和算における代数表現と未知数消去の実際

小松彦三郎（東京大学大学院数理科学研究科）

1. 朱世傑著「算学啓蒙」の天元術

江戸時代の日本人は、代数方程式の立て方である天元術とこれを解く開方術を、主に元代の入門書「算学啓蒙」(1299) から学んだ。この本は一元の数係数代数方程式しか扱っていないが、数学の問題はすぐに多元の方程式になる。これを一元方程式に還元するには補助未知数の消去が欠かせない。ここでは、著者朱世傑がどのようにして処理したか、開方釈鎖門第三十問を例にとって見てゆく。

今有方錐．積九千四百八尺。只云．高為実．平方開之．得数少如下方二十二尺。問下方及高各幾何。答曰．下方二十八尺。高三十六尺。

正方錐があり、体積を9408立方尺とする。高さの平方根が下方、即ち下面の一辺の長さより、22尺だけ少ないとしたとき、下方と高さを求めよという問題である。高さの平方根と下面の長さを比べるのは意味がないように思われるかも知れないが、中国数学や和算にはこの種のものがよく現れる。

下方を b、高さ を h とすれば、連立方程式

$$\sqrt{h} = b - 22, \tag{1}$$

$$b^2 h = 3 \times 9408. \tag{2}$$

を解くことになる。続く術文は次の通り。

術曰．立天元一．為開方数 $\boxed{0}\boxed{1}$。自乗為高 $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$。再列開方数．加少如．爲下方也 $\boxed{22}\boxed{1}$。自之．又高乗之．爲三段方錐積也 $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{484}\boxed{44}\boxed{1}$。寄左。列積．三之．与寄左相消．得開方式 $\boxed{-28224}\boxed{0}\boxed{484}\boxed{44}\boxed{1}$。三乗方開之．得六尺．爲開平方数。加少如．得下方二十八尺。又六尺自之．即高。合問。

ここで、数字が入った箱の行は数係数の多項式、あるいはそれを 0 と置いた数係数の代数方程式を表す。数字は算木で表されている。この配列は算木を並べた算盤を模しており、一番左が「実」、次が「方」、次は「廉」、$\cdots$、「隅」の位、即ち、定数項の係数、1 次の項の係数、2 次の項の係数、$\cdots$、最高次の項の係数である。中算や和算では、変数もしくは未知数の名前も、次数も明示しない。それではわれわれに分かりにくいので、以下の解説では、変数はいつも X とし、n 次の項には X^n を添え字として付け加えて現代の数式と合わせることにする。

立天元一：$0_{X^0}+1_{X^1}$；＝ 開方数,

自乗：$0_{X^0}+0_{X^1}+1_{X^2}$；＝ 高.

再列開方数, 加少如：$22_{X^0}+1_{X^1}$；[(1) により] ＝下方,

自之, 又高乗之：$0_{X^0}+0_{X^1}+484_{X^2}+44_{X^3}+1_{X^4}$；

[(2) により] ＝ 3×方錐積, → 寄左.

列積：9408_{X^0} , 三之：28224_{X^0}；

与寄左相消：$-28224_{X^0}+0_{X^1}+484_{X^2}+44_{X^3}+1_{X^4}=0$； 得開方式.

三乗方開之： 得六尺；＝ 開平方数.

加少如： 得二十八尺；＝ 下方.

又六尺自之： 得三十六尺；＝ 高.

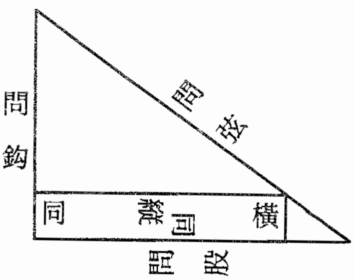
2. 沢口一之著「古今算法記」の漢文表記

現在筑波大学付属図書館に収蔵されている「新編算学啓蒙」(コ200-11) は、秀吉の朝鮮出兵に際して持ち込まれたと信じられており、李氏朝鮮の中宗年間 (1506～1544) に銅製活字を用いて印刷された。「算学啓蒙」の完本として残っているものの中で世界一古いと考証されている [1]。我が国では久田玄哲が1658年に訓点を付して木版の整版本として出版した。こうして我が国でも天元術が知られるようになったのであるが、理解できた人は少なかったようである。

最も古い、天元術を駆使したことが確実な文献は、沢口一之著「古今算法記」である。これは7巻からなる刊本で、1670年の日付をもつ自序と跋がある。最初の3巻は、当時としては高級な、しかし、普通の算書である。珠算を使った開平法、開立法の後、算木を使った開平、開立とその変形が紹介されているが、一般の開方術の説明はない。ところが、次の3巻は佐藤正興の「算法根源記」(1669) にある遺題150問の解答にあてられていて、そこではいきなり天元の一を立てて開方式を導く術が書かれている。ただし、根源記には代数的には解けない円についての問題が 16 あって、それらは円理に関わることであるとして解答していない。そして、沢口自身の遺題15 問だけの巻之七を添えて全巻を閉じている。

ここでは、巻之五にある第八十五問を取り上げる。

今有鈎股弦内如図縦横平。只云. 縦三尺二寸。横六寸。別. 鈎股弦寸各三和一丈二尺。問鈎股弦幾何。



この問題には二組の解がある。沢口はこのような問題は翻狂であるとして、その中から一組だけを選ぶために「加辞云自短股寸而短鈎寸者

其形長也」を付け加えている。

答曰鉤三尺。股四尺。弦五尺。

図を認めたとき、表向きの仮定は

$$\text{只云：}\qquad \text{縦} = 32, \quad \text{横} = 6, \tag{3}$$

$$\text{別云：}\qquad \text{鉤} + \text{股} + \text{弦} = 120, \tag{4}$$

の三つであるが、ピタゴラスの定理と大小の直角三角形が同じ勾配をもつことから

$$\text{鉤}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2, \tag{5}$$

$$(\text{鉤} - \text{横}) \times \text{股} = \text{縦} \times \text{鉤}, \tag{6}$$

もなりたつ。(3) を認めれば、残りの三つの方程式から三つの未知数を求める問題になる。沢口の解法は、(3), (4) で与えられた問題の数値に依らないもので、次のように述べられている。

術曰．立天元一．爲鉤。内減横．餘爲短鉤。寄甲位。列別云数．内減鉤．餘爲股弦和。自之．得内減鉤冪．餘爲因股弦和二段股。以甲位乗之．爲因股弦和因鉤二段縦。寄左。列縦．以股弦和与鉤相乗之．得数倍之。与寄左相消．得開方式。平方翻方開之．得鉤。依前術得股弦。各合問。

「算学啓蒙」の解法と違って、算木の配列で表された多項式は一切使われていない。代わって、漢文で表記した多項式を用いるのであるが、ここでは理解を助けるために“：”と“；”の間に文字を含む数式として補っておく。

立天元一：$0_{X^0} + 1_{X^1}$；$=$ 鉤,

内減横：$-\text{横}_{X^0} + 1_{X^1}$；$=$ 短鉤, $\to$ 甲位.

列別云数：別云数_{X^0}；

内減鉤：$\text{別云数}_{X^0} - 1_{X^1}$；[(4) により]$=$ 股弦和.

自之：$\text{別云数}^2_{X^0} - 2\text{別云数}_{X^1} + 1_{X^2}$；

内減鉤冪：$\text{別云数}^2_{X^0} - 2\text{別云数}_{X^1}$；$= (\text{股} + \text{弦})^2 - \text{鉤}^2$

[(5)により] $= (\text{股} + \text{弦}) \times 2\text{股}$,

以甲位乗之：$[-\text{別云数}^2 \times \text{横}]_{X^0} + [\text{別云数}^2 + 2\text{別云数} \times \text{横}]_{X^1} + [-2\text{別云数}]_{X^2}$；

[(6)により] $=$ 股弦和 $\times$ 鉤 $\times$ 2縦 $\to$ 寄左.

列縦：縦_{X^0}；

以股弦和与鈎相乗之得数倍之： $0_{X^0}+[2縦\times別云数]_{X^1}+[-2縦]_{X^2}$；
$=縦\times股弦和\times鈎\times 2.$
与寄左相消：$[-別云数^2\times横]_{X^0}+[2縦\times別云数-別云数^2-2別云数\times横]_{X^1}$
$+[-2縦+2別云数]_{X^2}=0$；得開方式.

ここで、特に興味を引くのは積の表現である。$(股+弦)\times 2股$ が漢文では「因股弦和二段股」股弦和 $\times$ 鈎 $\times$ 2縦 が「因股弦和因鈎二段縦」と表されている。この「因」の使い方は論理学のポーランド記法と同じである。「因」は二つの変数をもつ演算子で、続く二つの変数の積を作るという演算を表す。等号を表す「爲」と組み合わせれば、いろいろな恒等式が漢文で簡潔に表せるために、この表記はその後の和算で広く使われた。特に便利なことは、このような記法を使えば、どのように複雑な演算の組み合わせも括弧を使うことなく一意的に表すことができることである。ただ、任意の多項式を表すには和の記号も必要で、そのために「併」が使われた痕跡があるが、こちらは普及しなかった。

ところで、問題の数値 (3),(4) を使えば最後の開方式は

$$86400_{X^0}-8160_{X^1}+176_{X^2}=0 \tag{7}$$

となる。この解は 30 と 180/11 である。鈎 $=30$ に対しては 股 $=40$, 弦 $=50$ となり、答えと一致する。鈎 $=180/11=16.363636\cdots$ に対しては 股 $=960/19=50.526315\cdots$, 弦 $=11100/209=53.110047\cdots$ となり、こちらも加辞の条件に合っているように見える。

3. 建部賢弘著「算学啓蒙諺解」の消去法

「算学啓蒙」に対しては、その後1672年に星野実宣によって「新編算学啓蒙註解」が出版されたが、この解説には訳が分からないところがあり、この本が一般の人が理解できるようになるには、建部賢弘の「算学啓蒙諺解」が出版された1690年まで待たなければならなかった。「諺解」というのは土着の言葉、つまり日本語による解説という意味で、非常に詳しい解説が附いており、自学自習することができる。

これには、「今按ずるに」と前置きをして、朱世傑のものとは違う建部自身の解法を与えているところがある。大抵は、本来の未知数ではなく、その平方根のような、方程式を立て易くするために未知数を替えて解いてあるものを、もとの未知数に関する方程式に改めている。1. でとりあげた問題に対しては次の解法が与えられている。

今按。直求高術曰．立天元一爲高 $\boxed{0}\boxed{1}$。自之得 $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$。寄位。列只云数自之以高相乗加入寄位共得 $\boxed{0}\boxed{484}\boxed{1}$．以減三之積餘爲因只云数因高二箇開方数 $\boxed{28224}\boxed{-484}\boxed{-1}$。自之爲因只云数冪四段

高再乗冪 $\boxed{796594176}\boxed{-27320832}\boxed{177808}\boxed{968}\boxed{1}$。再寄。列只云数自之以高再乗冪相乗四之 $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1936}$。与再寄相消得開方式 $\boxed{796594176}\boxed{-27320832}\boxed{177808}\boxed{-968}\boxed{1}$。

立天元一：$0_{X^0} + 1_{X^1}$; = 高.

自之得：$0_{X^0} + 0_{X^1} + 1_{X^2}$; [= 高^2] → 寄位。

列只云数自之以高相乗加入寄位共得：$0_{X^0} + 484_{X^1} + 1_{X^2}$; [少如^2 × 高 + 高^2]

以減三之積餘.：$28224_{X^0} - 484_{X^1} - 1_{X^2}$; = 只云数 × 高 × 二箇開方数。

自之：$796594176_{X^0} - 27320832_{X^1} + 177808_{X^2} + 968_{X^3} + 1_{X^4}$;

= 只云数^2×4高^3 → 再寄。

列只云数自之以高再乗冪相乗四之：$0_{X^0} + 0_{X^1} + 0_{X^2} + 1936_{X^3}$;

与再寄相消：$796594176_{X^0} - 27320832_{X^1} + 177808_{X^2} - 968_{X^3} + 1_{X^4} = 0$;
得開方式。

ここで、沢口の演算子「因」が三回使われていることに注意する。私などはこのように無理をすることはないように思うが、技術的な困難を回避せず、真っ向から相手に立ち向かってゆくのが侍の意地であったのであろう。

本来の未知数 X の n 乗根 Y の方程式 $g(Y) = 0$ が得られたとき、これから X に関する方程式 $f(X) = 0$ を導くには、連立方程式

$$\begin{cases} g(Y) = 0, \\ X - Y^n = 0, \end{cases}$$

から Y を消去すればよい。これは $n = 2, 3$ ならば簡単に実行できるが、4 以上になると途端に難しくなる。この問題は田中由真（1661∼1729）を中心とする関西の数学者達によって熱心に研究され、一つづつ n を上げていった。$n = 8$ の場合を扱った中根元圭の「七乗冪演式」(1691) は結果を書くだけに二冊を使っている。

[1] 南権煕, 庚午字本『新編算學啓蒙』と諸版本研究, 書誌學研究 第16輯 (1998)（韓国語）