J. Hadamard, P. Lévy, L. Schwartz と続いた確率解析の系譜

飛田　武幸
名城大学

平成 19 年 2 月 13 日

1　古典関数解析

無限次元解析を進めようとすれば、積分が必須である。それには測度が必要である。しかもそれは有限次元におけるルベーグ測度のような一様な測度出なければならない。１９世紀の統計力学では高次元のガウス測度が自由に用いられて確率解析の萌芽が見られるようである。

Jacques. Hadamard　(1865-1963)

父は Lycée Louis-le-Grand のラテン語の教授という名門の出身である。Hadamard 自身は数学の極めて多くの分野で優れた業績を上げた数学者で、Hardy は Hadamard を 評して、数学における "living legend" であると言った。(Mandelbrojt and Schwartz による。) 1912 年には、学術上の功績で Academicien になった。

数学の話に入ろう。彼の初期の頃の業績は関数論, 特に関数論に関するものが多かったようであるが、２０世紀に入り V. Volterra の影響もあって、関数解析に興味をもつようになった。Volterra の "fonction de ligne" の代わりに "functionnelle" と呼ぶことを薦めた。

Hadamard は区間の上で定義された連続な線形汎関数 $U(f)$ が次のような積分の極限：

$$U(f) = \lim_{\mu \to \infty} \int_a^b f(x)\Phi(x,\mu)dx$$

として与えられることを示した。これは有名 Riesz の定理の先駆と見られるべきであった。

汎関数微分を定義し、変分法を確立したこと、さらに 1910 年に刊行された彼の労作 [1] は極めて有名である。方程式 $\Delta U = 0$ に関する Green 関数を境界 C の汎関数と考え、境界の微小変化による変分方程式を導いた。これは Hadamard equation と呼ばれ て、極めて有名であり、よく知られている。

Hadamard equation: $\mathbf{C}$ を平面上の滑らかな単一閉曲線 C, すなわち contou の系とし、C で囲まれた領域を (C) とかく。領域 (C) に対するグリーン関数を $g(C,x,y)$ で表す。Contour C の内側への微小な変換による image を標語的に $C+\delta C$ と書く。 $\mathbf{C}$ には距離による位相を入れて変分が定義できるようにしておく。 δC による $g(C,x,y)$ の変分 $\delta g(C,x,y)$ は次の方程式 (Hadamard equation) をみたす。

$$\delta g(C,x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial g(C,x,m)}{\partial n_m}\frac{\partial g(C,m,y)}{\partial n_m}\delta n(m)dm.$$

ここで、$\delta(m), m \in C$, は　δC の $m \in C$ における微小変化の量を表す。

このときに用いられる変分解析は確率場 $X(C)$ の場合に応用される。その際、S-変換によりランダムな量 $X(C)$ が汎関数 $U(C,\xi)$ に移されて、古典関数解析が応用できる。なお、C の共形変換、また C の微分自己同型などを容易にするため、 C を ovaloid に限定することになる。

このように Hadamard による関数解析の分野における多くの結果は、装いを新たにして、確率解析、特に確率変分解析の理論に登場している。(詳しくは　[13], [14] を参照).

2　関数解析の基礎

いわゆる古典関数解析の本格的な始まりは２０世紀もいくらか経過してからであった。J.Hadamard に続いて、V. Volterra, R.M. Fréchet, P. Lévy と続く。

Paul Lévy (1886 - 1971)

確率解析に大きな影響を与えた P. Lèvy には関数解析における先駆的な研究があり、関数解析と確率論とを、あるときには独立に、また一面では融合させた体系で基本的な、古今 比類なき大きな貢献をしてきた。

生い立ちなどは彼の自伝 [10] の第 1 部第 I 章, および、自筆手書きの自己紹介（研究会で紹介）に譲るが、1907 年以後 Sorbonne と Collége de France

で Hadamard に師事していたことを注意しよう。

Lévy の父は Lucien Lévy (1853 - 1912) で Pr—'ecis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, Gauthier-Villars, 1898, の著者である。そして、Lycée Louisa-le Grand における Hadamard の先生であった。奇縁ということではなかろう。 また父は 1911 年にはフランス数学会の会長を務めた。

Lévy は 1913 年に結婚、 夫人は Paul Lévy (奇しくも同名) の娘である。

子供は 3 人あって、長女 Marie Hélène は数学者 (Lille 大学教授) で Laurent Schwartz 教授と結婚している。Denise は lycée のドイツ語教授である 等など学者一家である。

学術面のことに移る。

関数解析からホワイトノイズへ

すでにこの研究会で報告しているので、文献 [4], [5], [6], [9], [13] を挙げるにことによって紹介に代える。 補足して強調したいことは、Lévy が グリーン関数の変分に関する Hadamard equation を極めて重要視したことである。文献 [9] の第 II 部の主要部分が、この話とその一般化にあてられている。

ブラウン運動

Lévy が最も力を注いだ研究内容はブラウン運動と関数解析であったと思う。ブラウン運動の一応のまとめは 1948 年の著書 [8] であったが、その後、ブラウン運動を基礎にしたガウス過程の表現、少し一般化して線形過程の表現、またブラウン運動に帰り path の詳しい性質、確率積分 (独特な方法による、stochastic area に示唆されて) と守備範囲を大きく広げている。

晩年はまた関数解析に戻って論文を発表している (1971) のは我々が強い関心を持つところである。現在では Lévy の関数解析とホワイトノイズ解析とは一体として考えられるのだが、Lévy の思考の中では、言わずもがなといったところであろうか。

ここで強調したいことがある。表面的な言葉には表していないが、無限次元あるいは無限次元解析に対する考え方である。連続無限次元の解析であるが、空間は可分であり加算個の条件とか要素が基礎になること等についての奥深い洞察がある。たとえば、それはブラウン運動の interporation による構成法や Lévy group, Lévy Laplacian などの扱いに現れている。有限次元の解析からの単なる極限としては実現できない解析がそこにある。([14] 参照。)

加法過程の Lévy 分解

Lévy-Itô の分解ともよばれる。**定理** 確率連続で、時間的に一様な独立増分をもつ加法過程 $L(t), t \geq 0$, は次のように分解される。

$$L(t) = mt + \sigma B(t) + \int_{R-0} (uP_{du}(t) - \frac{tu}{1+u^2}) dn(u),$$

ここで、$B(t)$ はブラウン運動、 P_{du} はポアソン過程による確率測度、$dn(u)$ は Lévy 測度で $\int u^2 dn(u) < \infty$ である。

直観的にいえば、$L(t)$ は、定数を除き、ブラウン運動（これは見本関数が連続）と種々のジャンプを持つポアソン過程（収束化定数を引いて）の和として表される。後者の見本関数は第一種の不連続性を持つ。

この分解は過程の確率分布、それは無限分解可能な分布、の分解をもあたえる。それは Lévy-Khinchine 分解とよばれる。

このことについて、視点を現在に置いたときの話は次節で論じる。

non-academic な話ではあるが、1987 年 7 月 2 22-26 日 Ecole Polytechnique で 1 年遅れの Lévy 教授 100 年祭"Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques" が開催された。

[蛇足] 2006 年 12 月開催の、名古屋における Lévt Seminar も今年で 5 回をかぞえる。今回の内容は、単なる歴史ではなく「残された課題」を探ることであう。この Seminar の報告集は 2007 年 2 月に刊行される予定である。

Paul Lévy は、晩年になって、ようやく 1964 年に フランスのアカデミー会員 に推薦された。

3 残された課題より

1) 1919 年に始まる無限次元 (確率) 解析の思想、

無限次元調和解析の思想を発展させたい。無限次元回転群 (Lévy group の再認識、Lévy Laplacian との関連、whiskers の利用) とそこから起こる無限次元調和解析の展開など。

2) 多次元パラメータを持つ Lévy のブラウン運動の内臓する複雑なランダム構造 (e.g. hyperbolic 構造) の解明。

それを確率場の典型として扱いたい。1 次元パラメータの場合のブラウン

運動に相当する地位を確率場に対して与えたいものである。1968 年の面談でアドバイスされた Lévy の問題などを思い出したい。

3) 確率変分方程式.

文献　[6], [11], 特に [9] Hadamard equation など参照。ガウス型またはポアソン型のノイズの汎関数のとき、ラプラス変換（S-変換など）により古典関数解析の問題に移れる。ただし、ランダムな解析（ホワイトノイズ解析）になるための細部の注意が必要であるが、.....。

さらに我々は遥かに次の形の Tomonaga equation　を指向するものである。

$$i\hbar \frac{\delta \Psi[C]}{\delta C_P} = H(P)\Psi[C].$$

4) 加法過程の　Lévy (Lévy-Itô 分解).

その内容はすでに述べたが、加法過程のこの分解は [7] に詳しい。ただし、関連する「無限分解可能」な法則については de Finetti, A.Ya Khinchine の貢献もあった。最近は意外なところでもこの分解が論じられていて、我々はそれが持っている深い意義を再認識させられている。たとえば

i) D. Mumford による image の確率モデルがある (Stochastic models for generic images など). そこでは　Banach 空間の値をとるモデルについて、Levy-Khinchine theorem といって、この分解を用いている。彼の image の理論で重要な役割を演じている。 なお、彼は　2006 Shaw Prize を受賞しているが、patter theory と vision research に対するもののようである (AMS Notice Oct. 2006)　。

ii) H. Araki の current algebra の表現で、Lévy-Khinchin formula の非可換の場合への拡張がなされているのは周知のことである。　(See Pub. RIMS vol.5, 1970, 361- 422.) あらためて visit し、新たな課題と観点とを見出したいと考える。

iii) Lévy flight, M.F. Shlesinger et al 編集、Springer-Verlag 1995.　複合ポアソン過程が主で、各種の物理への応用が論じられ興味深い。1994, Nice Conference の報告集として編集された。

iv)　Economics, Finace への応用. いわゆるベキ乗分布の現われる場では、そのい原因探求のために背後の安定過程の性質を利用したい。その安定過程に Lévy 分解を適用して、素過程であるポアソン過程の特性に訴えることになる。また finace の問題においても非減少 Lévy 過程を subordinator とするモデルが扱われ、興味深い理論が見られる。(AMS Notice 51 (2004) no.11, D. Applebaum の解説参照。)

v) 確率論自身における Lévy 分解はここに述べるまでもないが、敢えて一言すれば

確率過程や確率場 の **innovation** を扱うとき、時間的一様性を仮定すれば自然に Lévy 過程の時間微分が現れれ、Lévy 分解はガウス型とポアソン型の elemental な確率超過程に分解される。 Reductiuonism の立場からは、ランダムな複雑系で evolutional なものの解析は、このような超過程を求めてその非線形汎関数の解析から始まる。Lévy 分解は最重要なステップである。

5) $\sqrt{dt}$ をめぐって。

Lévy がブラウン運動の微小時間 dt での増分を表すのに、標準ガウス分布に従う ξ_t を用いて、$\xi_t\sqrt{dt}$ の記号を使いだしたのは 1950 年頃である。これはあまりにも formal だといって嫌う向きもあったが、現在の認識からすれば至極当然で便利なものと思われる。

Lévy は確率過程の定義をするときにも記号 $\xi_t\sqrt{dt}$ を使っている。見掛け上は連続無限個の独立確率変数を考えるとき、分布が R ^ 1 上の確率測度の連続無限直積を定義するのは不適切である。(例。$\dot{B}(t), t \in R.$) t の代わりに無限小区間 $\sqrt{dt}$ をとらざるをえない。[0,1] 区間を一様に 細かく分割してそこでのランダム関数 (普通の関数ではない！.cf. Bernstein の formulation) を近似するなら、$\sqrt{dt}$ を使うのが自然であろう。
無限次元解析を考えるとき、易しいことではあるが、深く考えるべき事柄であると愚考するものである。 par

6) 見本関数 (paths, trajectories) の性質。

ブラウン運動の場合は、1940 年の論文（２次元値のとき）や著書 [8] の第 6 章で詳しく述べているが、さらに違った視点から 1953 年に path の Haussdorf 測度の研究に進んでいる。そこでは L^2 では記述し難い path の隠れた optimality が見出されたりして、大変興味深い。

ポアソン過程の場合でも、視覚に依存しない特性 latent trait が得られている (Si Si, 2003)。

7) Harmonic analysis.

無限次元回転群 $O(E)$, Lévy Laplacian Δ_L などについて。
Lévy の original な idea ([5], [9] の各 III 部参照) の reformulation が必要である。これは、上の 5) とも関連する。

4　現代関数解析と確率解析

代表的に

Laurent Schwartz (1915 - 2002) (卯年生まれ)

を挙げたい。前の二者の流れを汲んでいると見られるからである。ちなみに、Hadamard は Schwartz の大伯（叔？）父にあたる。

Schwartz のことは 彼の自伝 [10] に詳しい。大変興味深い、しかも率直な所感を綴った書物で、今回その一部でも紹介しようと企てたが、何分にもフランス語に不得意で、時間をとっている間に、近く邦訳が出版されることを聞き、この自伝の紹介はあきらめることにした。近刊の訳書を見ていただきたい。

私事に亘るのを許して頂くとすれば、Schwartz について私が大層感銘を受けたことが２度ある。最初は 1950 年の congress からお帰りになった吉田耕作先生が Schwartz の超関数の理論を紹介して下さったときのことであった。学生の身で、よく分からないことは仕方がないが、何となくすばらしいアイデイアであることは感じることができた。２回目は Lévy 教授生誕１００年祭（１年おくれで開催）での Schwarts の記念講演である。正直に言って、そのときは殆ど理解できなかったが、直後にフランスの友人から一部要約していただいたり、あとで出版された講演記録 "Quelques réflexions et souvenirs sur Paul Lévy" を読んでの感慨である。（一部はこの研究会で報告したが。）的確な評と尊敬、そして今も学ぶべきことを助言してくれた。今の我々にとっても心に留めたいところである。

References

[1] J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Hermann. 1910.

[2] Jacques Hadamard 全集 vol.1 − 4、Centre Nat. de la Recherche Sci.

[3] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, Jacques Hadamard, A Universal Mathematician. Amer. Math. Soc. 1998.

[4] P. Lévy, Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits. Revue de Métaphysique et de Morale. 1919.

[5] P. Lévy, Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1922.

[6] P. Lévy, Cours de mécanique. Gauthier-Villars. 1928.

[7] P. Lévy, Théorie de l'addtions des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937; 2ème éd. Gauthier-Villars 1954.

[8] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948; 2ème éd. Gauthier-Villars 1965.

[9] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1951.

[10] P. Lévy, Quelques aspects de la pensée d'un mathématoicien. A. Blanchard, 1970. 邦訳 岩波書店、1973.

[11] L. Schwartz, Théorie des distributions. Hermann. vol.I 1950, vol. II 1951. nouvelle ed. 1966.

[12] L. Schwartz, Un mathématicien aux prises avec le siècle. Éd. Odiele Jacob. 1997.

弥永健一 訳 闘いの世紀を生きた数学者、上、下、シュプリンガー・ジャパン、2006.

[13] T. Hida and Si Si, An innovation approach to random fields. World Sci. Pub. Co. 2004.

[14] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. World Sci. Pub. Co. 2006.

[15] 飛田武幸、ホワイトノイズと関数解析。Sem. on Probability. vol. 60. 2002. 確率論セミナー。

[補足 1] P. Lévy Seminar. No.1, no.2, no.3 (World Scientific Pub Co.). no.4 (unpublished), no.5 to appear in Feb. 2007.

[補足 2] S. Mandelbrojt and L. Schwartz, Jacques Hadamard, Bull. A.M.S. 71 (1965), 106-129.