Jacobi の " FUNNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM"　その 2

今野秀二

Jacobi の Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum (1829) は彼の楕円関数研究をまとめたものである．この報告は前半が楕円積分の変数変換とその応用からなり，後半は楕円関数の基本をカバーする形を取っている．この報告はその後の楕円関数研究の出発点になったようで例えば Kronecker の虚数乗法論はアーベルからテーマを得ているが，彼の使う楕円関数はほとんどがこの報告に依っている．

" Fundamennta " ではまず定数 k に対して，第 1 種楕円積分

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (x=\sin\varphi)$$

から出発する．この φ を $\varphi = \mathrm{am}(u)$ と表す．そして三角関数の類似として $x = \sin\mathrm{am}(u)$, $y = \cos\mathrm{am}(u)$, $z = \sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u)}$ を考えた．これが Jacobi の楕円関数である．ここでは慣習に従って，それぞれ $x = \mathrm{sn}(u), y = \mathrm{cn}(u), z = \mathrm{dn}(u)$ と書くことにしよう．Jacobi はまず，適当な定数 λ, M に対し

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

となる有理変換 $x \to y = R(x)$ ($R(x)$ は x の有理式) を求めた．つまり楕円曲線の isogeny である．彼はこの変換と k, λ, M を楕円積分の周期の m 分点 u_m での値 $\mathrm{sn}(u_m), \mathrm{cn}(u_m), \mathrm{dn}(u_m)$ を使って具体的に書いている．この証明では非常に煩雑な計算をしているのだが，その副産物として楕円関数 $\mathrm{sn}(u)$ の等分方程式や楕円関数のフーリエ展開および無限積表示を導いている．その無限積表示からテータ関数を定義し，jacobi の有名な発見，楕円積分の周期の比 iK/K' とモヂュライ k とテータ 0 値の関係を導いている．この後第 2 および第 3 種楕円積分の導入とそれらについて加法定理の証明で終わっている．

しかし，この報告は上に述べたように非常に煩雑であったため Jacobi はその後，この理論を簡易化するための論文を書いていて，最後にそれを講義のかたちで残している．

今回は Jacobi のこの簡易化を紹介したい．これは先の " Fundamennta nova " の理解を容易にすると同時に，Kronecker へのよき入門になると考えたためである．

1　テータ級数

1.1 Jacobi は級数

$$\sum_{\nu \in \mathbf{Z}} e^{a\nu^2+2b\nu+c} \qquad (a, b, c \text{ は定数})$$

から出発している．まず，収束するよう $\Re a < 0$ と仮定し，また定数因子 e^c は除くことにして $c=0$ とする．このとき級数 $T = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a\nu^2+2b\nu}$ は

$$T = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{4}\times(2\nu)^2+b\times(2\nu)} \qquad (\text{偶数和})$$

$$= e^{\frac{a}{4}-b} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{4}\times(2\nu+1)^2+(b-\frac{a}{2})\times(2\nu+1)} \qquad (\text{奇数和})$$

と2通りに表される．

まず偶数和による表示で $e^a = q, b = ix$ としたものを $\vartheta_3(x) = \vartheta_3(x,q)$ と定義する．続いて奇数和による表示から定数因子 $e^{\frac{a}{4}-b}$ を取り去り $e^a = q, b-a/2 = ix$ と置いたものを $\vartheta_2(x) = \vartheta_2(x,q)$ と定義する．さらに $\vartheta_1(x) = \vartheta_1(x,q) = -\vartheta_2(x+\pi/2)$, $\vartheta_4(x) = \vartheta_4(x,q) = \vartheta_3(x+\pi/2)$ と置いて $\vartheta_1(x), \vartheta_4(x)$ を定義する． Jacobi は $\vartheta_4(x)$ を $\vartheta(x)$ と書いたのでここでもそれを踏襲しよう．すなわち

$$\begin{aligned}\vartheta_3(x) &= \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} q^{\frac{1}{4}(2\nu)^2} e^{2i\nu x} \\ &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \cdots\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(x) = \vartheta_4(x) &= \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} (-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2i\nu x} \\ &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \cdots\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x) &= \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{i(2\nu+1)x} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos x + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + \cdots\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) &= i\sum_{\nu\in\mathbf{Z}} (-1)^{\nu-1} q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} e^{i(2\nu+1)x} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin x - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - \cdots .\end{aligned} \tag{4}$$

$\vartheta_j(x)$ は変換 $x \to x+\pi/2$, $x \to x + ia/2$ で表1のように変換される．証明は容易である．ただし $f = q^{-1/4}e^{ix}$ である．

(表 1)

変換	$\vartheta_1(x)$	$\vartheta_2(x)$	$\vartheta_3(x)$	$\vartheta(x)$
$x \to x+\pi/2$	$\vartheta_2(x)$	$-\vartheta_1(x)$	$\vartheta(x)$	$\vartheta_3(x)$
$x \to x+ia/2$	$-if\vartheta(x)$	$f\vartheta_3(x)$	$f\vartheta_2(x)$	$-if\vartheta_1(x)$

1.2　独立な変数 w,x,y,z に対して w',x',y',z' を

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{2}(w+x+y+z), \qquad & x' &= \frac{1}{2}(w+x-y-z), \\ y' &= \frac{1}{2}(w-x+y-z), \qquad & z' &= \frac{1}{2}(w-x-y+z). \end{aligned} \tag{5}$$

とおく．これを列ベクトル $\xi = {}^t(w,x,y,z)$ から列ベクトル $\xi' = {}^t(w',x',y',z')$ への変換と見て行列の積で $\xi' = A\cdot\xi$ と表すと A は $\pm 1/2$ を成分にもつ 4 次の対称行列で ${}^tAA = 1_4$ を満たしている．さらに

w,x,y,z が「すべて偶数またはすべて奇数」なら w',x',y',z' も同じ性質をもつ．また逆も正しい．偶数（奇数）の組を偶数（奇数）の組に写すとは限らない．

という性質をもっている．実際 w,x,y,z が「すべて偶数またはすべて奇数」のとき $w',x',y',z' \in \mathbf{Z}$ かつ $w+x=w'+x', w+y=w'+y', w+z=w'+z'$ より明らかである．

さて w,x,y,z と w',x',y',z' が (5) の関係にあるとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) \\ &\quad = \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z'). \end{aligned} \tag{6}$$

[証明] (1) , (3) で $q = e^a$ とすれば

$$\vartheta_3(x) = e^{\frac{x^2}{a}} \sum_\nu e^{\frac{1}{a}\{\frac{a}{2}(2\nu)+ix\}^2}, \qquad \vartheta_2(x) = e^{\frac{x^2}{a}} \sum_\nu e^{\frac{1}{a}\{\frac{a}{2}(2\nu+1)+ix\}^2}$$

と表せるから上の ξ を使うと

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = e^{\frac{1}{a}{}^t\xi\xi} \cdot \sum_\lambda e^{\frac{1}{a}{}^t\left(\frac{a}{2}\cdot\lambda+i\xi\right)\left(\frac{a}{2}\cdot\lambda+i\xi\right)}$$

$$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = e^{\frac{1}{a}{}^t\xi\xi} \cdot \sum_\mu e^{\frac{1}{a}{}^t\left(\frac{a}{2}\cdot\mu+i\xi\right)\left(\frac{a}{2}\cdot\mu+i\xi\right)}$$

となる．ここで $\lambda,\mu\ (\in \mathbf{Z}^4)$ は成分がすべて偶数（奇数）の列ベクトルを動く．したがって，変換 $\xi \to \xi'$ の性質から

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$

は $\xi \to \xi', \lambda \to A\cdot\lambda, \mu \to A\cdot\mu$ で不変となり (6) は正しい．

1.2　Jacobi は上で示した (6) を出発点にして以下にあげる A 群，B 群，C 群，D 群の等式を導き，それを使って楕円関数論を展開した．Jacobi は等式と証明の方針だけ述べているが，ここでは簡単に証明をつけておく．

まず A 群だが，式が非常に長いので w,x,y,z と w',x',y',z' をこの順に固定し，

$$\vartheta_i(w)\vartheta_j(x)\vartheta_k(y)\vartheta_l(z) = \vartheta_{ijkl}, \qquad \vartheta_i(w')\vartheta_j(x')\vartheta_k(y')\vartheta_l(z') = \theta'_{ijkl}$$

と表すことにする．例えば (6) は下記 $(A1)$ のように簡略化される．

$(A1)$ $\theta_{3333}+\theta_{2222}=\theta'_{3333}+\theta'_{2222}$, $(A2)$ $\theta_{3333}-\theta_{2222}=\theta'_{4444}+\theta'_{1111}$,

$(A3)$ $\theta_{4444}+\theta_{1111}=\theta'_{3333}-\theta'_{2222}$, $(A4)$ $\theta_{4444}-\theta_{1111}=\theta'_{4444}-\theta'_{1111}$.

$(A5)$ $\theta_{4433}+\theta_{1122}=\theta'_{4433}+\theta'_{1122}$, $(A6)$ $\theta_{4433}-\theta_{1122}=\theta'_{3344}+\theta'_{2211}$,

$(A7)$ $\theta_{4422}+\theta_{1133}=\theta'_{4422}+\theta'_{1133}$, $(A8)$ $\theta_{4422}-\theta_{1133}=\theta'_{2244}+\theta'_{3311}$,

$(A9)$ $\theta_{3322}+\theta_{4411}=\theta'_{3322}+\theta'_{4411}$, $(A10)$ $\theta_{3322}-\theta_{4411}=\theta'_{2233}+\theta'_{1144}$,

$(A11)$ $\theta_{3241}+\theta_{2314}=\theta'_{1423}-\theta'_{4132}$, $(A12)$ $\theta_{3241}-\theta_{2314}=\theta'_{3241}-\theta'_{2314}$.

[証明の概略] $(A2)$ は $(A1)$ で $w\to w+\pi$ (他は不変) とする．このとき (5) から w',x',y',z' はそれぞれ $\pi/2$ を加えたものになるので **表 1** を使うとよい．$(A3)$ は $(A1)$ で w,x,y,z にそれぞれ $\pi/2$ を加えるとよい．$(A4)$ は $(A3)$ で w',x',y',z' にそれぞれ $\pi/2$ を加えるとよい．$(A5)$ は $(A4)$ で $y\to y+\pi/2, z\to z-\pi/2$ とする．$(A6)$ は $(A4)$ で $y\to y+\pi/2, z\to z+\pi/2$ とする．$(A7)$ は $(A5)$ で $y\to y+ia/2, z\to z-ia/2$ とする．$(A8)$ は $(A6)$ で $y\to y+ia/2, z\to z-ia/2$ とする．$(A9),(A10)$ は $(A1),(A2),(A3),(A4)$ で $y\to y+ia/2, z\to z-ia/2$ として得られる式を辺辺加え，あるいは引いて得られる．$(A11),(A12)$ は $(A1),(A2)$ で $x\to x+ia/2, y\to y+\pi/2, z\to z+\pi-ia/2$ とする．

$$
\begin{aligned}
(B1)\quad &\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\
&=\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
&=\vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta(x+z)\vartheta(x+y),\\
(B2)\quad &\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)-\vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\
&=\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
&=\vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_3(x+z)\vartheta_3(x+y)\\
(B3)\quad &\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\
&=\vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\
&=\vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_2(x+y)\\
(B4)\quad &\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)-\vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\
&=\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)+\vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\
&=\vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta_1(x+z)\vartheta_1(x+y)\\
(B5)\quad &\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z)+\vartheta_2(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z)\\
&=\vartheta_1(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_2(z)-\vartheta(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(z)\\
&=\vartheta(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_2(x+z)\vartheta_3(x+y)
\end{aligned}
$$

[証明] $(B1)$ は $(A2)$ で $w=x+y+z$ (したがって $w'=x+y+z, x'=x, y'=y, z'=z$) とした式と $(A2)$ で $w=-(x+y+z)$ とした式から得られる．$(B2)$ は

$(A6)$ で $w=x+y+z$ とした式と $(A5)$ で $w=-(x+y+z)$ とした式から得られる．$(B3)$ は $(A8)$ で $w=x+y+z$ とした式と $(A7)$ で $w=-(x+y+z)$ とした式から得られる．$(B4)$ は $(A10)$ で $w=x+y+z$ とした式と $(A9)$ で $w=-(x+y+z)$ とした式から得られる．$(B5)$ は $(A11)$ で $w=x+y+z$ および $w=-(x+y+z)$ を代入し y,z を交換した式から得られる．

Jacobi は C 群に 17 の等式を挙げているが，ここでは後で使うもののみを挙げておく（番号は原典のまま）．

$(C1)$ $\vartheta_3^2(0)\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y)+\vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)=\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)+\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)$

$(C2)$ $\vartheta_3^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)=\vartheta^2(x)\vartheta_3^2(y)+\vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y)=\vartheta_3^2(x)\vartheta^2(y)+\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)$

$(C3)$ $\vartheta_3^2(0)\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x-y)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\vartheta_1^2(y)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta^2(y)$

$(C4)$ $\vartheta_3^2(0)\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y)-\vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y)=\vartheta^2(x)\vartheta_2^2(y)-\vartheta_2^2(x)\vartheta^2(y)$

$(C6)$ $\vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y)-\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)=\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)$

$(C11)$ $\vartheta_2^2(0)\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x-y)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y)-\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)$

$(C13)$ $\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta(x\pm y)\vartheta_2(x\mp y)=\vartheta(x)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_2(y)\pm\vartheta_1(x)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_3(y)$

$(C15)$ $\vartheta(0)\vartheta_3(0)\vartheta(x\pm y)\vartheta_3(x\mp y)=\vartheta(x)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_3(y)\pm\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)$

$(C17)$ $\vartheta_3(0)\vartheta_2(0)\vartheta_1(x\pm y)\vartheta(x\mp y)=\vartheta(x)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_2(y)\pm\vartheta_3(x)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(y)$.

[証明]　まず

(a) $\quad w=x,\ y=z, w'=x+y,\ x'=x-y,\ y'=z'=0$

(b) $\quad w=-x,\ y=-z,\ w'=x'=0,\ y'=-(x-y),\ z'=-(x+y)$

(c) $\quad w=y,\ x=z,\ w'=x+y,\ x'=0,\ y'=-(x-y),\ z'=0$

(d) $\quad w=-y,\ x=-z,\ w'=0,\ x'=x-y,\ y'=0,\ z'=-(x+y)$

(e) $\quad w=z,\ x=y,\ w'=y+z,\ x'=0,\ y'=0,\ z'=-(y-z)$

(f) $\quad w=-y,\ x=-y,\ w'=0,\ x'=-(y+z),\ y'=y-z,\ z'=0$

とおく．$(C1)$ は $(A1),(A2),(A3)$ に (a) を，$(A4)$ に (b) を代入した 4 式から出る．$(C2)$ は $(A5)$ に $(a),(b)$ を代入した式と，それらの x と y を交換した 4 式から出る．$(C3)$ は $(A9),(A10)$ に (a) を代入した式と，それらの x と y を交換した 4 式から出る．$(C4)$ は $(A7),(A8)$ に (a) を代入した式と，それらの x と y を交換した 4 式から出る．$(C6)$ は $(A2),(A4)$ に (a) を代入した 2 式から出る．$(C11)$ は $(A1),(A2),(A3),(A4)$ に (c) を代入した 4 式より出る．$(C13)$ は $(A7),(A8)$ に (e) を代入した 2 式から出る．$(C15)$ は $(A5)$ に (e) を代入，次に $y\to -y$ とした 2 式から出る．$(A17)$ は $(A11)$ に (a) を代入，次に x,y を交換，さらに $y\to -y$ とした式から得られる．

$(C1),(C2),(C11)$ で $x=y$ として

$$\left\{\begin{array}{r}\vartheta_3^3(0)\vartheta_3(2x)=\vartheta_3^4(x)+\vartheta_1^4(x)=\vartheta^4(x)+\vartheta_2^4(x)\\ \vartheta_3^2(0)\vartheta(0)\vartheta(2x)=\vartheta^2(x)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(x)\qquad\qquad\\ \vartheta_2^3(0)\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^4(x)-\vartheta_1^4(x)=\vartheta_3^4(x)-\vartheta^4(x)\end{array}\right\}\tag{7}$$

が得られ，さらに $(C1),(C2),(C3),(C4)$ に $y=0$ として

$$
\begin{aligned}
&(D1) \qquad \vartheta_3^2(0)\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\vartheta_2^2(x)\\
&(D2) \qquad \vartheta_3^2(0)\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2(0)\vartheta_1^2(x)\\
&(D3) \qquad \vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0)\vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(0)\vartheta_1^2(x)\\
&(D4) \qquad \vartheta_3^2(0)\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\vartheta^2(x) - \vartheta^2(0)\vartheta_2^2(x)
\end{aligned}
$$

を得る．これですべての準備が済んだ．次はいよいよ楕円関数である．

2 楕円関数

いままで準備してきたテータ関数を使って，Jacobi の楕円関数とその性質を導くが，その中には楕円積分の周期，モジュライおよびテータ 0 値の関係の鮮やかな証明も含まれる．

2.1 これからは煩雑さを避けるため誤解のないがぎり $\vartheta_j(0)$ を単に ϑ_j と書くことにしよう．言い換えると q を動かさないとき単に $\vartheta_j = \vartheta(0,q)$ と書く．

$(D1)$ で $x=0$ として $\vartheta_3^4 = \vartheta^4 + \vartheta_2^4$．そこで

$$
\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta}{\vartheta_3} \tag{8}
$$

とおく．したがって $k^2 + k'^2 = 1$ かつ，$\sqrt{k'/k} = \vartheta/\vartheta_2$ である．また $(D4)$ から

$$
\left(\frac{\vartheta\vartheta_2(x)}{\vartheta_2\vartheta(x)}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_3\vartheta_1(x)}{\vartheta_2\vartheta(x)}\right)^2 = 1.
$$

したがって，適当な φ に対して

$$
\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\sin\varphi = \sqrt{k}\sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta}\cos\varphi = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi
$$

と表せる．これと (8) を使うと $(D2)$ から

$$
\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 \sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}
$$

を得る．ここで Legendre の関数 $\varphi \to \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ を導入すると

$$
\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi, \qquad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi \tag{9}
$$

を得られた．x と φ の詳しい関係は後回しにして，ここでは (9) から導かれる基本的な関係式を導いておこう．

2.2　まず $(C17), (C13), (C15)$ の両辺を $(C6)$ の両辺でそれぞれ割ると

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta^2}\frac{\vartheta_1(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)}\\&=\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}\pm\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\right)\Big/\left(1-\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\frac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}\right)\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\frac{\vartheta_2(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)}\\&=\left(\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\mp\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}\right)\Big/\left(1-\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\frac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}\right)\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta_3(x\pm y)}{\vartheta(x\pm y)}\\&=\left(\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}\mp\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\right)\Big/\left(1-\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\frac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta^2(y)}\right)\end{aligned}\tag{12}$$

が得られる．さて (9) の関係にある x, φ を $x \longleftrightarrow \varphi$ と書くことにし $y \longleftrightarrow \psi$，$x+y \longleftrightarrow \sigma$ とすれば (10), (11), (12) は

$$\begin{cases}\sin\sigma=(\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi)/(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\\ \cos\sigma=(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\Delta\varphi\Delta\psi)/(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\\ \Delta\sigma=(\Delta\varphi\Delta\psi-k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\varphi)/(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\end{cases}\tag{13}$$

と表される．これは実は楕円関数の加法定理にあたる式である．

2.3　次に楕円積分との関係を明らかにしよう．そのため (10), (11), (12) の両辺を y について微分し $y=0$ とする．このとき $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2'(0)=\vartheta_3'(0)=\vartheta'(0)=0$ ($\vartheta_j(x)$ のフーリエ展開）に注意すれば

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)=\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},\tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\right)=-\frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\right)=-\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\tag{16}$$

が得られる．このうちの (15) に注目しよう．左辺は (9) より $-\sqrt{k/k'}\cdot\sin\varphi\cdot(d\varphi/dx)$ となり，右辺にも (9) を代入すると

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2}dx=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad\text{または}\quad\frac{\vartheta_3}{\vartheta}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2}x=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\tag{17}$$

を得る．

ここで $\vartheta_1'(0,q)$ について

$$\vartheta_1'(0,q)=\vartheta(0,q)\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\tag{18}$$

を証明しておこう.

[(18) の証明]　$\vartheta_3(x,q)$, $\vartheta_2(x,q)$ のフーリエ展開 (1), (3) で $x \to 2x, q \to q^4$ とすれば $\vartheta(x,q)$ の展開 (2) から

$$\vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(2x,q^4) + \vartheta_2(2x,q^4), \quad \vartheta(x,q) = \vartheta_3(2x,q^4) - \vartheta_2(2x,q^4) \tag{19}$$

が分かる. これと (7) の第３式から

$$\begin{aligned}\vartheta_2^3\vartheta_2(2x) &= \vartheta_3^4(x) - \vartheta^4(x) = (\vartheta_3(x) - \vartheta(x))(\vartheta_3(x) + \vartheta(x))(\vartheta_3^2(x) + \vartheta^2(x)) \\ &= 8\vartheta_2(2x,q^4)\vartheta_3(2x,q^4)(\vartheta_3^2(2x,q^4) + \vartheta^2(2x,q^4)).\end{aligned}$$

ここで $2x$ を x で置き換えて

$$\vartheta_2^3(0,q)\vartheta_2(x,q) = 8\vartheta_2(x,q^4)\vartheta_3(x,q^4)\{\vartheta_3^2(x,q^4) + \vartheta_2^2(x,q^4)\}. \tag{20}$$

この式でさらに $x \to x + \pi/2$ として表１を使うと

$$\vartheta_2^3(0,q)\vartheta_1(x,q) = 8\vartheta_1(x,q^4)\vartheta(x,q^4)\{\vartheta^2(x,q^4) + \vartheta_1^2(x,q^4)\}$$

を得る.　この式の両辺を x について微分して $x=0$ を代入すると

$$\vartheta_2^3(0,q)\vartheta_1'(0,q) = 8\vartheta^3(0,q^4)\vartheta_1'(0,q^4). \tag{21}$$

一方, (19), (20) に $x=0$ を代入して３つの式を得る. それらを辺辺掛けると $\vartheta_3^4(0,q^4) - \vartheta_2^4(0,q^4) = \vartheta^4(0,q^4)$ であるから結局

$$\vartheta_2^4(0,q)\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q) = 8\vartheta^4(0,q^4)\vartheta_2(0,q^4)\vartheta_3(0,q^4) \tag{22}$$

が得られる. そこで (21) の両辺を (22) の両辺でそれぞれ割った式を $\xi(q)$ と置く. すなわち

$$\xi(q) = \frac{\vartheta_1'(0,q)}{\vartheta(0,q)\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)} = \frac{\vartheta_1'(0,q^4)}{\vartheta(0,q^4)\vartheta_2(0,q^4)\vartheta_3(0,q^4)}.$$

$\xi(q)$ は変換 $q \to q^{4n}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ で不変であることが分かる. ところが $q^{4n} \to 0$ $(n \to \infty)$ ゆえ $\xi(q) = \xi(0) = 1$ （テータ関数のフーリエ展開）. よって (18) は正しい.

したがって (17) は

$$\vartheta_3^2 \cdot x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{23}$$

となる. Legendre は右辺の積分を第１種楕円積分と呼んだ.

2.4　ここで x と φ の関係を整理しておこう. そのため x, q はともに実数で $q < 1$ とする. このとき $\vartheta_1(x+\pi/2)/\vartheta(x+\pi/2) = \vartheta_2(x)/\vartheta_3(x) \to \sqrt{k}$ $(x \to 0)$, 同様に $\vartheta_2(x+\pi/2)/\vartheta(x+\pi/2) \to 0$ $(x \to 0)$ より $x = \pi/2$ のとき $\sin\varphi = 1, \cos\varphi = 0$ であ

る．よって $x=\pi/2$ のとき $\varphi \equiv \pi/2 \mod 2\pi$ である．一方 (20) に $x=0$ を代入した式で (20) の両辺をそれぞれ割ると

$$\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta_2(0,q)} = \frac{\vartheta_2(x,q^4)}{\vartheta_2(0,q^4)} \times \rho, \qquad \rho = \frac{\vartheta_3(x,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)} \cdot \frac{\vartheta_3(x,q^4)+\vartheta_2(x,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)+\vartheta_2(0,q^4)}$$

となるが x, q は実数ゆえ常に $\rho > 0$．すなわち $\vartheta_2(x,q)/\vartheta_2(0,q)$ は q を 4 乗しても符号は変わらない．また $q^{4n} \to 0$ $(n \to \infty)$ のときこの比は $\cos x$ に近づく（フーリエ展開）．よって $\vartheta_2(x,q)$ は任意の x について $\cos x$ と同符号，また $x \to \pi/2 - x$ として $\vartheta_1(x)$ が $\sin x$ と同符号であることが分かる．$\vartheta(x)$ は常に正であるから (9) より x と φ は同じ象限を動くことになる．

2.5 k, k' に対して

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \tag{24}$$

とおくと (23) から $K = (\pi/2)\cdot\vartheta_3^2(0,q)$，したがって (8) より

$$\vartheta_3(0,q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \qquad \vartheta_2(0,q) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}, \qquad \vartheta(0,q) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} \tag{25}$$

が得られる．

Jacobi は次に

$$\frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi}\log q \tag{26}$$

の証明をしている．ここでは今日よく知られているテータ関数の変換公式を使って証明をしよう．そのため記号を少し変えて

$$a = \pi i\tau, \quad q = e^a = q^{\pi i\tau}, \qquad \tau \in \mathbf{C},\ \Im\tau > 0$$

として $\vartheta_j(x,q)$ を $\vartheta_j(x,\tau)$ と書くことにする．したがって，先の k, k', K, K' はいずれも τ の関数と見なすことにする．このときテータ関数の変換公式は $\tau \to \tau' = -1/\tau$ に対して

$$\vartheta_3(x,\tau) = (-i\tau)^{-1/2}\exp\left(\frac{x^2}{\pi i\tau}\right)\cdot\vartheta_3(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}), \qquad |\arg(-i\tau)| < \frac{\pi}{2} \tag{27}$$

となる．ここで $x \to x+\pi/2$ に表 1 を使うのだが，少し細かい計算をすれば

$$(-i\tau)^{1/2}\vartheta(x,\tau) = \exp\left(\frac{i\tau' x^2}{\pi}\right)\cdot\vartheta_2(-x\tau', \tau').$$

が得られる．これらの式に $x=0$ として

$$(-i\tau)^{1/2}\vartheta(0,\tau) = \vartheta_2(0,\tau'), \qquad (-i\tau)^{1/2}\vartheta_3(0,\tau) = \vartheta_3(0,\tau'). \tag{28}$$

ところで $k = k(\tau) = \vartheta_2^2(0,\tau)/\vartheta_3^2(0,\tau), k' = k'(\tau) = \vartheta^2(0,\tau)/\vartheta_3^2(0,\tau)$ であったから τ の関数として $k'(\tau) = k(-1/\tau)$, (24) から $K'(\tau) = K(-1/\tau)$ でなければならない. すなわち $2K/\pi = \vartheta_3^2(0,\tau), 2K'/\pi = \vartheta_3^2(0,-1/\tau)$. ゆえに

$$\frac{K'}{K} = \frac{\vartheta_3(0,-1/\tau)}{\vartheta_3(0,\tau)} = -i\tau = -\frac{1}{\pi}\cdot\log q$$

となることが分かる.

注意 Jacobi 楕円関数に関する一連の論文には，テータの変換公式 (27) は出てこない.

以上よりモヂュラス k, k' および定積分 K, K' は τ の関数としてテータ 0 値で表され，さらに τ は $\tau = iK'/K$ と表せた. すなわち $q = e^{\pi i\tau} = e^{-\pi K'/K}$ である. 上にあげたモヂュラス k, 周期 $2K$ およびテータ 0 値（modular 関数）の関係

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)}$$

は Jacobi の楕円関数研究の一頂点をなすもので，前者は Siegel により後者は Weil により，それぞれ高次元アーベル多様体に一般化されている.

2.6 さて，(23) の積分を

$$u = F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{29}$$

とおき，この積分の逆関数を考える. φ は u の関数とみて $\varphi = \mathrm{am}\ u$ と表す. そして Jacobi は $\mathrm{sn}\ u = \sin\mathrm{am}\ \mathrm{u}$, $\mathrm{cn}\ u = \cos\mathrm{am}\ \mathrm{u}$, $\mathrm{dn}\ u = \Delta\ \mathrm{am}(u)$ を楕円関数と呼んだ. x, u, φ の関係は

$$u = F(\varphi) = \vartheta_3^2\cdot x = \frac{2K}{\pi}\cdot x, \qquad x = \frac{\pi}{2K}F(\varphi) \tag{30}$$

である. よって (9) は次のようになる.

$$\sqrt{k}\ \mathrm{sn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\ \mathrm{cn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}}\ \mathrm{dn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}. \tag{31}$$

このとき (13) は $\varphi = \mathrm{am}\ u$, $u = 2Kx/\pi$, $\psi = \mathrm{am}\ v$, $v = 2Ky/\pi$, $\sigma = \mathrm{am}\ (u+v)$, $u+v = 2K(x+y)/\pi$ に対して以下のようになる. これは楕円関数の加法定理である.

$$\begin{cases} \mathrm{sn}(u+v) = (\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v) + \mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u))\,/\,\left(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)\right), \\ \mathrm{cn}(u+v) = (\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v) - \mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v))\,/\,\left(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)\right) \\ \mathrm{dn}(u+v) = \left(\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v) - k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)\right)\,/\,\left(1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)\right) \end{cases}$$

(29) の $F(\varphi)$ については

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma) \tag{32}$$

が成り立つ.

3　第2種, 第3種積分

3.1　$x, u, \varphi, F(\varphi)$ は **2.6** の通りとして, x の関数

$$\zeta(x) = \frac{d}{dx}\log\vartheta(x) = \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} \tag{33}$$

を考える. この関数は x, y を変数とするとき

$$\zeta(x) + \zeta(y) - \zeta(x+y) = \vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)} \tag{34}$$

を満たしている. 証明は (B1) 後半の等式を z について微分し $z=0$ を代入するとよい. その際 $\vartheta' = \vartheta_1 = 0, \vartheta_1'(0) = \vartheta\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_3$ に注意する.

つぎに (34) の両辺を y で微分し $y=0$ を代入すると

$$\zeta'(0) - \zeta'(x) = \vartheta_2^2\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2 = \frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2\varphi$$

となるから, この式に $(2K/\pi)dx = (\varDelta\varphi)^{-1}d\varphi$ を掛けて 0 から x まで積分して

$$\zeta'(0)x - \zeta(x) = \frac{2K}{\pi}\int_0^{\varphi}\frac{k^2\sin^2\varphi}{\varDelta\varphi}d\varphi \tag{35}$$

を得る. そこで

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi}\varDelta\ \varphi\ d\varphi = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi \tag{36}$$

と置くと (35) の右辺は

$$\zeta'(0)x - \zeta(x) = \frac{2K}{\pi}\left[F(\varphi) - E(\varphi)\right] \tag{37}$$

と表せる. (36) の $E(\varphi)$ は第2種の楕円積分である.

ところで $x = \pi/2$ のとき $\varphi = \pi/2$ であった. そこで $F^1 = F(\pi/2) = K, E^1 = E(\pi/2)$ と書くことにする. フーリエ展開から $\vartheta'(0) = 0$, すなわち $\zeta(\pi/2) = 0$ ゆえ (37) に $x = \pi/2, \varphi = \pi/2$ を 代入すると

$$\zeta'(0) = \frac{4K}{\pi^2}(F^1 - E^1)$$

を得る. したがって (37) より $\zeta(x)$ は φ の関数として

$$\frac{\pi}{2}\zeta(x) = F^1E(\varphi) - E^1F(\varphi), \qquad \varphi = \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}. \tag{38}$$

と表せることが分かった.

この φ に $\psi = \mathrm{am}(2Ky/\pi)$, $\sigma = \mathrm{am}(2K(x+y)/\pi)$ をとると

$$\frac{\pi}{2}\zeta(y) = F^1E(\psi) - E^1F(\psi), \qquad \frac{\pi}{2}\zeta(x+y) = F^1E(\sigma) - E^1F(\sigma).$$

これを (34) に代入すると (32) より

$$E(\varphi)+E(\psi)-E(\sigma)=k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma \tag{39}$$

を得る．これは第２種楕円積分の加法定理である．

ここで $\zeta(x)=(\log\vartheta(x))'$，$(\pi/2)dx=(K\Delta\varphi)^{-1}d\varphi$ および (38) より $\vartheta(x)$ は

$$\vartheta(x)=\vartheta(0)\cdot\exp\left(\int_0^{\varphi}\frac{F^1E(\varphi)-E^1F(\varphi)}{F^1\Delta\varphi}d\varphi\right) \tag{40}$$

と表せる．テータ関数の第１種および第２種楕円積分による表示である．

3.2 再び (34) に戻り，この式に $y=a, y=-a$ を代入してその差をとると $\zeta(-x)=-\zeta(x)$ より

$$2\zeta(a)+\frac{d}{dx}\log\frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)}=\theta_2\theta_3\frac{\theta_1(a)}{\theta(a)}\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}\left(\frac{\theta_1(x+a)}{\theta(x+a)}+\frac{\theta_1(x-a)}{\theta(x-a)}\right)$$

を得る．そこで $\varphi=\mathrm{am}(2Kx/\pi)$，$\alpha=\mathrm{am}(2Ka/\pi)$ とすると，$(C17),(C6)$ から

$$\begin{aligned}\zeta(a)+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}&=\vartheta^2\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta(a)}\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta(a)}\cdot\frac{\vartheta_1^2(x)/\vartheta^2(x)}{1-\left(\vartheta_1^2(a)/\vartheta^2(a)\right)\left(\vartheta_1^2(x)/\vartheta^2(x)\right)}\\&=\frac{2K}{\pi}\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\cdot\frac{k^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\end{aligned} \tag{41}$$

となる．この式に $(2K/\pi)dx=(\Delta\varphi)^{-1}d\varphi$ を掛けて 0 から x まで積分すると

$$\Pi(\varphi,\alpha)=\int_0^{\varphi}\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta\alpha\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}d\varphi \tag{42}$$

は

$$\Pi(\varphi,\alpha)=x\zeta(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)} \tag{43}$$

と表される．左辺の $\Pi(\varphi,\alpha)$ は第３種楕円積分である．

(38) と $\vartheta(a\pm\pi/2)=\vartheta(a)$ に注意して

$$\Pi(\frac{\pi}{2},\alpha)=\frac{\pi}{2}\zeta(a)=F^1E(\alpha)-E^1F(\alpha).$$

よって

$$\Pi(\varphi,\alpha)-\Pi(\alpha,\varphi)=x\zeta(a)-a\zeta(x)=F(\varphi)E(\alpha)-E(\varphi)F(\alpha) \tag{44}$$

を得る．この $\varphi=\mathrm{am}(2Kx/\pi)$ に $\psi=\mathrm{am}(2Ky/\pi)$，$\sigma=\mathrm{am}(2K(x+y)/\pi)$ をとると

$$\Pi(\psi,\alpha)=y\zeta(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(y-a)}{\vartheta(y+a)},\quad \Pi(\sigma,\alpha)=(x+y)\zeta(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+y-a)}{\vartheta(x+y+a)}.$$

よって,

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\psi,\alpha)-\Pi(\sigma,\alpha)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-a)\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+a)\vartheta(x+y-a)}\right).$$

ここで $(B1)$ の後半に $z=-a$ とした式を $z=a$ とした式で割った式を使うと,第3種楕円積分に関する加法定理が得られる.すなわち

$$\Pi(\varphi,\alpha)+\Pi(\psi,\alpha)-\Pi(\sigma,\alpha)=\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\ A}{1+k^2\sin\alpha\sin\varphi\sin\ A'} \tag{45}$$

$$A=\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x+y-a),\qquad A'=\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}(x+y+a)$$
$$F(A)=F(\sigma)-F(\alpha),\qquad F(A')=F(\sigma)-F$$

である. これは $\Pi(\varphi,\alpha)$ の第1成分についての加法定理である.第2成分についても同じような加法定理が成り立つ.