オイラー積分とガウス（続）

杉本 敏夫

§２０． バーゼル問題

バーゼルのヤコブ・ベルヌイ(1654-1705)

[14] Jakob Bernouilli : Positionum de seriebus infinitis, in Die Werke von Jakob Bernouilli, Birkhäuser, 1993.

が、その解決を後世に託した逆平方数の級数の和

$$Q=1/1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots$$

を求める主題は、世に「バーゼル問題」と呼ばれる。若いオイラーが解決し、論文

[15] E41, Leonhard Euler : De summis serierum reciprocarum, Com. acad. scient. Petrpol., 6. (1734/5), 1740.

に於いて、その値が $Q=\pi^2/6=1.644934\cdots$ なることを突き止めた。オイラーの論文には、Ｅで始まるエネストレーム番号が付され、発表年（括弧付つき）と印刷年が併記される。オイラーは本質的に異なる四つの証明を与えた内、よく知られているのは上記の第三証明である。正弦級数の因数分解と代数方程式の根と係数の関係を用い、単にＱの数値を精密化したのみならず、Ｑの素性が $\pi^2/6$ に等しい、と言う予想外の結果を得た。現在、

［９］ 無限解析学序説第Ｉ巻（発売名は異なる)、高瀬正仁訳、2001, 海鳴社。

の中で読むことが出来る。

私のオイラー研究の内容は今回の報告から切り離し、この夏、京大数理研で

[16] 杉本敏夫：バーゼル問題とオイラー、「数学史の研究」集会 (2007.8.23)。

として発表した。「研究集録」に印刷される予定。

オイラーはこれらの研究を発展させ、後にオイラー積分と呼ばれる一連の定積分を考察した。それを前回報告した。彼は、それらの定積分の内、後のベータ関数やガンマ関数に相当する値を考察し、様々な階乗の

間の関係から両関数を結ぶ関係式に到達した、と私は考える。前回の報告に引き続き、これ等オイラーの研究が如何にガウスに引き継がれたかを検討する。ただし残念ながらミシング・リンクが一つ残るが、私の到達した段階を有りのまま報告したい。

§21.　論文へのガウスの反応

ガウスがオイラーの論文を精読した証拠がある。オイラーの第一証明は

[17] E20, Leonhard Euler : De summatione innumerabilium progressionum, Com. acad. scient. Petrpol., 5. (1730/1), 1738.

にあるように、$\int -y^{-1}dy\ l(1-y)$ ($y=0$ から $y=1$ まで) を巧妙にも二通りに変形する。オイラーもガウスも双曲線対数 log.hyp. を l 一文字で表す。彼らの時代の上記の定積分は、今日の書式では $\int_0^1 (-y^{-1}) \log(1-y)dy$ と表される。ガウスは[8]ライステ 38頁に、

$$\int \frac{dx}{x} l \frac{1}{1-x} = lx \,.\, l \frac{1}{1-x} - \int \frac{dx}{1-x} lx$$

$$\varphi x + \phi(1-x) = lx \,.\, l\,1-x + \frac{\pi\pi}{6}$$

$$\int \frac{dx}{x} l(1-x) = \int \frac{dy}{y} ly - \int \frac{\partial y}{y} l(1-y)$$

$$\Phi x + \varphi \frac{1}{x} = \frac{(lx)^2}{2} + \frac{\pi\pi}{3}$$

と記入した。1行目の左辺は変数 y を x に変えればオイラーの元の式であり、右辺は部分積分公式による変形に過ぎない。2行目の $\phi(x)$ は1行目の左辺である。$\phi(x)$ と $\phi(1-x)$ の和が右辺のように $\pi^2/6$ を含む和になることは、オイラーが第一証明で示した（[16]京大発表の当該箇所を参照）。3行目と4行目はガウス自身の変形である。

§22.　逆平方数級数とガウス

前回§19 で、ガウスの気質は《丹念な数値計算》にあると述べた。彼は[8]ライステの扉の前頁([1] 2003年の報告ではC頁と呼んだ）に、逆平方数の級数の和Qを、飛び飛びの項の和に分割して記入した。横線はガウス自身の記入。[c], [1], [2], … は引用のための私の補足である。この記述では彼が求めた数値の精度は低い。

$$[c] \quad 1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}\cdots\cdots = 0.916$$

$$[1] \quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\cdots\cdots = \frac{\pi\pi}{6} = 1,6$$

$$[2] \quad 1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}\cdots\cdots = \frac{\pi\pi}{8} = 1,2$$

$$[3] \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}\cdots\cdots = \frac{\pi\pi}{24} = 0,4$$

$$[4] \quad 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{49}+\frac{1}{100}\cdots\cdots =$$

$$[5] \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{64}+\frac{1}{121}\cdots\cdots =$$

$$[6] \quad \frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{81}+\frac{1}{144}\cdots\cdots = \frac{\pi\pi}{54} = 0.18$$

$$[7] \quad 1+\frac{1}{25}+\frac{1}{81}+\frac{1}{169}\cdots\cdots = 1,074833$$

$$[8] \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{100}+\frac{1}{196}\cdots\cdots = \frac{1}{32}\pi\pi$$

$$[9] \quad \frac{1}{9}+\frac{1}{49}+\frac{1}{121}+\frac{1}{225}\cdots = 0,15886\cdots$$

$$[10] \quad \frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{144}+\frac{1}{256}\cdots = \frac{1}{96}\pi\pi$$

[1]が原級数（逆平方数の級数）である。[2] は分母が奇数の自乗の級数、[3] は分母が偶数の自乗の級数、[4]～[6] は分母が $3n+1$, $3n+2$, $3n+3$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) の自乗の級数、[7]～[10] は分母が $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, $4n+4$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) の自乗の級数である。相互の関係は次を見よ。[c] はカタランの定数(＝0.915965594…)と呼ばれ、[7]－[9] に等しい。カタラン(E. C. Catalan, 1814-94) は「括弧によるくくり方」や幾何学の研究で知られる。本シンポジウムの清水達雄氏の研究を参照した。この時期のガウスはカタランを知らない。

[2]＝1.23370055
[3]＝0.41123352
[2]＋[3]＝1.64493407＝[1]

[4]＝1.12173301
[5]＝0.34043060
[6]＝0.18277045＝[1]/9
[4]＋[5]＋[6]＝1.64493407＝[1]

[7]＝1.07483307
[9]＝0.15886747
[7]＋[9]＝1.23370055＝[2]＝3[1]/4

[8]＝0.30842514
[10]＝0.10280838
[8]＋[10]＝0.41123352＝[3]＝[1]/4

[7]＝1.07483307
－) [9]＝0.15886747
[7]－[9]＝0.91596559＝[c]

この級数群を如何に考えるか？　私は単純に、ガウスのオイラーに対する反応に過ぎず、 孤立した内容と考える。原級数 [1] を二分割、

三分割、四分割した趣向は面白いが、しかし、後の研究に結び付いたとは考えにくい。

§23. 階乗とガウス

オイラーやガウスにとって階乗を含む公式の発想の元になったのは、ウォリスの研究

[18] John Wallis : Arithmetica infinitorum, Cambridge, 1656.

であろう、という考えを、[16]京大発表の際に述べた。彼は0から1までの定積分 $\square = \int dx\,(1-xx)^{1/2}$ を苦心して求め（実はその値は$\pi/4$に等しい）、有名なウォリスの公式

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\cdots\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot12\cdot14}\sqrt{1\frac{1}{13}} > \frac{1}{\square} > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\cdots\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot12\cdot14}\sqrt{1\frac{1}{14}}$$

を導いた。オイラーもガウスも、階乗を含む表現から多大の影響を受けただろうと言うのが私の推測である。ガウスが階乗関数 $x!$ 若しくは

$$\Pi x = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \cdots\ .\ k\ .\ k^x}{x+1\ .\ x+2\ .\ x+3\ .\ \cdots\ .\ x+k}$$

を主題とする「超幾何関数」の論文

[19] C. F. Gauss : Disquisitiones generales circa seriem infinitam ⋯ Pars prima, Comm. soc. reg. scient. Gottingensis rec., vol II. in Gauss'sche Werke, III Bd.

を書いたのは、ずっと後の 1812年である。いま私たちが追跡している1797年1月～3月に於けるガウスはオイラーの重力下を逃れていない。階乗関数 $x!$ に関しては、孤立した記述しか見出せない。

[8] ライステ14頁

Ich bezeichne $x\,.\,x-1\,.\,x-2 \cdots\cdots x-n$ mit $[n]$

$$\frac{d[n]}{dx} = \frac{\quad}{n+1}\left([n-1] + \frac{n}{2}[n-2] + \frac{n\,.\,n-1}{3}[n-3]\cdots\cdots\right)$$

$$\int [n]\,dx = \frac{[n+1]}{n+2}$$

Ich bezeichne x. x-1. ⋯ x-n mit [n]. [私は x. x-1. ⋯ x-n を [n] で表す。]

及び

[8] ライステC頁

$$\int x\,\partial x = \frac{1}{2}\overline{x, x-1} + \frac{1}{2}x$$

$$\int x, x-1, \partial x = \frac{1}{3}\overline{x, x-1, x-2} + \frac{1}{2}\,x, x-1 - \frac{1}{6}x$$

$$= \frac{1}{4}\overline{x, x-1, x-2, x-3} + \frac{1}{2}\overline{x, x-1, x-2} - \frac{1}{4}\overline{x, x-1} + \frac{1}{4}x$$

の二つの記入である。オイラーは後述の論文 [20] E421 で、$t=0$ から $t=1$ までの積分

$$\int dt[(\ell(1/t)]^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$$

を [n] で表した。$1>x-n=\varepsilon>0$ と置けば、x から始まる階乗は

$$[x]=x[x-1]=x(x-1)[x-2]= \cdots =x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)[\varepsilon]$$

である。ガウスのライステ 14頁の定義は、これとは少し違う。[n] の微分と積分は、彼の書いた記号に沿う限りでは正しい。ライステC頁の一行目と二行目は正しい。三～四行目は左辺に

$$\int x, x-1, x-2, \partial x$$

を補えば正しい。

ガウスは、オイラーから一般的な階乗関数を学んだか？　私は、どうも1797年１～３月の、しかも後の§３０で引用する[2]日記第 59 項よりも以前には学ばなかったように思う。このライステの記事は、ガウスの独自な研究と言うことになる。

§２４．　二つのオイラー積分

第二種オイラー積分もガンマ関数も後世の名称である。前回§５で紹介した[11]『積分計算教程』第Ⅰ巻、第４章「対数ト指数関数ヲ含ム積分」の中に X ガ x ノ代数式ヲ表ス時、微分 $Xdx\,\ell x$ ノ積分ヲ見付ケル事、で、

$$\int x^n dx\,lx = (1/n)x^{n+1}[lx-1/(n+1)]$$

及び

$$\int [dx/(1-x)]\,lx =$$

$$l[1/(1-x)]\cdot lx - x - (1/4)x^2 - (1/9)x^3 - (1/16)x^4 - (1/25)x^5 - \cdots$$

が出る。後者はバーゼル問題についてオイラーが、[17]第一証明（E20,

1738)で用いた基本公式である。特に今回の報告との関係に於いて重要なのは、階乗との関係を含む

$$\int x^{m-1}dx(lx)^{n}=\pm 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\ /\ m^{n+1}$$

($x=0$ から $x=1$ まで)

$$(*1)\qquad \int x^{m-1}dx[l(1/x)]^{n}=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\ /\ m^{n+1}$$

($x=0$ から $x=1$ まで)

である。簡単のため式(*1) を $G(m-1,n)$ と置く。積分区間が有限なる事に注目しよう。その意味は後述(§27)。

第一種オイラー積分もベータ関数も後世の名称である。既に前回§6～7で一般化された形で登場した。変数を特殊化し、§7の部分積分の公式を繰り返し適用すれば、オイラー型のベータ関数は次の通り。ただし助変数は彼の f , g を p , q に変更した(f , g は関数記号と見間違えるのを避けるため)。

$$(*2)\qquad \int x^{p-1}dx(1-x^{q})^{n}=\frac{q^{n}}{p}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(p+q)(p+2q)(p+3q)\cdot\cdots\cdot(p+nq)}$$

($x=0$ から $x=1$ まで)

簡単のため、式(*2) を $F(p-1,\ q,\ n)$ と置く。

§25. 二つの定積分を結ぶ関係式

第二種（ガンマ）積分と第一種（ベータ）積分を結ぶ重要な関係式

$$(*3)\qquad \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\mathrm{B}(m,n)$$

に相当するものを、オイラーは[11]『積分計算教程』の中では取り扱わない。後になって独立の論文

[20] E421, Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}dx(lx)^{m/n}$ integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa. Novi comm. acad. scient. Petrop., (1771), 1772.

に書いた。論文入手について高瀬正仁氏のご厚意に感謝する。

これは長い論文なので、要点のみ記す。オイラーは第一種（ベータ）の極限として第二種（ガンマ）が導けることを示した。式(*2)を

$$(*4)\qquad p\int x^{p-1}dx\frac{(1-x^{q})^{n}}{q^{n}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(p+q)(p+q)(p+q)\cdot\cdots\cdot(p+nq)}$$

と書き、$q=0$ の時の値を定める。（後世の立場なら、$q\to 0$ の極限を考える、と言う。）ここでは時代を遡り、オイラー流の《証明》を続けよう。 e は双曲線対数の底を表す。

$$x^q = e^{q\cdot lx} = 1 + q\cdot lx \quad \text{[二次以下の項を略した。]}$$

$$(1-x^q)^n/q^n = (-lx)^n = [l(1/x)]^n$$

となる。そこで式(*4)は

$$(*5) \qquad p\int x^{p-1}dx[l(1/x)]^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n \ / \ p^n$$

これがオイラー流の第二種（ガンマ）の階乗表現である。特に $p=1$ の場合の

$$(*6) \qquad G(0,n) = \int dx[l(1/x)]^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$$

が重要である。彼は順々に特別な場合を一歩々々と積み上げて行き、助変数を一般化した一般定理として

$$(*7) \qquad \frac{F(p-1,q,m-1)}{F(p-1,q,m+n-1)} = \frac{k\ F(mk-1,k,n-1)}{q\ F(p+mq-1,q,n-1)}$$

に辿り着く。ここで $q=0$ の時を考えれば、

$$(*8) \qquad \frac{G(p-1,n-1)\cdot G(p-1,m-1)}{G(p-1,m+n-1)} = k\ F(mk-1,k,n-1)$$

を得る。m と n は交換可能である。特に $p=1$, $k=1$ の時が私たちにお馴染みの関係式 (*3) である。

私の印象では、オイラーは式(*9)の右辺の階乗表現（但し簡単のため $mk=h$ と置く）

$$(*9) \qquad k\ F(h-1,k,n-1) = k^{n-1}\cdot \frac{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ (n-1)}{(h+k)\ (h+2k)\ (h+3k)\ \cdot \cdots \cdot\ (h+(n-1)k)}$$

が先にあって、$G(0,n-1)$ 等、即ち階乗の組み合わせで表現した。後になって $q=0$ を $q>0$ の場合に戻して、式(*7)の表現に直したのではないか、と想像する。

§２６．二種類の定積分の記号

私はこれまで二種類の定積分を表すため、

$G(m-1,\ n) = \int x^{m-1}dx[l(1/x)]^n$ 及び

$F(p-1,\ q,\ n) = \int x^{p-1}dx(1-x^q)^n$

を用いたが、これは便宜のためであり、オイラー自身の記号ではない。

彼は当面の論文［20］E421 の中で二種類の《定積分の値》を表す記号を用いた。第二種の定積分値（$x=0$ から $x=1$ まで）を表すため、

$$\int dx \sqrt[n]{\left(l\frac{1}{x}\right)^m} = \left[\frac{m}{n}\right]$$

を用いた。これに対して第一種の定積分値（$x=0$ から $x=1$ まで）を表すため、

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

を用いた。その値は第二種の定積分値を用いて、

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right]\left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

と表す。論文から取ったので、p, q の代わりに λ, m になっている。

ガウスは[8]ライステ 85 頁で次の様な記号を用いた。

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^n)^{p:n}} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\infty \end{bmatrix} = \int \frac{y^{p-m-1}dy}{(1-y)^{(n-m):n}} \begin{bmatrix} y=0 \\ y=1 \end{bmatrix}$$

$$[m, p] = (p-m, n-m)$$

$$[n-t, u-t+n] = (t, u)$$

積分区間の表示が、現在とは逆に下限を上、上限を下に書く。ここは現代の記号で

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1+x^n)^p}} = \int_0^1 \frac{y^{p-m-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y)^{n-m}}}$$

となる。$[m, p]$ に（$p-m$, $n-m$）が対応すると彼は言う。正しくは $[n-t, u-t+n]$ に（u, t）が対応するから、三行目は u と t を入れ替えて（t, u）を（u, t）とすべきであろう。

オイラーの記号がガンマ型とベータ型とを区別する本質的な記号の違いであるのに対して、ガウスのは同じ種類の定積分について、単に積分区間の［0, ∞］と［0, 1］を区別するだけの便宜的な記号に過ぎない。この事実も、ガウスがオイラーの［20］E421 を読まなかった間接的証拠と考えられる。《読まなかった》という立場は私がミシング・リンクと名付ける急所である。後の§３１を参照せよ。

§ 2 7． ニュートン・コーツの公式

オイラーの 階乗 ［ x ］ の値は x が整数 n に等しければ、

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$$

は計算できる。しかし $n<x<n+1$ のような実数値なら§25 の式 (*6) $G(0,x)=\int dt\,[\ell\,(1/t)]^x$ の如き超越関数が必要になる。オイラーやガウスが今日のガンマ関数の如き $x=0$ から $x=\infty$ までの積分でなく、$x=0$ から $x=1$ までの有限区間の積分で表したのは計算の便宜のためであった。これが私の推測であり、ガウスは実際に、有限区間に於いて《数値積分》を実行したのである。

[2] ガウス日記第 48 項 (1796 年 12 月 26 日)

Curuam parabolicam quadrare suscepi.
cuius puncta quotcunque dantur Oct. 26

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur.

与ヘラレタル任意個ノ点ヲ通ル放物線ハ求積出来ル。

[8] ライステ 13 頁に次の記入がある。この内容は スターリング

[21] James Stirling : Methodus Differentialis : sive Tractus de summatione et interpolatione serierum infinitorum, London, 1730. 『差分法、或イハ無限級数ノ総和ト補間ノ論考』(1730)

から学んだ「ニュートン・コーツの公式」である。ただし、係数が[21]の公式とは異なる。ガウスは、或いは別の著者に依ったか、方法は踏襲し、自ら係数を求めたのかもしれない。

Quadratur parabolischer Curven

x	a	$a+\Delta$	$a+2\Delta$	$\cdots\cdots$	$a+(n-1)\Delta$
y	α	β	γ	$\cdots\cdots\cdots$	μ

$$\left(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta\right)\Delta$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{4}{3}\beta+\tfrac{1}{3}\gamma\right)\Delta$$

$$\left(\tfrac{3}{8}\alpha+\tfrac{9}{8}\beta+\tfrac{9}{8}\gamma+\tfrac{3}{8}\delta\right)\Delta$$

$$\left(\tfrac{14}{45}\alpha+\tfrac{64}{45}\beta+\tfrac{24}{45}\gamma+\tfrac{64}{45}\delta+\tfrac{14}{45}\varepsilon\right)\Delta$$

$$\left(\tfrac{95}{288}\alpha+\tfrac{375}{288}\beta+\tfrac{250}{288}\gamma+\tfrac{250}{288}\delta+\tfrac{375}{288}\varepsilon+\tfrac{95}{288}\zeta\right)\Delta$$

$$\left(\tfrac{41}{140}\alpha+\tfrac{216}{140}\beta+\tfrac{27}{140}\gamma+\tfrac{272}{140}\delta+\tfrac{27}{140}\varepsilon+\tfrac{216}{140}\zeta+\tfrac{41}{140}\eta\right)\Delta$$

ガウスはライステ 13～14頁に、$\int dx/x\left[{x=1 \atop x=2}\right]=l2$ を2点法で 0.75,

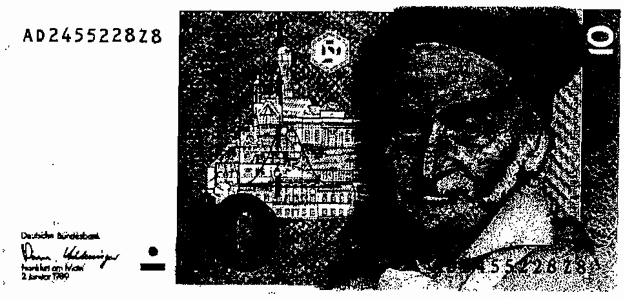
3点法で 0.6944, 4点法で 0.69375, 5点法で 0.693175, 6点法で 0.691363029, 7点法で 0.693148062 を求めている。 後の値ほど正しい値 0.693147181 に近づくのを確かめるためである。

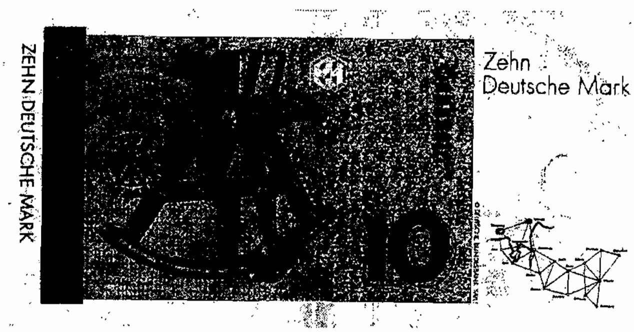
他の例として、$\int \sin x\, dx \left[{x=0^\circ \atop x=90^\circ}\right]$のため、15°＝(1/12)^{rad} 刻みの正弦の7点法の和 3.81971870 に、刻み幅 1/12 を掛けた 0.31830989 を求め、 $1/\pi$ =0.318309886 と比べている。

ライステ 13 頁では、$\int e^{-1/x}dx \left[{x=0 \atop x=1}\right]$ を6点法で 0,1476774 と求めて、少し後に sollten sein 0.1485 (0,1485 となる筈だ) と添えた。私は0〜0.25 ; 0.25〜0.5 ; 0.5〜1 と三分割し、各6点法で求めて、0.1484945 を得た。0,1485 の確認のためには、この程度の値が必要である。以上は、数値積分公式の有効性を見るための小手調べである。

§28. 誤差関数の求積

ガウスの名前は誤差関数と結び付く。旧10マルク紙幣には、ガウスの肖像と釣鐘型の曲線が描かれていた。今はユーロで見られない。ウラの器械は彼が発明した回光器(Heliotrop)、太陽光の反射を利用して、遠くの山頂の方向を精確に定める。彼が北ドイツを測量した三角網も描かれ、彼の実際家の側面を表している。ドイツ、さらにはヨーロッパでは、ガウスは《数学者・天文家・物理学者・測地家》として評価されている。日本では整数論でのみ有名である。





彼の数値積分の真の目的は、誤差関数

$\int e^{-xx}\, dx$ (x=0 から x=∞ まで)

の数値積分であった。これは無限区間の積分であるから、直接求めることは難しい。（被積分関数は x が大なら殆ど $=0$ だから、数値積分が不可能とは言えないが。）彼は $x=0$ から $x=1$ までと $x=1$ から $x=\infty$ までの二つの区間に分割した。後者は $x=1/u$ で置換して、

$\int e^{-1/uu}\,du/uu$ （$u=0$ から $u=1$ まで）

となる。前半は 6 点法で 0,7468182, 後半は置換後の定積分を用い 6 点法で 0,1416408, 両者の和は 0,888459 となる。彼はこの和 $(1/2)\sqrt{\pi}=0,886226925$ を知っていて、比べている。§22 で引用した、[8]ライステの逆平方数の種々な分割の和の一覧表の下方に、次の記述がある。

Nach La Place ist $\int e^{-tt}dt$ v. $t=0$ bis $t=\infty$

$$= 2\sqrt{\pi}$$

Nach La Place ist $\int e^{-tt}$dt $v.$[von] t=0 bis t=∞ $=2\sqrt{\pi}$.
ラプラスに依れば $\int e^{-tt}$dt（t=0 から=∞ まで）は $2\sqrt{\pi}$ になる。）周知のように、係数は 2 でなく 1/2 が正しい。

§29. 意図不明な求積

[8]ライステ 46 頁の数値積分は、計算それ自体はよいが、一見した所その意図が分からない。

$$\int \frac{dx}{(lx-1)^2} \quad \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{l\infty+1} \cdots\cdots \frac{1}{\infty} \cdots\cdots 0.0\cdots$$

$$\frac{1}{(l6+1)^2} \cdots \frac{1}{2{,}7917595^2} \cdots 0{,}12830512$$

$$\frac{1}{(l3+1)^2} \cdots \frac{1}{2.0986123^2} \cdots 0{,}22705471$$

$$\frac{1}{(l2+1)^2} \cdots \frac{1}{1.6931472^2} \cdots 0.34882734$$

$$\frac{1}{(l\frac{3}{2}+1)^2} \cdots \frac{1}{1{,}4054651^2} \cdots 0{,}50624412$$

$$\frac{1}{(l\frac{6}{5}+1)^2} \cdots \frac{1}{1.1823216^2} \cdots 0{,}71536675$$

$$\frac{1}{(l1+1)^2} \cdots\cdots \frac{1}{1} \cdots\cdots 1{,}0\cdots$$

$$\frac{41}{140}\cdot 1 \quad \cdots\cdots \quad 0{,}29285714$$

$$\frac{216}{140}\cdot 0{,}84367187 \cdots 1{,}30166517$$

$$\frac{27}{140}\cdot 0{,}73329883 \cdots 0{,}14142192$$

$$\frac{272}{140}\cdot 0{,}34882734 \cdots 0{,}67772169$$

$$\overline{2.41366592}$$

$$6)\ \overline{0.40227765}$$

Vollkom sein

0.40365

7点法の計算。左方は、0 から 1 までを 6 等分した x に対する値の計算、右方はニュートン・コーツの公式の適用である（ガウスは左右を分けず、縦に長く書いたが、便宜上左右に分けた）。右方では 0+1=1; 0,128… + 0,715… =0,843…; 0,227… + 0,506… =0,733…; 0,348… の各和に、7点法の係数を掛けて足した和の 2,41366592 を求めている。これを 6 で割って、定積分値 0,40227765 を得た。

所が次の行 sollten sein 0,40365 (0,40365 となる筈だ) の意味は何か？ 私は種々試みた末ようやく突き止めた。$I=\int dx/(lx-1)^2$ [$x=0$ から $x=1$ まで] を $-lx=t$ または $x=\mathrm{e}^{-t}$ で置換すれば $J=\int \mathrm{e}^{-t}dt/(1+t)^2$ [$t=0$ から $t=\infty$ まで] となり、更に $1+t=u$ で置換すれば $\mathrm{e}^{-1}K=\mathrm{e}^{-1}\int \mathrm{e}^{-u}u^{-2}du$ [$u=1$ から $u=\infty$ まで] となる。後世の知識で、J はラプラス変換、K は積分指数関数、両者の間に $\mathrm{e}^{-1}-J=K$ なる関係が成立する。 $\mathrm{e}^{-1}=0,3678794$, $J=0,2193839$ から $K=0,1484955$, $\mathrm{e}K=2,7182818\times 0,1484955=0,4036526$. 最後の値が「なる筈」の値である。いま一つの方法は、$\mathrm{e}^{-1}-J=K$ の両辺に e を掛けて $1-\mathrm{e}J=\mathrm{e}K$ となり、 $\mathrm{e}J=2,7182818\times 0,2193839=0,5963473$ を 1 から引けば、$\mathrm{e}K=0,4036527$ を得る。これらは後世の知識による裏づけである。

ガウスの意図が判明！ 私は I から逆に辿ったが、ガウスは本来無限区間の積分 K 又は J を求めるのが目的であり、しかも計算のため、無限区間の代わりに有限区間の積分 I にまで変形したのであった。

尤も、例えば J の被積分関数は ∞ まで行かずとも、有限な値で収束するから、計算不能ではない。かと言って、例えば $t=16$ で被積分関数がきわめて 0 に近いのを見て、 $t=0$ から $t=16$ までの区間を、$t=0$ から $t=2$ まで、$t=2$ から $t=4$ まで、$t=4$ から $t=8$ まで、$t=8$ から $t=16$ までと実用的に分割し、それぞれの区間の数値積分を足すのは、ガウスにとっては《美的に》耐え難かったであろう。

§30. ガウス日記の中の記述

ようやく今回の最終目的を述べる段階に来た。前回§3の略年表を見ると [2] 日記第 54 項「$\int x^n dx/(1+x^n)$ の計算」(1797年1月某日)の後だいぶ時間が空いて(その間全く別の主題に没頭していた)、次が来る。

[8] 日記第 59 項、3月2日

Formularum integralium formae
$\int e^{-t^a} dt$ et $\int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$
inter se comparationem institui. Mz 2.

Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{(1+u^\gamma)}}$$

inter se comparationem institui. [1797] M[a]rt. 2.

$\int e^{-t^\alpha}dt$ ト $\int du/\sqrt[\beta]{(1+u^\gamma)}$ ノ形ノ積分式相互ノ比較ヲ研究セリ。 [1797]年３月２日。

が来る。[22]シュレジンガーの解説によれば、現代の関数の

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx, \quad \text{と} \quad \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1} (1-x)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1} dx,$$

即ちΓ関数とＢ関数に相当する、と言う。確かにうまい変数変換を用いれば、Γ関数やＢ関数に書き直すことは可能である。しかし、目的を知っていて、それに合うような変数変換を選ばなければならない。

私は[1]『ガウスが行なった数値計算（参）』(2005年10月26日講演)の§２４で、シュレジンガー風(à la Schlesinger)の偏り、即ち

[22] L. Schlisinger : Ueber Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie, in Gauss'sche Werke, X-1, Abh. 2.

を書いたシュレジンガーが、ガウスの思考の線を強引に現代の立場から再構成する傾向を指摘した。彼の解説それ自体は現代から見れば正しいが、１８世紀末に住むガウスが後世のΓ関数やＢ関数を知る筈が無く、当然ガウス風の関数で書いたであろう。

ガウスが興味を持ったのは、前節で見たようにΓ関数とは言えない。$\int e^{-xx}dx$, $\int e^{-1/xx}dx/xx$, $\int dx/(\ell x-1)^2$ 等である。これらはΓ関数と言うよりは寧ろ誤差関数である。その被積分関数のｅの肩の指数は $-tt$ が一般化されて $-t^\alpha$ になった（積分指数関数の一族）。更に、彼は定積分の値Γ(に相当する値)が知りたい。またＢ関数も定積分の値Ｂ(に相当する値)が知りたいのである。前回§１８ で述べた如く、オイラーや初期のガウスにとっては、関数(functio) とは今日の意味での《関数》ではなく、寧ろ《式》であった。また或る積分式（区間の指定

された）によって定められる《量》が《超越量》であると言う考えは、今話題にしている１８世紀末よりも後の時代のガウスによって、徐々に形成されたのであって、当時は《超越的な関係によって定められる量》でしかなかった。

前回§４で、ガウスが[8]ライステの白頁に『オイラーの著作の完全な目録』を５頁にわたって記入した、と述べた。その大半は著書（意外に天文関係の本が多い）である。ペテルスブルグ学士院紀要以外の論文は論文名を写すが、同学士院紀要の論文は題名を記す事は少ない。
Commentaris acad. Sc. Petrop. v II – XIV 74, Novi Commentaris 179. と冊数 74 と 179 を記すのみ。ガウスがどの論文を読んだのか知る手掛かりがない。

そこで、当面のオイラーの論文 [20] E 421, (1771), 1772 (§23 参照）を《ガウスが読んだか否か》が焦点となる。ガウス自身の記号の使い方から見て、私にはどうもこの論文を読まなかったように思われる。

§３１．関係か比較か

私は先に§２５ で引用した式(*3)、即ちΓとＢを結ぶ関係式を知るためには、ΓとＢ双方の階乗表現が必要である、と考える。私はガウスが行なったかも知れない、これ等相互の関係の探索のための計算や記述を、ライステ及びその周辺にある種々の紙片を丹念に探したのであるが残念ながら見付けられなかった。

前節末に述べたように、ガウスがオイラーの論文 [20] E 421 を《読まなかった》と言う推測の立場に立てば、彼が言う「積分式相互ノ比較ヲ研究セリ」にも種々の比較が有り得る。

簡単のため、ガウス日記の中の元式

$\int e^{-t^\alpha}dt$ を $V(\alpha)$ で、 $\int du/(1+u^\gamma)^{1/\beta}$ を $W(\gamma, \beta)$ で（積分区間はそれぞれ 0 から ∞ まで）表すことにする。そこで、ガウスに代わって幾つかの積分を求めた。

先ず $\alpha = 3$ の系統を見てみよう。

$$V(3)=0.89298,\ V(3/2)=0.90275,\ V(3)\cdot V(3/2)=0.80613,$$

$$W(3,\ 1)=2\pi/3\sqrt{3}=1,20920=(3/2)\cdot V(3)\cdot V(3/2)$$

この最後の値は、前回§１５相補関係に出てきた値である。同所では

$=A\cdot B$ であった。さらに $V(3)$ は、前回§6で引用した所の、[2] ガウス日記第32項(1796. 9. 9)と密接な関係を持つ。

$$W(3,\ 2)=1.40218=V(3)/(\pi/2)$$

私は同所で $\Psi(t)$ で表して、その級数展開を記した（積分区間は0から1まで）。同所では、分母が $\sqrt{(1-x^3)}$ の形、即ち平方根の内側の x が立方と言うアンバランスに違和感を持った。それは或る楕円積分であって、標準形も1の虚数立方根を含む。さらに [2] 日記第 32 項の日付が、当面の《比較》を記述している日記の記事((1797. 3. 2)よりも、<u>半年も前</u>であることに注目したい。私が、前回§6で《特殊オイラー積分》と名付けて特に検討の対象としたのは、$\sqrt[3]{(1-x^3)}$ のように、x の指数 n と根号の肩の n とが同じ型の場合であった。一見似ていて、本質は違う。

次は $\alpha=4$ の系統である。私の計算によると、

$$V(4)=0.90640,\quad V(4/3)=0.91906,\quad V(4)\cdot V(4/3)=0.83304,$$
$$W(4,\ 1)=1,11072=(4/3)\cdot V(4)\cdot V(4/3)$$

となる。$W(4,\ 1)$ の値は $\pi/(2\sqrt{2})=1,11072$ に等しく、前回§8で引用した [2] ガウス日記 第54項(1797. 1. 日付なし）の一例である。さらに前回§16 の分類によると、⑤の定積分の別の表現である。

このように、$\alpha=3$ と $\alpha=4$ の範囲を調べると、$V(\alpha)$ と $W(\gamma,\beta)$ を対比させる実例が幾つか存在する。即ちガウスがオイラーの論文 [20] E421 を読まなかったとしても、両者の関係を予想した可能性がある。否、ガウスが《比較》とのみ言っているのに、私が先回りして《関係》の形に持って行こうとしたのだ。現代の私たちは、[22] シュレジンガーと同様に、§25のΓとBを結ぶ綺麗な関係式(*3)に<u>ガウスが達していた</u>、と過剰な期待を持つからである。

ガウスが果たしてオイラーの論文 [20] E421 を<u>読んだか否か？</u> その解明は、私にとってのミシング・リンクとして残して、今後の課題としたい。 （2007 年 10 月 28 日講演）

前回§１９．気質の違い、への補足

オイラーは前の論文に少しでも改良を想い付くと、前の論文を殆ど再録して、それに改良を盛り込んだ新論文を仕立てる。彼の論文数が多いのはこのためである。これに対してガウスは、[5]高木貞治『近世数学史談』25頁の、座有銘 " pauca sed matura "(僅カナレドモ熟セル物)を楯に取り、また、同26頁の「 ut nihil amplius desidare (コノ上更ニ望ムベキ事無シ)ト言フ程度マデ仕上ゲル」ことを目指し、結局、未完の論文が多く草稿の形で遺された。

訂正

前回（第17回数学史シンポジウム、2006）報告書、杉本講演。

6頁、〔§6〕13行目の式 $\Psi(t)$ の右辺を次に改める：

$$(2/\sqrt{3})\int du/\sqrt{[(1-ut^2)(1-vt^2)]}$$

12頁、§12，4行目の左側の式 f(x) を次に改める：

$$f(x)=\int xdx/\sqrt[3]{(1-x^3)},$$

21頁、〔§ 15 〕下から 13行目、手書きの式の x^{15} の係数を次に改める：

$$\frac{3\cdot 239}{220\cdot 91}x^{15}$$

〔模写を誤ることは致命的と自戒した〕

24頁、§17，6行目、解法 を 開放 に訂す。