Borel-Weil-Bott 理論小史
(杉浦光夫先生の傘寿を祝って)

名城大学理工学部
数学教室　岡本清郷

杉浦光夫先生には博士論文の指導をして頂きました。改めて，感謝の意を表します。

記号や「Borel-Weil-Bott の定理」の説明は後回しにして，ここでは，Borel-Weil-Bott 理論の発展の一つの方向を私的な立場から述べ，非コンパクト群への拡張の際出会った多くの数学者についての思い出話を語りたいと思います。

1　Borel-Weil-Bott の定理の証明法の歴史とその発展

コンパクト半単純リー群に対する「Borel-Weil-Bott の定理の証明」には手法の異なる次のような三つの方法が得られている。

【1957 年】 R. Bott は「Homogeneous vector bundles」において，コホモロジーのスペクトル系列を使った方法を用いて証明した。

【1961 年】 B. Kostant は「Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem」において，リー環のコホモロジーを使った方法を用いて証明した。

【1968 年】 M. F. Atiyah and R. Bott は「A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, II Applications」において，レフシェッツの不動点定理を応用した方法を用いて証明した。

Bott は位相幾何，Kostant は代数（リー環論），Atiyah-Bott は位相幾何に関数解析的手法を取り入れた証明法である。Borel-Weil-Bott の定理を非コンパクト群へ拡張するという問題意識を持ち，上記三つの方法を順に調べてみた。Bott および Kostant の方法はコンパクトの場合と非コンパクトの場合とでは大きな差があり，うまく行かなかった。Atiyah-Bott の方法の第一段階では有限次元のベクトル空間の同値類に直和で半群を定義し，グロータンディーク群を考えることにより加群に拡張し，表現の指標の交代和を考

える。非コンパクト半単純リー群の表現論では無限次元ベクトル空間上の表現を極大コンパクト群に制限することにより有限次元のベクトル空間の問題に帰着するという方法が取られる。Atiyah-Bott の方法の第二段階ではこの常識を破り，逆に有限次元から無限次元のベクトル空間に移行して考える。このとき表現の指標（トレース）は発散する。そこでトレースクラスの作用素で近似するのである。この近似のために小竹-Narashimhan によるラプラシアンの複素べきが用いられる。それはラプラシアン作用素と可換なトレースクラスの作用素で近似する必要があるからである。

《非コンパクト群への拡張》

【1965 年】 B. Kostant は京都で行われた微分幾何の国際会議（松島先生が組織委員長）で次の予想を発表した。

『一般にリー群の既約表現は等質ベクトル束値コホモロジー空間で構成できるであろう』

これはその後，リー群の表現の構成法における指導原理とされ，「Kostant の Big Picture」と呼ばれている。

非コンパクトエルミート対称空間上の等質正則ベクトル束を $\boldsymbol{E}$ とするとき，空間がシュタイン多様体であるため，通常の $\boldsymbol{E}$ 値 $\bar{\partial}$ コホモロジー空間は 0 次以外はゼロとなる。

【1965 年】 L. Hörmander は「L^2 estimates and existence theorems for $\bar{\partial}$ operator」において，$\bar{\partial}$ 作用素の自乗可積分評価について論じた。我々はこれを考察し，自乗可積分 $\bar{\partial}$ コホモロジー空間の概念を得た。

【1967 年】 尾関氏との共同研究「On square-integrable $\bar{\partial}$-cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces」において，自乗可積分 $\bar{\partial}$ コホモロジー空間の定義とラプラシアンのカシミール作用素による表示，更にそれらを使ったコホモロジー空間の非消滅定理を与えた。$(0,q)$ 型の自乗可積分 $\bar{\partial}$ コホモロジー空間は，Dolbeault の方法をそのまま実行することにより，自乗可積分調和形式の空間 $\boldsymbol{H}_2^{0,q}(\boldsymbol{E})$ と同型となることが証明できる．

更に，$\boldsymbol{H}_2^{0,0}(\boldsymbol{E})$ は自乗可積分な正則切断全体であり，Harish-Chandra による正則離散系列の表現の構成と一致する．

【1967 年】～【1969 年】 （プリンストン研究所に滞在）

A. Borel，A. Weil，Harish-Chandra が研究所の教授で M. Atiyah が研究所の教授になる予定で来ていた。宿舎の斜向いには一年目は Palais，二年目は

Hörmander の家族が住んでいました。

プリンストン研究所滞在中に Narasimhan と次の結果を得ました。Narasimhan はプリンストン研究所に来る前にタータ研究所におけるセミナーで上記 Atiyah-Bott の論文を紹介した由でした。

【1970 年】M. S. Narasimhan and K. Okamoto「An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type」

この成果を得た経緯を思い出話を織り交ぜながら話したいと思います。

大阪大学理学部数学教室の助手になった頃，松島与三先生が主任で佐藤幹夫，志村五郎，村上信吾，中岡稔，池田信行，杉浦光夫，尾関英樹，本田平その他多くの優秀な先生方が在籍され，公私共々いろいろご指導して頂きました。また，土井公二，金行壮二，今野秀二，熊ノ郷準の諸氏が殆ど同時に助手に採用され，大いに影響を受けました。因みに小生のプリンストン滞在一年目に熊ノ郷氏はコロンビヤ大学に滞在，二年目に土井氏がプリンストン研究所に来られケネディ空港まで車で迎えに行きました。また，プリンストンへ行くとき，飛田武幸先生に飛行機の中で初めてお会いし，飛田先生にはプリンストンで大変お世話になりました。

プリンストン研究所における初めてのティーミーティングの際，志村先生が Weil に紹介して下さり，(Weil は私にとって神様のような存在でしたので）緊張しながら「Borel-Weil-Bott の定理を非コンパクトの場合に拡張する問題を考えている」と夢中で話しました。途中煩く口を挟んでくる人がいましたが，僕は Weil しか見ていませんでした。ティーの時間が終わり，横から口を挟んできた人が「俺の研究室でもっと詳しく話をしてくれ」というので付いて行きましたらそれが Borel でした。

Atiyah にいろいろ質問しましたら「お前は一次元のとき考えてみたのか」と言われ，Atiyah が一次元という自明と思われる場合も考えることに吃驚し，その後数学研究では具体例を詳しく調べるようになりました。

数学で或る論文の内容を理解するには直接著者に会って聞くのが最善ですが，Gauss に会って聞くのは不可能ですから，その意味で数学史の研究が重要になると思います。

さて，翌年の春になっても研究はなかなか進まず，岡潔先生が多変数関数論の三大問題をどの様にして解かれたかを詳しく述べられた「春宵十話」を思い出して，大阪大学の友人に僕の研究室にあるので送って欲しいと，頼

みましたところ「今あなたの研究室は学生が占拠していて入れないので代わりに同じ内容の本を送ります」という手紙を添えて「紫の火花」を送ってくれました。早速，本にある通り実行してみましたが夏休みの終わりになっても結果が出ませんでした。丁度その頃，岩沢健吉先生が昼食に招いて下さったとき，この話をし「漢字は違いますが上の一字づつを取ると”オカキヨシ”になります。しかし，自分が岡潔でないことを悟らされました」と言いましたら大笑いされました。そうこうする中に新しいメンバーが次々にやってきました。その中にNarasimhanがいた訳です。彼は最初の自己紹介でNarasimhanという数学者は二人いて，一人は偉大な数学者でもう一人はただの数学者で俺はただの方だと言いました。そのとき英語を理解するのが精一杯でジョークとは知らず「じゃー僕の研究室へ来てくれ，今考えている問題を説明するから」というやり取りから二人の共同研究が始まりました。やがて，Harish-Chandraが避暑地から帰ってきて「ついに長年研究してきたPlancherelの定理が証明できた」とエキサイトして話し，早速講義が始まりました。クリスマス直前の講義が休講になり，Harish-Chandraは正月明けにハート・アタックで入院しました。奥さんの話では証明に欠陥があり，クリスマスから新年にかけて研究に没頭されていたとのことでした。天才が天才たる由縁を知り感動しました。

Narasimhanとは会って以来毎日朝から晩までディスカッションを続けましたが，クリスマス直前になり，Narasimhanは「翌年日本で開かれる関数解析の国際会議の招待講演者になっていて，本年中にアブストラクトを送らなければならないのに，我々の問題が頭にこびり付いて離れない」と悲鳴を上げました。そこで，少し休暇を取ろうと話し合っていた時，突然アイディアが浮かびました。Harish-Chandraの講義に出てきた離散部分への射影を使えばよいことが分かったのです。

2 ポアッソン積分の一般化とHelgason予想

Borel-Weil-Bottの定理はラプラシアンのゼロ固有値に属する固有ベクトルの空間で表現を構成するのであるが，ラプラシアンのスペクトル分解の立場に立てば，一般の固有値に属する固有ベクトルの空間における表現を調べる必要がある。Helgasonは単位円盤上のポアンカレ計量に関するラプ

ラシアンの任意の固有値に属する任意の固有関数は単位円上の解析的汎関数の拡張されたポアッソン積分により一意的に表わされることを証明した。「これは一般の対称空間に拡張できるであろう」という主張をヘルガッソン予想と呼ぶ。ヘルガッソン予想は解析的汎関数を用いて定式化されたが，佐藤超関数による定式化の方がより自然である。私は助手や大学院生と一緒に京都大学数理解析研究所の佐藤先生の研究室に日参し，佐藤超関数の考え方を佐藤先生から直接教わり，その概念の深さに感動しました。

【1971年】 メリーランド大学での国際会議における講演「Harmonic analysis on homogeneous vector bundles」において，一般に，旗多様体上の等質ベクトル束の切断の空間から対称空間上の等質ベクトル束の切断の空間への写像を「群の不変性を保つ最も自然で単純な積分作用素」を考えることにより構成し，ポアッソン積分の拡張を得た。

【1972年】 橋爪道彦氏，木幡篤孝氏，峰村勝弘氏と共著「An integral representaion of an eigenfunction of the Laplacian on the Euclidean space」において，ユークッリド空間におけるヘルガッソン予想の類似を証明した。

【1977年】 平岡賢治氏，松本修一氏と共著「Eigenfunctions of the Laplacian on a real hyperboloid of one Sheet」において，リーマン対称空間でないアフィン対称空間である実一葉双曲面上のラプラシァンの固有関数について，リー群の表現論を用いヘルガッソン予想を解いた。

【1978年】 柏原正樹氏，木幡篤孝氏，峰村勝弘氏，大島利雄氏，田中誠氏と共著「Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space」において，「リーマン対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数はマルチン境界上の佐藤超関数のポアッソン積分で表される」という形でヘルガッソン予想を肯定的に解決した。

3　ファイマン経路積分による表現の構成

ファイマン経路積分は相空間上のハミルトン関数を量子化する手法である。リー群の余随伴軌道はリー群の作用で不変なシンプレクティック構造を持ち，リー環の元はその上のハミルトン関数とみなされる。リー環の元のファイマン経路積分は微分作用素を exp で持ち上げたものであり，リー群の表現が自然に得られることが分かった。

【1991年】橋本隆司氏，小椋一徳氏，沢江隆一氏，安永寿敏氏と共著「Kirillov-Kostant theory and Feynman path integrals on coadjoint orbits I」において，キリロフ-コスタント理論によるリー群のユニタリ表現をリー群の余随伴表現上のファイマン経路積分により構成した。
【1993年】 橋本隆司氏，小椋一徳氏，沢江隆一氏と共著「Borel-Weil theory and Feynman path integrals on flag manifolds」において，ボレル-ヴェイユ理論で得られるリー群の表現のファイマン経路積分による構成について，コヒーレント表現を使うことにより実現した。
【1995年】 タータ研究所における国際会議の講演「The Borel-Weil theorem and the Feynman path integral」において，ボレル-ヴェイユ理論で得られるリー群の表現のファイマン経路積分による構成を与えた。

4　古典領域におけるポアッソン-コーシー積分

メリーランド大学での国際会議では一般にベクトル束値ポアッソン積分の概念を定式化したが，ヘルガッソン予想をこの場合に一般化する問題は殆ど解決されていない。その際の問題点を調べるため古典領域の場合に具体的に調べてみた結果，ベクトル束値の場合における興味ある事実がいろいろ分かってきた。
【2000年】 塚本道郎，横田茂昭氏との共著「Generalized Poisson and Cauchy kernel functions on classical domains」において，Huaによって得られた古典領域上のポアッソン積分の核関数を拡張した概念を与え，これは単にポアッソン積分のみならずコーシー積分の核関数も含むことを示した。
【2000年】 塚本道郎，横田茂昭氏との共著「Vector bundle valued Poisson and Cauchy kernel functions on classical domains」において，古典領域上のポアッソン積分の核関数を拡張した概念を与え，さらにこれらをベクトル束値の場合に拡張した。
【2006年】 今村栄介，塚本道郎，山盛厚伺氏との共同研究「Generalized Laplacians for Generalized Poisson-Cauchy transforms on classical domains」において，エルミート対称空間上の直線束値ラプラシアンの定義とその固有値を決定した。
【2007年】 今村栄介，塚本道郎，山盛厚伺氏との共同研究「エルミート対

称空間上のポアッソン-コーシー積分およびラプラス・ベルトラミ作用素の一般化について」において，エルミート対称空間上のベクトル束値ラプラシアンの定義とその固有値の具体的な値を求めた。

近年，ポアッソン変換に関する論文が数多く発表され，2000年に「Mathematics Subject Classification」に「Poisson transform」が追加される程に至っているが，殆どの論文ではベクトル束の場合でも P の表現は M の表現，A の指標および N の自明な表現をテンソル積した場合しか扱われていない。

我々のポアッソン-コーシー変換は「Harish-Chandra 分解」から自然に得られる同伴ベクトル束を用いて定義したものであり，各型の古典領域について，**I** 型の $n=m$ の場合，**II** 型および **III** 型の場合以外つまり **I** 型の $n>m$ の場合，および **IV** 型の場合は，N への制限が自明でない P の表現に対するポアッソン-コーシー変換を与え，その像は一般にはラプラシアンの固有関数にならない。このとき，ポアッソン-コーシー変換の定義域は可約な不変部分空間を持ち，そのポアッソン-コーシー変換の像はラプラシアンの固有関数になる。

これらの事実は新しいポアッソン変換の研究の一つの指針を示唆していると信ずる。

更に，歴史は将来に続く。

5 Cartan-Weyl 理論

G : 連結かつ単連結な半単純コンパクトリー群，

T : G の極大トーラス部分群，

$\mathfrak{g}$: G のリー環，

$\mathfrak{t}$: T のリー環，

Gc : G の複素化，

$\mathfrak{g}_c$: $\mathfrak{g}$ の複素化，

$\mathfrak{t}_c$: $\mathfrak{t}$ の複素化，

Λ : 整形式全体，

Δ_+ : 正のルート全体，

ρ : 正のルート全体の和の半分

と定義すると

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{t}_c + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{（ルート空間分解）}$$

が成り立つ。

任意の $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$D(\exp H) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} (\mathrm{e}^{\frac{\alpha(H)}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-\alpha(H)}{2}})$$

と定義する。W を Weyl 群とし，W の位数を $\#W$ で表すとき，次の積分公式が成り立つ。

（ Weyl の積分公式 ）

$$\int_G f(g)\, dg \ = \ \frac{1}{\#W} \int_T |D(h)|^2 dh \int_G f(ghg^{-1}) dg. \quad (f \in C^\infty(G)).$$

ここに，dg, dh はそれぞれ G, T の正規化されたハール測度である。

G は連結かつ単連結な半単純コンパクトリー群であるから，G の既約表現の微分表現は G のリー環 $\mathfrak{g}$ の既約表現であり，$\mathfrak{g}$ の任意の既約表現に対してそれを微分表現とする G の既約表現が存在する。

（ Cartan-Weyl の定理 ）

（１） $\mathfrak{g}$ の既約表現は最高ウェイトにより決定される。即ち，最高ウェイトが一致する二つの既約表現は同値である。

（２） $\mathfrak{g}$ の既約表現の最高ウェイトはドミナントな整形式であり，任意のドミナントな整形式 λ に対して λ を最高ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の既約表現が存在する。

（３） λ を最高ウェイトとする G の既約表現の指標を χ_λ とするとき次の指標公式が成り立つ。

$$\chi_\lambda(\exp H) = \frac{\sum_{w\in W} sgn(w)\mathrm{e}^{w(\lambda+\rho)(H)}}{D(\exp H)} \quad (H \in \mathfrak{t}). \qquad \text{(Weyl の指標公式)}$$

6 Borel-Weil の定理

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha\,,\quad \mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

と置くと，$\mathfrak{n}_-$ の双対空間 $\mathfrak{n}_-^*$ は Killing 形式により $\mathfrak{n}_+$ と同一視される。$\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{t}_c$ をリー環とする連結複素リー群をそれぞれ N_+, N_-, T_c で表す。

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}_c + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha},\quad B = N_- T_c$$

と置くとき，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}_c$ のボレル部分環であり，B は G_c のボレル部分群である。

$\lambda\in\Lambda$ を一つ固定し，B の正則な指標

$$\xi_\lambda : B = N_- T_c \ni n\exp H \longrightarrow \mathrm{e}^{\lambda(H)} \in C^*$$

に同伴する G_c/B 上の正則直線束を $\boldsymbol{L}_\lambda$ で表す。

$\boldsymbol{L}_\lambda$ の正則な切断の全体のなすベクトル空間を $\Gamma(G_c/B, \boldsymbol{L}_\lambda)$ で表し，G の自然な作用により得られる G の $\Gamma(G_c/B, \boldsymbol{L}_\lambda)$ 上の表現を π_λ とするとき次の定理が成り立つ。

（ **Borel-Weil の定理** ）

（1） λ がドミナントでないとき，$\Gamma(G_c/B, \boldsymbol{L}_\lambda) = \{0\}$。

（2） λ がドミナントのとき，π_λ は λ を最高ウェイトとする既約表現である。

（3） G のすべての既約表現は或るドミナント整形式 λ が存在して，$\Gamma(G_c/B, \boldsymbol{L}_\lambda)$ 上で実現される。

7 Borel-Weil-Bott の定理

G_c/B の複素次元を n とし，q は $0 \leqq q \leqq n$ を満たす整数とする。直線束 $\boldsymbol{L}_\lambda$ の正則な局所切断の芽の層を $\mathcal{F}_\lambda$ とし，G_c/B 上の層 $\mathcal{F}_\lambda$ 係数の q 次コホモロジー空間を $H^q(G_c/B, \mathcal{F}_\lambda)$ で表す。G の自然な作用により，$H^q(G_c/B, \mathcal{F}_\lambda)$ は G の表現空間になる。この表現を π_λ^q とするとき次の定理が成り立つ。

(Borel-Weil-Bott の定理)

$<\lambda+\rho,\alpha> < 0$ を満たす $\alpha\in\Delta_+$ の個数を q_λ とするとき，次が成り立つ。

（１） $\lambda+\rho$ が非正則元のとき，$H^q(G_c/B,\mathcal{F}_\lambda) = \{0\}$。

（２） $q \neq q_\lambda$ のとき，$H^q(G_c/B,\mathcal{F}_\lambda) = \{0\}$。

（３） $\lambda+\rho$ が正則元のとき，$\pi_\lambda^{q_\lambda}$ は λ_0 を最高ウェイトとする既約表現である。但し，λ_0 はワイル群の或る元 w に対して，$\lambda_0 = w(\lambda+\rho)-\rho$ がドミナントとなる元とする。

従って，任意の q $(0 \leqq q \leqq n)$ に対し，G のすべての既約表現は $q = q_\lambda$ を満たす或る整形式 λ が存在して，q 次のコホモロジー空間 $H^q(G_c/B,\mathcal{F}_\lambda)$ 上で実現される。

（注）$H^0(G_c/B,\mathcal{F}_\lambda) = \Gamma(G_c/B,\boldsymbol{L}_\lambda)$ であるから，Borel-Weil-Bott の定理は Borel-Weil の定理の拡張である。