ R = 0, \text{ etc.}$$

だから $dZ = Ndy + Pdp$ となる．また $N - \dfrac{dP}{dx} = 0$ に $dy = pdx$ を代入した方程式 $Ndy = pdP$ が与えられる．この式を方程式 $dZ = Ndy + Pdp$ に代入すると $dZ = Pdp + pdP$

が生じる．これを積分すると，

$$Z + C = Pp \quad \text{言い換えると} \quad C + \sqrt{y^2+p^2} = \frac{p^2}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

それゆえに

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2+p^2}} = \text{Const.} = b \tag{1}$$

となる．これを解くと，

$$\begin{aligned} y^4 &= b^2(y^2+p^2) \\ p^2 &= y^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right) \\ p &= y\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1} \end{aligned}$$

$dy = pdx$ だから

$$dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}}$$

これを積分すると，

$$\begin{aligned} \int dx &= \int \frac{dy}{y\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1}} \\ x &= b\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-b^2}} + C \\ t &= y + \sqrt{y^2-b^2} \text{と置くと，} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{t^2+b^2}{2b} && (3) \\ dy &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{t^2}\right)dt = \frac{t^2-b^2}{2t^2}dt \\ x &= 2b\int \frac{dt}{t^2+b^2} + C' && (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= b\tan\theta \text{と置くと，} && (5) \\ dt &= \frac{bd\theta}{\cos^2\theta} \\ \text{また}\quad b^2+t^2 &= b^2(1+\tan^2\theta) \\ &= \frac{b^2}{\cos^2\theta} \quad \text{より} \\ dt &= \frac{b^2+t^2}{b}d\theta && (6) \end{aligned}$$

(3) と (5) から

$$x = 2b\int \frac{d\theta}{b} = 2\theta + \alpha$$
$$\theta = \frac{x-\alpha}{2}$$

これを (4) に代入して，

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{t}{b} = \tan\frac{x-\alpha}{2} \\ t &= b\tan\frac{x-\alpha}{2} \end{aligned}$$

これを (2) に代入して，

$$\begin{aligned} y &= \frac{t^2+b^2}{2t} = \frac{b^2\left(1+\tan^2\dfrac{x-\alpha}{2}\right)}{2b\tan\dfrac{x-\alpha}{2}} \\ &= \frac{b^2\left(\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x-\alpha}{2}}\right)}{2b\tan\dfrac{x-\alpha}{2}} \\ &= \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}\cos\dfrac{x-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{\sin(x-\alpha)} \\ b &= y\sin(x-\alpha) \\ b &= y(\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha) \\ b &= \cos\alpha(y\sin x) - \sin\alpha(y\cos x) \end{aligned}$$

$y\sin\alpha = Y \quad y\cos x = X$ と置くと，

$$Y\cos\alpha - X\sin\alpha = b$$

これは 2 つの任意定量 b と α を含む直線の方程式である．
求める線は与えられた 2 点を通過するという条件を問題に付加すると解が確立する．そのときその与えられた 2 点を通って引かれた直線は問題を満足する．

3 研究課題

ここでは触れることができなかったが，オイラーはオイラー方程式が出てくるたびに数々の計算例を与えてくれている．それらには，無限解析を用いて複雑な計算が展開されていて，計算の達人と呼ばれた足跡がよく見て取れる．では変分法が生まれた当初から複雑な数学が必要だったのだろうか？オイラーが一番始めに書いた論文 E1 のテーマは変分法である．この論文は全集の力学の分野である第Ⅱ系列に収録されている．力学を発展させる中で，彼の変分法への興味は最初から旺盛で，変分法を発展させて数学が必要になり，無限解析を発展させている．計算ももちろんだが数学の世界も広がっている．このテキストの 1 章では関数とは解析的表示式で表されるものである，と定義していたのだが，4 章では，

この方法 (曲線を見つけるために 2，3 章で展開された方法) の適用範囲は，曲線に所属する 2 つの変化量を越えて単に解析的抽象 (Analytica abstractio)[1] の状態にある 2 つの変化量へと広がっていく．

とある．2，3 章で使われていた関数の定義が 4 章の問題に対しては不都合が生じてきたので新しい関数概念を導入している．これが元になって後に "微分計算教程" で提唱される関数概念になったといえる．

オイラーはこのように変分法を発展させる中で無限解析を発展させていったが，逆に数学の発展による変分法の発展もあったかもしれない．

このようなことを念頭に置きつつ，続く 5 章以降の等周問題から生まれた変分法の相対的方法に挑みたいと思う．

文献

[1] L.Euler , "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. " , Birkhäuser,opera omnia I-24,1952.

[2] L.Euler , "Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinentes. " , Birkhäuser,opera omnia I-25,1952.

[3] L.Euler , "Mechanica, volume 1, 2 " , Birkhäuser,opera omnia II-1,2,1912.

[1] 完全に任意の 2 つの変化量 x と y がある方程式 $f(x, y) = 0$ で結ばれていることを指して，「解析的抽象の状態にある」と言い表している．