もう一つの数の把握の仕方

2007 年 10 月 27 日
早稲田大学　足立恒雄

数の背景をなす概念

「数える」という行為が数概念の根底にあることは論を待たないにしても、「数とは何か」という本質論の観点からは序数や基数が数の基礎をなす唯一の概念であると見るのは疑問である。

個数　1 個、2 匹、3 人、… ⇒ 基数

大きさ　面積、体積、長さ、時間、… ⇒ 連続量

順序　1 番、第二、三日目、… ⇒ 序数

位置関係　昨日・今日・明日、2 段・初段・1 級、東・西、上・中・下、… ⇒ 数直線

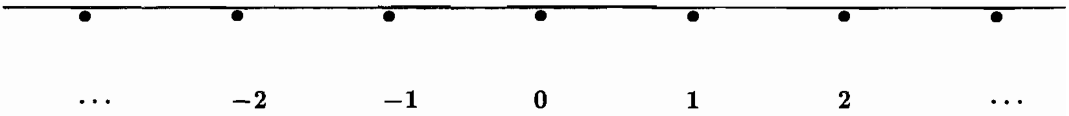
印欧語族では序数と基数とは歴然と異なった概念であるが、中華文明圏では序数と基数の区別は異なった用語を立てるほどには意識されていない（そもそも序数、基数という言葉自身が翻訳語である）。われわれが 1，2，3，4，… と声を出すとき順序を数えているのか個数を数えているのか、そんなことは意識していない。

例：10 月 26 日

数体系に関する二つの基本的立場

- 個数を基本に据える流儀
- 位置関係を基本に据える流儀

○ 1
○ ○ 2
○ ○ ○ **3**
○ ○ ○ ○ 4



ヨーロッパ数学では長年、「数は事物の個数である」というギリシア的思想と動的応用重視的思想との相克があった。

自然数への執着はギリシア文明の特徴で、そのおかげで整数論がある。他の文明では一つの分野になるほど整数論は研究されなかった。

数と量

エウクレイデスに代表されるギリシア数学の立場では、数（離散量）と量（連続量）が峻別される。

1. 数とは単位の集まったものである。(数＝ものの個数 (multitude))
2. 大きさは（連続）量である。(量＝ものの大きさ (magnitude))
3. 量は同種のものだけが比較できる。

- ギリシア数学（算術、幾何学）の基体として物体がある。
- ①によれば数とは２，３，４，… のことである。１自身は数を作り出す素材（アルケー）なので数ではない。
- 幾何学的な量のほか、時間、重さ、温度など、現在で言えば、実数で計ることのできる（と考えられる）ものはすべて連続量である。
- ただし長くヨーロッパを支配したギリシア的観念では異種の量は比較できない。たとえば面積と体積は比較できない。したがってたとえば速度と時間の比を考えることもできない。

現代数学における数の定義

現代数学もギリシア以来の伝統に従って個数主義に基づいている。たとえばクロネッカー（19世紀）による次のような自然数の定義はその代表的なものだろう。

$$\text{I, II, III, IIII, } \cdots$$

「不定元を使えば、算術とは異質な概念、たとえば代数的無理数の概念すら捨て去ることができる。負数の概念でさえも $\mathbf{-1}$ という因子の代わりに $x+1$ を法とする合同式で置き換えることができる。たとえば $\mathbf{7-9=3-5}$ は

$$7+9x \equiv 3+5x \pmod{x+1}$$

に変換できる。（中略）数学の最も深遠な研究結果は終局的には自然数の性質として単純な形に表現されなければならない。」（クロネッカー『数の概念』）

クロネッカーの「自然数だけが神が創った数である」という言葉は有名だが、カントールも「全自然数は全能の神の御許に実在してある」と書いている。こうした言葉はギリシア以来のコンテクストの中で捉える必要がある。ここには個数主義の極限の姿がドイツ精神の装いを纏って表現されていると言えるだろう。

しかし、18 世紀から 20 世紀にかけて、数学の応用を重視する立場から、自然数を特別視しない流儀も盛んになっていた。小数と座標的な考え方ををかなり早い時期から教育する、J．ペリーの提唱した主義。（小倉金之助『数学教育史』: 小倉さんは本講演の個数主義のことを「数え主義」と呼んでいる。）

基数が西洋における数観念の民族的な、根っからの見方とは言えない。

現代数学における自然数の定義

本質的にはクロネッカーと同じだが、現代数学では自然数は、もう少し洗練して、次のように定義されている（von Neuman による）:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0,1\} \\ 3 &= \{0,1,2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般に、自然数 n の次の自然数 n' を

$$n' = \{0,1,2,\cdots,n\} = n \bigcup \{n\}$$

によって定義する。

自然数が集合論の中に、とくに 0 が空集合として最初から組み込まれている点が目新しい。⇒ 0 は数であることが最終的に認知された。

歴史的な個数主義の問題点

本来、ギリシア世界では数は物質的に（すなわち物の個数として）捉えられてきた。従って負数や実数の概念を射程に入れていないので、これらを数概念に含めるのは困難がつきまとい、これらを数概念に取り込むことはヨーロッパにとって重い制約であったギリシア精神の破壊、あるいは超克を意味するのである。

ヨーロッパ精神は、ギリシア精神に比べるとき、事物の「動」的な捉え方に特徴があるのだが、数の世界にまでその思想が支配的になるのは、かなり後のことである。

1. 個数主義では負数を把握するのが困難

2. 個数主義では量の数化が困難

①について：

負数はデカルト、パスカルの時代（１７世紀後半）でも「虚構の数」、「偽りの数」、「発明された数」などと呼ばれていた。これは「数＝個数」に対する執着から生まれた制約である。

反対の方向性を負として捉えたのは西欧ではニュートン(1642-1727)が最初か？

そのニュートンにしても負軸までは考えていない。

温度計（数直線）のイメージが導入されたから負数が認められるようになったというのは認識が甘い。負数は数とみなされていなかったのである。

個数に基本を置く限り、負数を把握するのには困難があり、また負数の演算を合理的に説明するのは難しい。

②について：

ディオファントス（AD ３Ｃ頃）が最初に有理数を数として認識した。

> ディオファントスが大数学者であったかどうかは別の問題である。彼の偶発的な重要性は彼がはっきりと新しい数感情を有した最初の人であったという点にある。… ディオファントスには、とくに彼の表現形式には原始的なものがある。この原始的なものは、今まで後期ギリシア的衰退と評価されてきた。これは実は、後期ギリシア的と軽蔑された芸術に関する評価が改められつつあるのと同様に、生まれ出ようとしているアラビア文化のためらいがちな表現であると、理解され、認められるようになるだろう。（シュペングラー『西洋の没落』）

ディオファントスからアラビア世界を経て、近世の西洋では有理数、さらには $5\sqrt{2}+\sqrt{3}$ といった根号で表された数を数とみなすようになっていた。したがって、近世において連続量と呼んでいても実際に扱うのはこの種の（つまり、冪根で表された、実の）代数的無理数のことである。17世紀に数＝自然数といった考え方をするとアマチュア的とされて軽蔑の対象であった。

フェルマー(1601-1665)の整数論賛歌

> 算術の問題を出す人も、また理解する人も今ではほとんどいない。これは、現在まで算術が算術的によりは、むしろ幾何学的に扱われてきたという事実によるのだろうか。実際、古代においても現代においてもその通りである。
>
> ディオファントスでさえその例に漏れない。彼は自分の解析法を有理数の範囲に制限することによって、他の者たちよりはいくらか幾何学から開放されたといえるが、幾何学が完全に姿を消しているわけではない。そのことは、ディオファントスの方法を連続量、したがって幾何学にまで拡大した、ヴィエトの著作によって十分に証明されていることである。
>
> それゆえ算術をして、それ自身の固有の領域である整数の理論を回復せしめよ。算術の学徒をして、エウクレイデスの『原論』にかすかに触れられているが、その後十分に展開されたとは言いがたいこの領域を発展させしめよ。算術の学徒に、たどるべき道を示さんがために、次のような証明を要する命題、あるいは解かるべき問題を提示する。もしそれらを証明することや解くことに成功したなら、この種の問題が幾何学における名高い問題に比較しても、美しさにおいても、困難さにおいても、証明法

においても、決して劣るものではないことを認めるであろう。(ウォリス、ブランカーなどのイギリスの数学者に宛てた『挑戦状』より)

上の「幾何学」は文字通りの図形の学問という意味ではなく、幾何学的量を対象としていること意味する。また、したがって「算術」も代数学の意味である。

ステヴィン(1548?-1620?)の業績

小数の表現法の工夫と四則演算を明示的に解説したこと(著書『十分の一』: 1585年)がステヴィンの主要な業績のように言われているが、数の認識という意味ではさらに重要な貢献をしている。彼は従来技術者であって、数学者であるとも思想的に深い人であったとも評価されてこなかったが、その評価は改めるべきであろう。

ステヴィンは著書『算術』(1585年)において次のことを強調している。

- 「定義1. 算術は数の学問である。」 (算術=代数)
- 「定義2. 数はそれによって物の数量(quantité)が説明されるものである。」
- 「数は不連続な数量ではない。… 連続的な水が連続的な湿気に対応するように、連続量は連続数に対応する(à une continue grandeur correspond un continue nombre)。」
- 「単位は数である。」
- (各数の対等性の認識) 「ばかげた(absurd)数、不合理(irrational)な数、不規則(irregular)な数、不可解(inexplicable)な数、沈黙の(surd)数というようなものはない。」
- 一方では、a^3, a^4 等を空間図形的に解釈する試みをしている。

- 一つの底10の冪和だけで数を表現することの意味の認識は重要である。(『十分の一』)
- (数の全順序性の認識) 10進小数を駆使する技術者としての経験に裏付けられた実感であろう。分数では線形性はexplicitではない。
- 0は数ではないと考えている。線の端が点であって線分ではないように、数のアルケーは0であるから数ではないという主張に基づく。
- 負数も扱ってはいるが、ややぎこちない。
- $$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$
  を $a>b,\ c>d$ なる数の場合や長方形の面積の場合で確認して、
  $$(-b)(-d)=bd$$
  を「証明」しているが、これは当時の流儀であった。
- 後世、オイラーも同様の「証明」を与えている。

デカルトの業績

「数には二重の用法がある。というのは、数は、あるときは順序を、またあるときは尺度を述べているからである。(デカルト『精神指導の規則』第１６規則)」

ここで「順序」と言っているのは「大きさ」と整合的にするためであろう。言い換えれば、位置関係で数と量を統一するという方向性が見えているといえよう。

○	○	○	○	$\cdots$
1	2	3	4	$\cdots$

- 代数の算法（四則演算、開冪）を幾何学的に解釈した。しかし線分、あるいは（半）直線上の点、を数と見るとは述べていない。
- 「a にそれ自身を掛けたものを a^2、a^2 に a を掛けたものを a^3 と書く。これを平方（＝正方形)、立方（＝立方体）などと呼びはするが、単なる線分しか考えていないのである。」(『幾何学』)
- 0は数とみなしているが、負数については偽根 5 とか、「x が 5 という量の欠如を示すとき」というように言及している。したがって文字が負数を表すことはない。

デカルトの評価

> デカルトの決定的行為は新しい方法とか直観とかを伝統的な幾何学の領域に導入したことにあるのではなく、新しい数観念の決定的な概念形成にある。… 座標系は計量的な大きさを代表したものであるが、デカルトの考察の根底に入ってみると、デカルトはそれを完成したのではなく、それの超克である。デカルトの同時代人であるフェルマはその最後の模範的代表者であった。(シュペングラー『西洋の没落』)

デカルトは (代数に出てくるような) 幾何学的連続量をすべて線分として把握することができることを主張。⇒ 数を視覚的な大きさを持った量としてではなく位置を表す点として理解されるに至る道程の中ほどの地点にデカルトは立っている。

しかし、実際にはデカルトは離散量（数論）と連続量（幾何学）を区別している箇所も多く、数と連続量の統合と数を点とみなす考え方に関して最終的とはいえない。

また、原点を取って、それを基点にして数を表すと言うような考え方（目盛主義）を述べているとはいえない。あくまで、点から点までの距離（大きさ）を数と捉えている。従って、(数学史の本には負数を自在に扱ったようなことが書かれているが) 負数を表現する方法は与えていないと断言してよい。

数直線概念の完成

西洋における、基点（原点）を定め、直線上の点を数と考えるという数の把握の仕方、簡単に言えば、数直線という概念の導入者はだれなのか、はっきりとはわからないが、オイラー（1707-1783）なのではないだろうか。

ニュートンーライプニツ以降微積分学の豊穣な実りの収穫に忙しくて、オイラーが後半生に至って教科書を書き始める頃まで、数学者たちには数とは何かといった迂遠な問題を論じている暇がなかったのではないだろうか。

『代数学入門』(1770) の冒頭でオイラーは概略次のように述べている：

増加、あるいは減少するものは何であれ、大きさ、あるいは量と呼ばれる。数学は「量」の学問である。どんな量も同種の他の量と比較しなければ測ったり、決定したりできないから、既知の量を一つ選んで、それを「基準」あるいは「単位」として採用する。その上で、測りたい量のこの基準に対する比を決定する。この比は常に数によって表される。したがって数とは単位に対する量の比以外の何物でもない。

ここで注目されるのは、

- 数は量の比なのだから、量そのものではない。
- 整数が特別扱いされない。
- 大きさの比だから、負数の説明がむずかしい。

この後オイラーは負数の説明に進むが、古典的な負債の考え方を使う。これでは、数の説明が一貫しているとは言いがたい。

なお、この「増加、あるいは減少するものは何であれ、量と呼ばれる。数学は量の学問である」という言葉は大変有名になって、この後の時代の多くの教科書に採用され、標準となった。かくして（数学の基本である）数の見方は個数主義から量主義へと転換したと言える。（公田蔵さんの学会発表『藤澤利喜太郎と「数」と「量」』参照）

大きさ、例えば長さ、を基本とする限り負数の説明は明快性と一貫性を欠くことになる。負数までこめて説明するためには基準点を定めてそれに対する位置を数として把握しなければならない。簡単に言えば、「逆向きの大きさ」は（金銭的な例からもわかるよう）原点を定めなければ、登場できないのである。

一方、オイラーは負まで込めた座標軸を導入したことでも知られている（オイラーは知らなかったと思われるが、ニュートンが 3 次曲線の分類を試みた手稿の中で負の軸を使っているのが最初ではあろうが、この論文は公刊されなかった)。『無限解析入門』(1748) の冒頭で数直線が次のように説明されている：

直線の一部分 AP が定量を表す。… 直線は双方向に限りなく延びているので、正負の数が表現できる。

おそらくはこれが座標を説明した最初の文献であろう。同時に、数直線を明確に説明した最初の文献ということになる。

デカルトは (代数に出てくるような) 幾何学的連続量をすべて線分として把握することができることを主張。⇒ 数を視覚的な大きさを持った量としてではなく位置を表す点として理解されるに至る道程の中ほどの地点にデカルトは立っている。

実際にはデカルトは離散量（数論）と連続量（幾何学）を区別している箇所も多く、数と連続量の統合と数を点とみなす考え方に関して最終的とはいえない。

東洋、とくにインドにおける数概念

- ギリシアのように自然数を特別視する思想はない。 ⇒ 整数論は発達しなかった。
- 数と量との区別もない。
- 無理、有理というような数の概念的区分がない。ただし、円周率と直径の通約不能性は認識されていた。(『アールヤバティーヤ』(1510年))
- 負数に対する違和感も最初からない。知られる限り古くから、正負の概念があった。
- 中国では最初から10進法だった。 ⇒ 小数の概念が導入しやすい。

中国・日本では前後関係で小数点の位置を判断する。(小数点の持っている威力を観察すること。)

ブラーマグプタ（7 C）　負数を含む演算の規則を与えた。

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$$

注釈者クリシュナ（16世紀）による解説

クリシュナはバースカラII世（12世紀）の『リーラーヴァーティー』、『ビージャガニタ』に対する注釈書を刊行した。(林隆夫氏が翻訳中。)

- 「数には物体性、時間性、位置性の三種類がある。」
- 「東西の場所のうち一方が正数性を持つと考えれば、他方は負数性を持つ。」(他にも、南北、上下、前後、財産と負債などの例を挙げて負数の意味を説明している。)
- 直線上の一方向を正とすれば、反対方向が負である。数aに正の数bを掛けるとはaにaと同じ方向にbの分だけ倍して進めることである。負の数−bを掛けるとはaとは反対方向にbの分だけ倍して進めることである。

「負数と負数の積が正数となることは牛飼いでも知っている」とクリシュナは述べている。ヨーロッパ世界の負数との悪戦苦闘ぶりを比較するとき、この言葉は鮮烈な驚きを与えないであろうか。

正しいとか正しくないとか、優れているとか劣っているとかいった問題ではなく、「その文明の公理系」とでもいったものによって人間の思考が無意識のうちにどんなに呪縛され制限されているかという事実が明らかになる。(文明の相対性)

1次元連続体—定義

目標：1次元連続体を、数体系を仮定しないで定義し、実数体の構造を与える。数直線をイメージする。

順序集合Xが1次元連続体であるとは、Xが次の性質を持つことを言う：

1. 全順序性

2. 連続性

3. 可分性

4. 非有界性

問題点：この X に実数体の構造を与えるにはあらかじめ存在している実数体 $\mathbb{R}$ を手本にしなければならない。現在のすべての数学は実数体、あるいはその元になる自然数の存在が大前提となって構成されている。

数直線の定義

数体系を位置主義に基づいて公理化することを考える。

公理１． 全順序性
公理２． 連続性
公理３． スライド写像の存在： X の任意に固定された点 0 に対して順序自己同型（順序を保つ全単射） $f: X \to X$ で

$$0 < f(0)$$

を満たすものが存在する。

この公理を使って整数が定義され、次いで整数の間に和と積が定義される。整数の全体のなす集合 $\mathbb{Z}$ は可換環をなす。たとえば、

定義 0 は整数である。
k を整数とすれば、 $f(k)$, $f^*(k)$ も整数である。
$n^+ = f(n)$ （n の次の整数）， $n^- = f^*(n)$ （n の前の整数）
$m + n^+ = (m+n)^+$, $m + n^- = (m+n)^-$

などなど。

公理４． 2 倍写像の存在： 順序自己同型 $g: X \to X$ ですべての整数 n に対して

$$g(n) = 2 \cdot n$$

を満たすものが存在する。

この公理を使って有限小数とその演算が定義できる。X の $2^{-n} \cdot m$ $(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z})$ の形の元を有限（2 進）小数という。有限小数の間に和と積が定義でき、その全体は可換環をなす。

公理５． （アルキメデスの公理）X の任意の元 $\alpha(>0)$ に対して $2^n \cdot \alpha$ は上に有界ではない。

定理

$$\lim_{n \to \infty} \alpha / 2^n = 0$$

以上の5公理を満たす集合Xは1次元連続体である。1次元連続体Xの元は（無限2進）小数の形に展開され、逆に（無限2進）小数はXにおいて収束する。無限小数の間に和と積が定義され、Xは体をなす。これが実数体である。

「数学は芸術である」（シュペングラー）

単純な概念は、いつも非常にむずかしいものである。それらは、言葉で言い表しえないというばかりではなく、言葉にする必要もない大量のことから成り立っていて、その仲間の人間には、直観の中に植え付けられているのであるが、外部の人間には、事実上 (ipso facto) まったく近付けないからむずかしいのである。

そのような、単純にして、同時にむずかしい概念として、西洋においてとりわけ独特な内容を持つ「空間」という語が挙げられる。デカルト以来の全数学は、すべて、この偉大にしてまったく宗教的な象徴を、理論的に解釈することに捧げられて来た。ガリレオ以来われらの物理学の目指すところも同じことである。ギリシア・ローマの数学と物理学においては、この語（空間）の意味内容は単に「知られていなかった」のである。

ここでもまたわれわれがギリシア人の遺産から受け継いで使っている、古典的な名前が事実を覆い隠している。（ギリシアにおいては）幾何学とは（空間に在る物体を）測る術であり、算術とは数える術である。西洋の数学は、この二つの事柄とは何の関係もなくなって久しいのに、それ自身のために新しい名前を宛てなかったのである。—そのためには「解析」という言葉は、どうしようもないほど、不適切である。(『西洋の没落』)