オ イ ラ ー 積 分 と ガ ウ ス

杉本 敏夫

まえおき

これまで三回にわたる講演

[1]『ガウスが行なった数値計算』（2003.10.25; 続 2004.10.17; 参 2005.10.16; いずれも翌年発行の津田塾大学 数理・計算機科学研究所所報に収録）の中で、青年ガウスがレムニスケート積分および同関数に取り組んだ経過を述べた。それは1796年夏～1797年春で、彼はレムニスケート積分の等分から、積分の逆関数 sl.x の把握、sl.x の整関数 M/N への分解と進めた。従来のガウス研究は、専らレムニスケート関数の形成史に興味が絞られて来たが、ガウス本人は同時平行してオイラー積分（後述）にも取り組んだ。ガウスにおける数学形成史への興味から、私はもっと幅広く、オイラーの強い影響の下にやがてガウス独自の研究方向を見出す過程を明らかにしたい。前回までと同様、従来引用された

[2]『ガウス日記』(Ostwads Klassiker, Bd. 256, 1985, Akademische Verlag) などのガウス資料は勿論用いるが、それに加えてガウスの自筆資料（うち幾つかは未公開）を材料にして、オイラーが開拓したオイラー積分が、如何にガウスへと引き継がれ、発展させられたかを述べたい。

§1. オイラー積分とは

[3]高瀬正仁『dxとdyの解析学－オイラーに学ぶ』(2000.10, 日本評論社)、

[4]同氏の講演『ガウスの数学日記について』（2003, 2004; 津田塾大学)、および同氏から頂いた手紙により、多くの知見を得たことに感謝する。

現在、第一種オイラー積分はベータ関数、第二種オイラー積分はガンマ関数と理解されているが、オイラーより後の命名である。本稿が扱う時代には、後記の[11]オイラー『積分計算教程』が扱ったいわゆる「二項微分の積分」すなわち

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} \quad や \quad \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

が第一の対象であり、第二の対象は

$$\int x^{m-1}dx(lx)^n \quad や \quad \int x^{m-1}dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n$$

の形の積分である。ただし l はオイラーやガウスの時代は双曲線対数 log. hyp. を表した。本稿では現行の記法に倣って log で表す場合がある。[3]高瀬氏によると、オイラー積分の概念は後にはもっと拡張され、アーベルによる「一般的な形の代数関数の積分」にまで発展すると言うが、本稿で扱う範囲は「いっそう一般的な形状のオイラー積分」([3]164頁)に止めておき、具体的には、上記の第一種をまず考え、第二種は、論述の都合により、次回に廻す積もりである。

§2. 従来の考え方

[5] 高木貞治『近世数学史談』(1995.8,岩波文庫)36〜37頁によると、

「ガウスは前から既に

$$\arc\sin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

からの類推に基づいて三角函数の拡張を試みていたのであって、手記の中に

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

などに関する種々の計算が散見する。多幸なる 1797 年1月8日に至って、ゆくりなくも正しきもの $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ を捕らえ得たのである。」

とある。『史談』は専らレムニスケート関数の形成にのみ興味が絞られている。これは[6]クライン『十九世紀の数学発展についての講義』(原著, 1926, 邦訳 1995,共立出版) も同様である。

しかし私の立場はこれとは異なる。ガウスは初め、広くオイラー積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}, \quad \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

などに興味があった。その証拠に[2]日記第51項(1797. 1. 8)に

「れむにすけーとノ研究ヲ開始セリ」

と書きながら、なおも一般的なオイラー積分を探求し、日記第60, 62項(3.19〜21) レムニスケートの5等分に成功してから初めて的を絞ったのである。

§3. ルジャンドルとの関係

[7]ルジャンドルに論文『楕円的超越量について』(1792)がある。これはルジャンドルの立場で第一種、第二種の区別を設けてオイラー積分を整理した書である。ガウスもこの書を1冊所有し、書き込みもある。しかし彼がこれを入手したのは今問題にしている時期(1796〜97年)よりも後に属すると思われる。その理由

略 年 表

1796年	[32]	級数反転 $\int dx/\sqrt{(1-x^3)}$	（9月9日）
	[33]	級数反転 $\int dx/\sqrt{(1-x^n)}$	（9月14日）
		オイラー『積分学 第I巻』を借りた。	（日付不明）
	[44]	補間公式*	（11月25日）
	[48]	数値積分*	（12月26日）
	[49]	ラグランジュの定理の新証明	（12月27日）
1797年	[50]	三つのレムニスケート積分	（1月7日）
	[51]	レムニスケートの研究開始	（1月8日）
	[52]	オイラーの規準	（1月10日）
	[53]	オイラー積分の値のπへの帰着	（1月12日）
		オイラー『積分学 第II巻』を借りた。	（1月14日）
	[54]	$\int x^n dx/(1+x^n)$	（1月某日）
	[59]	$\int e(-t^{\alpha})dx$ と $\int du/\sqrt[\beta]{(1+u^{\gamma})}$ の関係	（3月2日）
	[60]	レムニスケートの n 等分	（3月19日）
	[61]	レムニスケート無限積展開の係数	（3月某日）
	[62]	レムニスケートの5等分	（3月21日）
	[63]	レムニスケート研究の成果	（3月29日）

[ ]内は日記項目の通し番号。＊[44]と[48]は次回に扱う。

は、彼はルジャンドルが用いた完全積分の量 F_{1k} や E_{1k} などには全く触れず、そのほかにも幾つかの証拠が見出せるからである。私は、この時期におけるガウスがルジャンドルを経由せず、直接[11]オイラー『積分計算教程』から学んだ、という前提で話を進めることにしたい。

§4．オイラー著作目録

ガウスがオイラーから直接学んだことを示す決定的な証拠がある。

[8]『ライステ』 Chr. Leiste, Die Arithmetik und Algebra … ,1790.

とは、ガウスがライステ著『算術・代数』教科書の白紙の部分に記入した数学的内容によって有名である（[1]2003.10.の§1を参照）。その中の白頁すなわち目次に続く頁及び本文の1～4頁の対頁、計5頁分にわたって『オイラー著作の完全な目録』として著書・論文を並べた中に、次の6巻が記入されている。

Introductio ad analysin infinitorum, 2 T., 1748.4

[9]無限解析序説、全2巻、高瀬氏の翻訳、2001,2005, 海鳴社。

Institutiones Calculi Differentialis. 1753.4

[10]微分計算教程。

Institutiones Calculi Integralis, 3 Tom, 1768-72.8

[11]積分計算教程、全３巻。

この記入は《いつ》成されたか？　それは、ガウスが論文「ラグランジュの定理の《新証明》」の元になる計算を[８]ライステ５頁、10～12頁に記入する直前の頁であり、さらにこの新証明は[２]『ガウス日記』第49項(1796.12.27)に記入された。目録の記入はこの日付以前に成されたことは確実である。（ガウスによる「ラグランジュの定理」の証明は、2006年夏、京都大学数理解析研究所で開催された「数学史の研究」集会で「実際家としてのガウス」の題で報告した。）

青年ガウスがオイラーに学んだことは確定したが、青年特有の客気により、オイラーの証明を丸呑みにはせず、むしろ格好の練習問題と考えて、自力で証明を試みた箇所が多い。ライステは言わばガウスの《演習用の雑記帳》である。その記述には中断した状態も見られる。

[12] G. W. Dunnington, Carl Friedrich Gauss, Titan of science, 1st ed., 1955; rev. ed., by J. Gray, M. A. A., 2004.

銀林浩他訳、ダニングトン『ガウスの生涯』、東京図書、1976.

この書の付録〔邦訳では省かれた〕に、「ガウスが学生時代にゲッチンゲン大学図書館から借りた本」の一覧表という非常に貴重な文献が付いている。ただし、《ガウスの数学形成史に於ける重要な期間：1796年４月～８月》は、元のカードが失われたため欠けていて、誠に残念である。「借りた本」の一覧表によれば、

1797年１月14日、オイラー『積分計算教程』第Ⅱ巻、

５月10日、オイラー『積分計算教程』(巻数を欠く、第Ⅲ巻と推定)

が借り出された。これに対し、第Ⅰ巻は1796年秋に借り出された可能性が高い。

§５．オイラー原著の内容一覧

[11]『積分計算教程』は、前言(Praenotanda)に諸定義がある。次いで

前書（Liber Prior）一変数関数の研究は、前編（Pars Prima）一次の微分関係、後編（Pars Secunda）二次及び多次の微分関係、の二つの編を含む。

後書（Liber Prior）多変数関数の研究は、前編（Pars Prima）一次の微分関係、後編（Pars Secunda）二次及び多次の微分関係、の二つの編を含む。

という整然とした構成をもつ。

オイラー全集第11巻は『積分計算教程』第I巻であり、前言に続き、前書、前編のうち、第一部（Sectio Prima）微分式の積分、第二部（Sectio Secunda）微分方程式の積分、第三部（Sectio Tertia）さらに複雑な微分方程式の解法、から成る。今回の発表の主題は、前書、前編、第一部　微分式の積分に限られる。以下、本稿に於ける引用は、断らずとも、専ら第I巻のみである。

まず、「前言」から、幾つか重要な定義を多少現代化し、意訳しておく。

定義1．積分計算とは、与えられた微分関係から、同じ量の相互関係を求める方法であり、この操作を積分と言う。定義2．変数 x の関数を Y とし、x による微分 dY を $=Xdx$ とするとき（ただし X は x の或る関数とする）Y を $=\int Xdx$ で表す。途中二つの定義は省略する。定義5．或る微分関係から求めた関数が代数的に表されないとき、《超越的》と呼ばれる〔後の§18 を参照〕。

前書、前編、第一部「微分式の積分」は、九つの章から成る。現代的表現によって要約しよう。1章．有理式の積分。2章．無理式の積分。3章．無限級数で与えられた式の積分。4章．対数と指数関数を含む積分。5章．逆正弦を含む積分。6章．正弦と余弦を含む級数の積分。7章．近似積分〔数値積分のこと〕。8章．再帰式〔漸化式のこと〕。9章．無限積展開。

§6．特殊オイラー積分

今回の主題であるオイラー積分とは、前節に述べた[11]の8章と9章の主要な内容である《二項微分の積分》のことである。オイラーは先ず、一般的な

$$\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

を考えた。ここでは《一般に》は括弧内の xの指数 nと根号の肩のνが異なる。ガウスが[2]『日記』第32項(1796.9.9)および同時期の紙片 Math-25-(2)ウラで扱ったのは、分母の括弧内の xの指数が3であり、根号は平方根である。ガウスはその級数展開のみならず、級数の反転〔[1]参§20〕まで示した。次に

[13]ガウス全集 C. F. Gauss'sche Werke, Göttingen, 1863-1933, Repr. Olms. からX-1巻、482頁の Nachbildung des Tagebuchs(Notigenjournals)の表題の下に採録されたファクシミリ（頁付け無し）及び 383～577頁の活字化を引用する。

$$\text{Si } \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \text{ stat. } \Pi : x = z \text{ et } x = \Phi : z \text{ erit}$$

$$\Phi : z = z - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{112}z^7 - \frac{1}{1792}z^{10} + \frac{3\,z^{13}}{1792\cdot 52} - \frac{3.185\,z^{16}}{1792.52.14.15.16} \quad \text{Sept. 9}$$

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ stat[uatur] $\Pi{:}x = z$ et $x = \Phi{:}z$, erit

$$\Phi{:}z = z - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{112}z^7 - \frac{1}{1792}z^{10} + \frac{3}{1792.52}z^{13} - \frac{3.185}{1792.52.14.15.16}z^{16}\cdots$$ [1796] Sept. 9.

モシモ $\int dx/\sqrt{(1-x^3)}$ ヲ $\Pi : x$ ト置キ、[逆関数ヲ] $x= \Phi : x$ ト置クナラバ、次ノ様ニナルデアラウ。

$$\Phi : x = x - (1/8)x^4 + (1/112)x^7 - (1/1792)x^{10} + (3/(1792\cdot52))x^{13} - ((3\cdot185)/(1792\cdot52\cdot14\cdot15\cdot16))x^{16} + \cdots$$ [1796年9月9日]

ガウスは $x=\Psi(t)=\int dt/\sqrt{(1-t^3)}$ の級数展開(書いていない、私が補入)

$$x = t + (1/8)t^4 + (3/56)t^7 + (1/32)t^{10} + (35/1664)t^{13} + (63/65536)t^{16} + \cdots$$

から、級数の反転([1]参§20)によって、逆関数 $t=\Phi(x)$ の級数を得たのである。

$$t = x - (1/8)x^4 + (1/112)x^7 - (1/1792)x^{10} + (3/93184)x^{13} - (37/20873216)x^{16} + \cdots$$

上記の引用文の計算は正しい。後の時代の知識によって補足すれば、積分 $x=\Psi(t)$ は楕円積分の一種であり、$u^2-u+1=0$ の二虚根を $u,\ v=(-1\pm\sqrt{(-3)})/2$ と置くとき、$\Psi(t)=(2/\sqrt{3})\int du/\ \ [(1-ut^2)(1-vt^2)]$ の如き標準形(t^2の係数が虚なる楕円積分で扱いにくい)にまで変形できる。ガウスは当時、ルジャンドルの標準形を知らず、級数で表し、しかも逆関数を考えた所に彼の独自性がある。後の時代には、$u,\ v$ が α, β に一般化された標準形に近い形の積分が、[2]日記、第105項(1800.5.6)に出て来る。レムニスケート積分は一般化されて楕円積分に進化し、逆関数としての楕円関数が主題になる。それは本稿の扱う時代を遥かに超える。

§4に述べた推測のように、ガウスは1796年9月以降にオイラー『積分計算教程 第I巻』を借り出して、そこで《特殊オイラー積分》$\int dt/\sqrt[3]{(1-t^3)}$ など[§10 以下で詳述]に接し、興味を掻き立てられたのである。『日記』第32項の積分と《特殊オイラー積分》とは、微妙な点ながら、分母の根号の肩の指数が《2と3の違い》をもつ。そして、後者の《特殊オイラー積分》こそが興味深い性質をもつのである。

一方、私が講演([1]参§20〜21)で取り上げた《レムニスケート積分》は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

の形であって、一見 x の指数4と平方根が異なるように見えるが、分母を

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$$

と見做せば、次に述べる《特殊オイラー積分》の範疇に入る。[4]高木『史談』37頁には、元の級数

$$u = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{9}x^9 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{13}x^{13} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{17}x^{17} + \cdots\cdots,$$

と反転した級数

$$x = u - \frac{1}{10}u^5 + \frac{1}{120}u^9 - \frac{11}{15600}u^{13} + \frac{211}{3536000}u^{17} - \frac{1007}{318240000}x^{21} + \cdots\cdots$$

が掲げられた。〔x^{21} の係数の分子は 1607 に訂す。〕

[11]オイラーの8章と9章で特に詳しく扱われ、ガウスも執心であったのは、

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

の形、すなわち分母の括弧内の x の指数 n と根号の肩の n とが《同じ場合》であり、私はこれを強調のため《特殊オイラー積分》と呼ぶことにする。

ガウスは、$n=3$ と $n=4$ の場合の特殊オイラー積分を詳細に扱った。しかし $n=4$ の場合はレムニスケート積分であり、従来[5]高木『史談』その他の文献で屢々取り上げられた。ガウス自身はこれと平行して $n=3$ の場合(未公開)を特に詳しく扱っている。本稿において可能な限り原文紹介の形で紹介する。

§7．基本形への帰着

以下、[11]『積分計算教程』からの引用は『オイラー全集』の頁付けによる。

オイラーは「前書、前編、第一部　微分式の積分」の111～114節(64～66頁)で、二つの部分積分の公式を挙げた。《第Ⅰの公式》は、

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} - \frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

であり、x の指数を下げるのに用いられる。《第Ⅱの公式》は

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{\nu x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu+n(\mu+\nu)} + \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

であり、$(a+bx^n)$ の指数の低下に用いられる。ガウスは、[8]『ライステ』91～92頁に、自己流の記法で次を記入した。『ライステ』からの引用は、版権の事情により私の模写で代用する。正式の許可を得てファクシミリを示したい。

ライステ91頁 $$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^c} = \frac{-x^{a-b}}{b(c-1)(1+x^b)^{c-1}} + \cancel{-}\frac{a-b}{b(c-1)}\int \frac{x^{a-b-1}dx}{(1+x^b)^{c-1}}$$
$$= \frac{1}{a-bc}\,\frac{x^{a-b}}{(1+x^b)^{c-1}} - \frac{a-b}{a-bc}\int \frac{x^{a-b-1}}{(1+x^b)^c}dx$$
$$= \frac{1}{a\cancel{-b}}\,\frac{x^a}{(1+x^b)^{c-1}} - \frac{a-bc+b}{a\cancel{+bc}}\int \frac{x^{a+b-1}dx}{(1+x^b)^{c\cancel{+1}}}$$

ライステ92頁 $$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^c} = \frac{1}{b(c-1)}\,\frac{x^a}{(1+x^b)^{c-1}} + \frac{bc-a-b}{bc}\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^{c-1}}$$
$$\int \frac{xx\,dx}{(1+x^4)^{5:4}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

ガウスは何でもオイラーを丸写しにするのは避けて、一つの練習問題と考えてみずから解こうと試みた。ガウスと雖も誤りを犯す。91頁の１行目と２行目は正しい。３行目は誤りで、92頁の１行目のように（ただし後項の係数の分母は $bc-b$ に訂す）にする。92頁の２行目は、訂正した公式の $a=3,\ b=4,\ c=5/4$ の場合であり、次の後項を補うべきである。 $-2\int\frac{xx\,dx}{(1+x^4)^{1:4}}$

この部分積分の公式が用いられる理由は、$m,\ n,\ \mu,\ \nu$ などの組み合わせによって多種類の積分があり得るものを、次第に幾つかの《基本形に帰着させる》ことができるからである。オイラーは $n=3$ の場合は６個の基本形、$n=4$ の場合は 10 個の基本形にまとめられることを示した。後者は§16 に譲る。

§８．部分分数への分解

基本形の定積分のうち、或るものは積分変数の変換により、無限区間の定積分

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

に変形され、さらに部分分数に分解される。オイラーはこの過程を丁寧に辿る。それは[10]『微分計算教程』（『オイラー全集』第10巻、頁付けは全集による）417節(663頁)に載り、[11]『積分計算教程』351節(222頁)に再び載った。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=&-\frac{2}{n}\cos.m\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.\omega+xx)}+\frac{2}{n}\sin.m\omega\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}\\&-\frac{2}{n}\cos.3m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.3\omega+xx)}+\frac{2}{n}\sin.3m\omega\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x\sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega}\\&-\frac{2}{n}\cos.5m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.5\omega+xx)}+\frac{2}{n}\sin.5m\omega\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x\sin.5\omega}{1-x\cos.5\omega}\\&\qquad\vdots\\&-\frac{2}{n}\cos.\lambda m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.\lambda\omega+xx)}+\frac{2}{n}\sin.\lambda m\omega\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x\sin.\lambda\omega}{1-x\cos.\lambda\omega},\end{aligned}$$

ガウスもこの公式をライステ 27 頁に載せた。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)}{}^{n}=&-\frac{2}{k}\cos\frac{m\pi}{k}\,l\sqrt{(1-2x\cos\frac{\pi}{k}+xx)}\\&-\frac{2}{k}\cos\frac{3m\pi}{k}\,l\sqrt{(1-2x\cos\frac{3\pi}{k}+xx)}\\&-\&c\\&-\frac{2}{k}\cos\frac{im\pi}{k}\,l\sqrt{(1-2x\cos\frac{i\pi}{k}+xx)}\\&+\frac{2}{k}\sin\frac{m\pi}{k}\,\text{A.tg}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{k}}{1-x\cos\frac{\pi}{k}}\\&+\frac{2}{k}\sin\frac{3m\pi}{k}\,\text{A.tg}\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{k}}{1-x\cos\frac{3\pi}{k}}\\&+\&c\end{aligned}$$

これは殆どオイラーの丸写しに近い。と言うより、必然的にこう変形される。

§9．無限積分の値

部分分数への分解は、極限移行により正弦関数の或る値に帰着する。[3]高瀬『dxとdyの解析学』168～171頁に詳しい。変形の途中経過の採録を省略する。

オイラーは349節(220頁）で有限区間の完全積分

$$\int \frac{x^{n-k-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \qquad (x=0 \text{ から } 1 \text{ まで})$$

が、置換 $\frac{x^n}{1-x^n}=z^n$ または $x^n=\frac{z^n}{1+z^n}$ によって、無限区間の完全積分

$$\int \frac{z^{n-k-1}dz}{1+z^n} \qquad (x=0 \text{ から } \infty \text{ まで})$$

に帰着することを示した。

351節（225頁）では、無限区間の完全積分の値が

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}} \qquad (x=0 \text{ から } \infty \text{ まで})$$

となること、352節（226頁）ではさらに

$$\int \frac{z^{n-k-1}dz}{1+z^n}=\int \frac{z^{k-1}dz}{1+z^n}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{k\pi}{n}} \quad (x=0 \text{ から } \infty \text{ まで})$$

となることを示した。349節の結果と併せて、目標だった有限区間の完全積分は

$$\int \frac{x^{n-k-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}=\int \frac{x^{k-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{k\pi}{n}} \qquad (x=0 \text{ から } 1 \text{ まで})$$

となる(352節、226頁)。

[2]ガウス日記、第53項(1797.1.12)の

「 $\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$ 　　 [$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$]

ノ完全積分ガ円ノ求積ニ帰スル事ヲ考察セリ。」

また第54項（1797.1.日付なし）の

「 $\int \frac{x^n \partial x}{1+x^m}$ 　　 [$\int \frac{x^n dx}{1+x^m}$]

ヲ決定スル簡易ナル方法」

などの記事は、オイラーを参照したか、または自身への練習問題と考えて、みずから導いたのかも知れない。（ファクシミリは前記の[13]ガウス全集より）

これらの完全積分の $n=3$ の場合が、次節の主要な話題となる。

§10．特殊オイラー積分の分類

先に§7で述べたように、$n=4$ の場合はレムニスケート積分であり、[1] 2003年の§2と§4～5において詳細に述べた。本稿の§16で、整理して再び述べる。ここでは、$n=3$ の場合におけるガウスの詳細な研究を紹介したい。

$n=3$ の場合、部分積分の公式（§7）を用いて x や $(1-x^3)$ の指数を下げていくと、6つの基本形に帰着する。[11]『積分計算教程』392節(250頁)の順序に並べよう。ただし完全積分値を示す文字はオイラーとは変えた。

（i） $\int x^2dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}=\int dx=1,$　　（ii） $\int x^2dx/\sqrt[3]{(1-x^3)}=\int xdx=1/2,$

（iii） $\int x^2dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^0}=\int x^2dx=1/3,$　（iv） $\int dx/\sqrt[3]{(1-x^3)}=2\pi/3\sqrt{3},$

（v） $\int xdx/\sqrt[3]{(1-x^3)}=A$,　　（vi） $\int dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}=B$.

これらの値をガウスに従って紹介しよう。彼はライステ 33 頁に一まとめにして書いた。ここでは少しづつ区切りながら紹介する。

33 頁上段

$$\int\frac{x^2dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}}\ \text{ist Algebraisch}$$

$\int x^2dx/(1-x^3)^{1/3,\ 2/3}$ ist Algebraisch 〔は代数的である。〕

ここでは、積分区間0から1までの定積分〔分類(ii)と(i)〕

$\int x^2dx/(1-x^3)^{1/3}$　及び　$\int x^2dx/(1-x^3)^{2/3}$

が、変数変換 $1-x^3=y^3$ によって、同じ区間の定積分

$\int xdx$　　及び　$\int dx$

に帰着することを述べる。オイラーの Algebraisch(代数的) の場合である。

$y=\sqrt[3]{(1-x^3)}$ 及び $x^2dx/y^2=-dy$ を用いて変換すれば、

$\int x^2dx/\sqrt[3]{(1-x^3)}=\int ydy$　及び　$\int x^2dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}=\int dy,$

0から 1 まで積分すれば、1 及び 1/2 になる。オイラーの分類によればいま一つ代数的な積分(iii)、すなわち分母が1なる場合、0から1までの積分により $\int x^2dx/(1-x^3)^0=\int x^2dx=1/3$ がある。ガウスは余りに当然なので省略した。

次に分類(iv)の場合が取り上げられる。

上段続き

$$\int\frac{xdx}{(1-x^3)^{2:3}}\ \text{fiat}\ 1-x^3+x^3y^3=0$$
$$=\frac{dx}{xyy}=\frac{-dy}{1-y^3}\ \text{also v. kr. abhaengig}$$

$\int x\,dx/(1-x^3)^{2:3}$ fiat $1-x^3+x^3y^3=0$ 〔$1-x^3+x^3y^3=0$ ト置ケ、次ノ様ニナル〕
$= dx/xyy = -dy/(1-y^3)$ also v. kr. [von Kreise] abhaengig.
〔従ってこれもまた円周に依存する。〕

ガウスは屢々ラテン語とドイツ語を混ぜて書く。本稿ではラテン語を仮りにカタカナで訳す。ガウスは初め、$1-x^3+x^3y^3=0$ と書いて $1-x^3-x^3y^3=0$ に書き直した。しかし、続く $-dy/\sqrt[3]{(1-y^3)}$ の分母の符号を直すには到らなかった。そこでここでは $-dy/\sqrt[3]{(1+y^3)}$ と解釈することにする。《意解》！ [8]ライステは言わばガウスの《雑記帳》であり、他人の目を予想していない。至る所に誤り（特に符号の誤り）を含む。前後の関係から訂正しつつ読まねばならない。

そこで、この場合は置換によってまず $z=0$ から∞までの積分

$$\int\frac{dz}{1+z^3}=\int\frac{z\,dz}{1+z^3}=\frac{\pi}{3\sin.\frac{1}{3}\pi}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

に変換され、§ 9 で見たように正弦を分母にもつ値 $2\pi/3\sqrt{3}=1.209199\cdots$ に帰着する。オイラーもガウスも π を含む量に帰着すれば、数値までは表示しない。

§11．特殊オイラー積分の分類（続）

オイラーは、特殊オイラー積分を《代数的》と《超越的》に分類した。

前節の半円周 π に帰着する積分の他に、未知の超越量を生ずるものがある。ガウスは $n=3$ の場合、新しい超越量に直面した。

ライステ 33頁　中段

$\int\frac{x\,dx}{(1-x^3)^{1:3}}$ es sei $1-x^3+x^3y^3=0$
$=\frac{dx}{y}=\frac{y\,dy}{(1-y^3)^{4:3}}$ woraus wenigstens
eine particulären Integration folgt

$\int x\,dx/(1-x^3)^{1:3}$ es sei $1-x^3+x^3y^3=0$ 〔$1-x^3+x^3y^3=0$ と置け、次の様になる〕
$=dx/y=y\,dy/(1-y^3)^{4:3}$ worauss wenigstens 〔ここから少なくとも〕
eine particuläre Integration folgt. 〔或る特殊な積分が従う。〕

中段続き

es sei $1=x^3+y^3$
$=\frac{x\,dx}{y}=\frac{-y\,dy}{(1-y^3)^{4:3}}$ welches gleichs
eine part. Int. gibt

es sei $1=x^3+y^3$ 〔$1=x^3+y^3$ と置け、次のようになる〕
$=x\,dx/y=-y\,dy/(1-y^3)^{1:3}$ welches gleichs eine part. Int. 〔parti-

culäre integration] gibt. 〔それは或る特殊な積分が与えるものに等しい。〕

この変数変換は x と y を入れ替えるのみ、定積分には役に立たない。

中段続き

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{2:3}} \quad \text{sit} \quad x = \frac{1}{y}$$
$$= \frac{-dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$

$\int\ dx/(1-x^3)^{2:3}$ sit $x=1/y$ 〔$x=1/y$ ト置ケ〕

$=-dy/(1-y^3)^{2:3}$ 〔ノ様ニナル。〕

§12．新たな超越量

前節で、ガウスは新たな超越量〔分類(v)と(vi)〕に直面した。この先で一々積分式を書くのは煩わしいので、0 から x までの積分を

$$\mathrm{f}(x) = \int xdxx/\sqrt[3]{(1-x^3)}, \qquad g(x) = \int dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$$

と置き、完全積分の値を $f(1)=A$, $g(1)=B$ と置く。ガウスはこれらの値を数値として求めるため、種々の変換を施した。まず級数：

$$f(x) = (1/2)x^2 + (1/15)x^5 + (1/36)x^8 + (14/891)x^{11} + (5/486)x^{14} + \cdots$$
$$g(x) = x + (1/6)x^4 + (5/63)x^7 + (4/81)x^{10} + (110/3159)x^{13} + \cdots$$

に展開する。残念ながら、この二つの級数は $x=1$ のときの値は求めにくい。そこで前節に述べたような変換により、計算可能な級数に直す。

ガウスは、二つの超越量のうち、扱いが比較的に簡単な $g(1)=B$ のほうを先にライステ 34頁で求めているので、それを引用しよう。

34頁上段

$$\text{Sit} \quad 1 = x^3 + y^3 \qquad \frac{dx}{yy} = \frac{dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$
$$1 - x^3 + x^3y^3 \qquad \frac{dx}{xxyy} = \frac{-dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$

Sit $1=x^3+y^3$ 〔$1=x^3+y^3$ ト置ケ、〕

$dx/yy=dy/(1-y^3)^{2:3}$ 〔ノ様ニナル。〕

$1-x^3+x^3y^3\,[=0]$ 〔 $1-x^3+x^3y^3=0$ ト置ケ、〕

$dx/xxyy=-dy/(1-y^3)^{2:3}$ 〔ノ様ニナル。〕

ここでは二つの変数変換を試みている。初めの変換は x と y が入れ替わるだけで役に立たない。次にガウスは $1-x^3+x^3y^3=0$ と書いたが、彼が次に行なった計算から考えても、ここは符号を変えた $1-x^3-x^3y^3=0$ でなければならず、続

いて $dx/xxyy=-dy(1+y^3)^{2:3}$ とせねばならない。前節の《意解》に相当。

そこで、$g(x)=\int dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$ は

$$G(y)=\int dy/\sqrt[3]{(1+y^3)^2}$$
$$=y-(1/6)y^4+(5/63)y^7-(4/81)y^{10}+(110/3159)y^{13}-+\cdots$$

に変形される。$g(x)$ と比べれば $G(y)$ は偶数番目の符号が変じた交代級数になる。いま簡単のため $k=\sqrt[3]{(1/2)}$ と置くとき、$|x|\leqq 1$ なる範囲で

$$-g(-x)=G(x),\quad g(1)=B,\quad g(k)=B/2=G(1)$$

となる。実用的には $G(x)=-g(-x)$ だから、$G(x)$ を設ける必要はない。

ガウスは正項級数 $y=g(x)$ 及び私が z と書いた欄は交代級数 $z=G(x)$ によって計算している。表の一部を ≈ によって省略した。

34頁中段

x		
0	0	0
0,1	0,100016 67460	0,099983 331270
0,2	0,2	
0,3	0,3	
	≈	≈
0,9		
1.0	1.766	0.8833
∞	3.53	1.73

x	y	z
0	0	0
0, 1	0, 100016 67460	0, 099983 3[4126]
0, 2	0, 2[00267 68763]	[0, 199734 34418]
0, 3	0, 3[01367 65441]	[0, 298667 07098]
	≈	≈
0, 9	[1, 085721 44392]	[0, 817129 69393]
1, 0	1, 766[638 75025]	0, 8833[19 37512]
∞	3, 53[3277 50044]	1, 7[66638 75025]

0.79370058	0, 793700 52598
66141715	0, 066141 71050
15748027	0, 015748 02631
4899386	0, 004899 38596
1727348	0, 001727 34761
654953	0, 000654 95264
260430	0, 000260 44900
107103	0, 000107 11106
45162	0, 000045 16516
0.883284704	0, 883284 67423

ガウスは $g(1)=1,766$, $G(1)=0,8833$, $g(\infty)=3,53$, $G(\infty)=1,78$ と書いているが、勿論これらの値は直接、級数によって求めたのではない。級数は $x=1$ では仲々収束しないから。彼は巧妙にも

$$g(k)=g(\sqrt[3]{(1/2)})=B/2=0,883319\ 375142\ 725$$

なる関係を利用したのである。$k(\sqrt[3]{(1/2)})=0,793700\ 525984\ 100$ から、下側の計算で $B/2$ を求め、2倍して $B=1,766569\ 35608$ とした。しかし下側の計算は途中項までなので、不足値である。私の計算では $B/2=0,883319\ 375142\ 725$, $B=1,7666387\ 750285\ 450$ となる。彼は級数を k^{25} の項まで計算しているが、$k^3=1/2$ を利用すれば、計算は見かけ程には困難ではない。

$g(x)$ を $|x|>1$ なる範囲に拡張するには、《一種の加法定理》によって、

$$x>1 \text{ では } g(x)=2B-g(1/x); \qquad x<-1 \text{ では } g(x)=-B-g(-1/x)$$

を用いればよい。或る制限付きで虚数値にも通用する。$|x|=1$ なる円周上の値は、級数の収束が悪いので、特別な工夫を要する（詳細は略す）。

付説　$k=\sqrt[3]{(1/2)}$ の精密な値

ガウスは $k=\sqrt{(1/2)}=0,79370058$ を既知としているが、7桁の常用対数表から8桁の値は求めにくい。そこで、ライステ 47 頁に残された $1/k=\sqrt[3]{2}$ の計算を引用しよう。$2^{10}/10^3=1,024=1+3\times0,008$ を利用し、級数は $x=0,008$ と置き、次の通り：

$$(1+3x)^{1/3}=1+x-x^2+(5/3)x^3-(10/3)x^4+(22/3)x^5-(154/9)x^6$$
$$+(374/9)x^7-(935/9)x^8+(21505/81)x^9-+\cdots$$

ライステ 47 頁　$\sqrt[3]{1.024}=$

+1.00000 00000　　　−0.00006 40000
　00800 00000　　　　　　136 53
　　8533 33　　　　　　　　　44
　　　2 402953

1.00800 08535 73
　　6 40136 57

1.00793 68399 1

also $\sqrt[3]{2}=1{,}25992\ 10498$

$\sqrt[3]{1,024}$ =	+1,00000 00000 00000 0	
	0,00800 00000 00000 0	−0,00006 40000 00000 0
	0,00000 08533 33333 3	−0,00000 00136 53333 3
	0,00000 00002 40298 7	−0,00000 00000 04485 6
	0,00000 00000 00087 1	−0,00000 00000 00001 7
	1,00800 08535 73719 1	−0,00006 40136 57820 6
	−0,00006 40136 57820 6	
	1,00793 68399 15898 5	

Also 〔そこで 10/8 を掛けて〕 $\sqrt[3]{2}=1,25992\ 10498\ 94873\ 1$ 〔を得る。〕

ガウスは正項の和と負項の和を別々に求め、後で合併している。$5\times 0,008^3/3$ は、$10\times 0,008^3=0,00000512$ を 6 で割って 0,0000008533… とした。次の項は 2倍して 0,0008 を掛けた。154倍は ×7, ×22 として、等々。このように、凡ては得意の暗算で進める。彼はここに引用しただけの計算によって、小数第 11位まで得た。私の計算と比べて見れば、彼の計算は正しい。Also[そこで] の一言は、10倍して 8で割ることを意味するが、ここでは 10,0793… を見て、暗算で 1,2599… を書き下すことが出来た。

これで $\sqrt[3]{2}$ は得られたが、$k=\sqrt[3]{(1/2)}$ が欲しい。多桁の数の場合、ガウス方式の逆数の求め方を試みる。その原理は、u の逆数を得るため、まず u に適当な g を掛けて 1 よりも僅かに大きい $ug=v=1+j$ を作る。次に $1/v=1/(1+j)=1-j+j^2-j^3$ を求め、これを $w=1/v$ とし、再び w に g を掛ければ、$wg=(1/v)\cdot g=(1/ug)\cdot g=1/u$ を得る。

次に掲げるのはあくまで私の試みであり、ガウスの計算は見当たらない。

	$u\times 0,8$	$=$ 1,00793 68399 15898 5
－）	$u\times 0,8\times 0,0075$	$=$-0,00755 95262 99369 2
	$v=1+j$	$=$ 1,00037 73136 16529 3
	$1-j$	$=$ 0,99962 26863 83470 7
	$+j^2$	$=$ 0,00000 01423 65565 2
	$-j^3$	$=$-0,00000 00000 53716 5
	$+j^4$	$=$ 0,00000 00000 00020 3
	$w=1/v$	$=$ 0,99962 28286 95339 7
	$w\times 0,8$	$=$ 0,79969 82629 56271 8
－）	$w\times 0,8\times 0,0075$	$=$-0,00599 77369 72172 0
	$k=\sqrt[3]{(1/2)}$	$=$ 0,79370 05259 84099 8

その他に、常用対数表により $u=\sqrt[3]{(1/2)}$ の逆数の不足近似値 $g=0,7937$ を求め、

$ug=1-j$	$=$ 0,99999 93373 01560 8
$1+j$	$=$ 1,00000 06626 98439 2
$+j^2$	$=$ 0,00000 00000 00439 2
w	$=$ 1,00000 06626 98878 4
$k=w\times g$	$=$ 0,79370 05259 84099 8

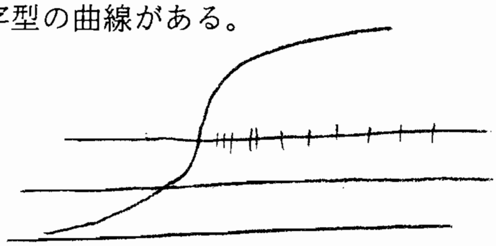
とする方法（一見簡単そうに見える）がある。しかし、4 桁の数の掛け算を含んでいるので、暗算には適さない。これまで屡々述べたように、ガウスは 2 桁の数の掛け算と割り算は暗算で行なった。それを超えるときは常用対数表に依ったが、使える桁数は 7 桁に限られる。それを超える多桁の数の扱いに関する実例は、[1] 私の講演で詳細に述べた。

現在、数学史の研究に計算機の使用例が屡々見られる（私もその一例）。《検算》としては十分妥当性を持つが、当面のガウスの計算過程の研究には、彼が《利用できた武器》に限定しなければ、重大な見落としを冒す恐れが懸念される。

§ 1 3． S字型の曲線

［8］ライステ33頁、大きなＳ字型の曲線がある。

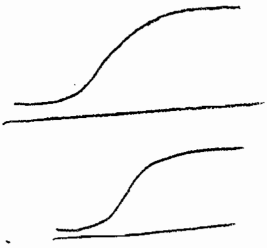
33頁下段



$$x = \frac{1}{y}$$

$$\varphi x + \varphi \frac{1}{x} = C, =$$

$$\varphi x = \quad x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{2.5}{3.6}\ \frac{1}{7}x^7$$



$$\varphi \frac{1}{x} = C - x - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \&c$$

$$x = y - \frac{1}{6}y^4 + \frac{2}{63}y^7 - \frac{13}{36.63}y^{10}\cdots$$

ガウスの $\phi(x)$ は私の $g(x)$ に、$\phi(1/x)$ は私の $2B-g(1/x)$ に相当し、C は私の $2B$ に等しい。３行目の級数は前節で見たように

$$g(x)=x+(1/6)x^4+(5/63)x^7+(4/81)x^{10}+(110/3159)x^{13}+\cdots$$

を表している。4行目は $2B-g(1/x)$ を表す。５行目は、$t=g(x)$ と置いて級数を反転させたものであり、

$$x=t-(1/6)t^4+(2/63)t^7-(13/2268)t^{10}+(23/22113)t^{13}-\cdots$$

となる。これはレムニスケート積分の級数の場合に、級数を反転させたレムニスケート関数の級数に相当する。私の講演（［１］参 §20～21）を参照。

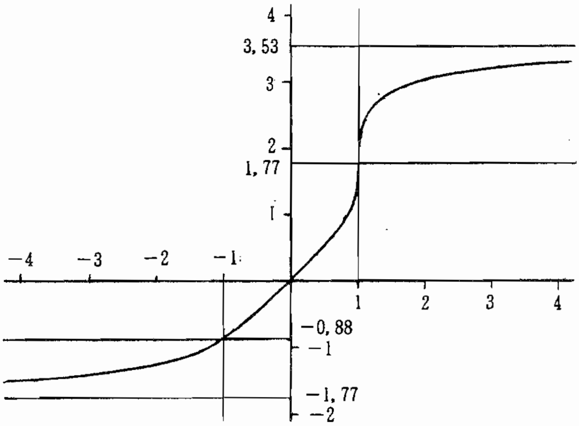
曲線を描くために次表を計算する。ただし $k=\sqrt[3]{(1/2)}=0.793701$,　$1/k=\sqrt[3]{2}=1.259921$ である。$x=1$ の場合は前節に述べたような考察によって定めた。

さらに $1<x$ なる場合は $g(x)$ の代わりに $2B-g(1/x)$ によって計算した。

x	g(x)	x	g(x)＝2B－g(1/x)
0	0,0	1	1,76663…
0,25	0,25065…	1,259…	2,64995…
0,333…	0,33542…	1,333…	2,71593…
0,5	0,51109…	1,5	2,82795…
0,666…	0,70532…	2	3,02218…
0,75	0,81733…	3	3,19784…
0,793…	0,88331…	4	3,28262…

曲線の負の部分は、$-1\leqq x\leqq 0$ では $g(x)$,　$x<-1$ では $g(x)=-B-g(1/x)$ を用いて計算した。

x	$g(x)$	x	$g(x)=-B-g(1/x)$
0	0	-1	-0,88331…
-0,25	-0,24935…	-1,259…	-1,02697…
-0,333…	-0,33131…	-1,333…	-1,06093…
-0,5	-0,49015…	-1,5	-1,12895…
-0,666…	-0,63767…	-2	-1,27647…
-0,75	-0,70570…	-3	-1,43532…
-0,793…	-0,73966…	-4	-1,51728…



ガウスの図のうち、刻みを付けた横線が $B=1,77$ の高さであることは明らかだが、残る2本の横線は私の図と比べてみると、中の線が原点を通り、下の線は $-B=-1,77$ を通ると思われる。この推測が正しければ、彼の研究はかなり進んでいたことを示唆する。驚くべきことと言わねばならない。

付説　等角写像

§3の略年表を見ると、ガウスは 1797年3月にはレムニスケートの5等分を試み、その《虚根》を考えた。その少し前の1月に、特殊オイラー積分に取り組んだことは確実である。彼が、級数 $g(x)$ に《虚数値》を入れて計算したと考えるのは、過剰な期待かも知れない。以下の考察は、あくまで私の創作に過ぎない、とお断りする。級数

$$g(x)=x+(1/6)x^4+(5/63)x^7+(4/81)x^{10}+(110/3159)x^{13}+\cdots$$

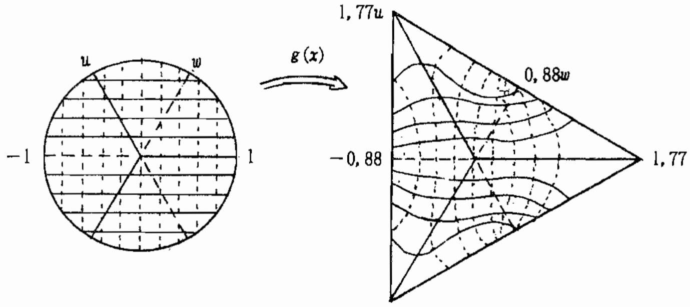
は $|x|<1$ なる範囲の虚数値 x にも有効である。$|x|=1$ なる円周上は、この級数のままでは仲々収束しないので、特別な工夫を要する（詳細は略す）。

いま 1 の立方根を $u=(-1+\sqrt{-3})/2=-0,5+0,866\sqrt{-1}$ とし、1 の六乗根を $w=(1+\sqrt{-3})/2=0,5+0,886\sqrt{-1}$ とするとき、

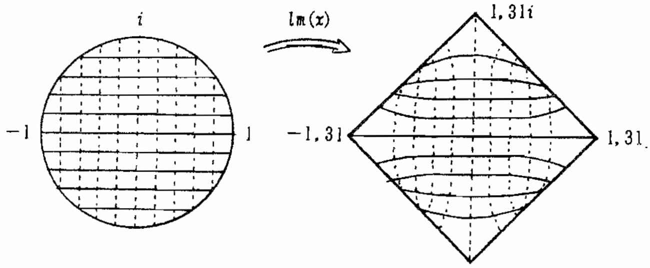
$$g(ux)=u\cdot g(x),\qquad g(wx)=w\cdot g(x)$$

が成立するので、u の近くの x は $g(x/u)$ に u を掛ける、w の近くの x は $g(ux)$ を u で割る、等の工夫が有効である。

こうして円周も含めた単位円は、$g(x)$ によって三辺を含めた正三角形に写される。



この図は、[5]数学史談の付録1の中の挿話(1900年)(文庫版 204～205頁)を想い起こさせる。「ヒルベルトは街上で、ステッキでもって正方形を円の中へ等角写像する図を描く(要旨)。」 それは「レムニスケート函数による写像」だから、逆にレムニスケート積分 $lm(x)=\int dx/\sqrt{(1-x^4)}$ による写像の場合は、円を正方形に写す。$i=\sqrt{-1}$.



§14. 新たな超越量(続)

次は $f(1)=A$ の値であるが、これは B よりも多少面倒な手順を踏む。まず $f(x)=\int xdx/\sqrt[3]{(1-x^3)}$ は、級数

$$f(x)=(1/2)x^2+(1/15)x^5+(1/36)x^8+(14/891)x^{11}+(5/486)x^{14}+\cdots$$

で表される。予め $f(x)$ から派生する三つの積分(うち $H(x)$ はガウスも未研究)を検討しておこう。常用の定数を $k=\sqrt[3]{(1/2)}=0{,}793700\ 525984\ 10$ と置く。

x の符号を変ずれば、$f(x)$ と同じく 0 から x までの積分として交代級数

$$h(x)=f(-x)=\int xdx/\sqrt[3]{(1+x^3)}$$
$$=(1/2)x^2-(1/15)x^5+(1/36)x^8-(14/891)x^{11}+(5/486)x^{14}-+\cdots$$

を得る。変数変換 $1-x^3+x^3y^3=0$ により $-1/y=x/\sqrt[3]{(1-x^3)}$, $x=1/\sqrt[3]{(1-y^3)}$ となり、 x と y の対応関係は $x=0 \longleftrightarrow y=-\infty$, $x=k \longleftrightarrow y=-1$, $x=1 \longleftrightarrow y=0$ である。 微分関係は $dx/x^2y=dy/\sqrt[3]{(1-y^3)}$ となる。これを $f(x)=\int xdx/\sqrt[3]{(1-x^3)}$ に代入すれば、積分区間 $x=0$ から $x=1$ に対応して、符号を変じた積分区間 $y=0$ から $y=\infty$ にわたる積分

$$F(y)=\int ydy/\sqrt[3]{(1-y^3)^4}$$

$$= (1/2)y^2 + (4/15)y^5 + (7/36)y^8 + (140/891)y^{11} + (65/486)y^{14} + \cdots$$

に変わる。y の符号を変ずれば、

$$H(y) = F(-y) = \int y\,dy/\sqrt[3]{(1+y^3)^4}$$

$$= (1/2)y^2 - (4/15)y^5 + (7/36)y^8 - (140/891)y^{11} + (65/486)y^{14} - + \cdots$$

を得る。$f(x)$ から直接 $H(y)$ を導くには変数変換 $1-x^3-x^3y^3=0$ を用いる。

四つの積分の相互関係を示せば、$f(0)=h(0)=0=F(0)=H(0)$ は当然として、

$f(k)=0,342231\ 702989\ 86=A/2,\quad h(k)=0,297418\ 814510\ 83,$

$f(1)=0,684463\ 405979\ 72=A,\quad h(1)=0,451468\ 822994\ 24=F(k)$

となる。A の値は収束の遅い $f(1)$ の代りに、$f(k)$ を2倍して求める。さらに $l=\sqrt[3]{(1/3)}=0,693361\ 274350\ 63$ と置けば、$f(l)=0,252902\ 393638\ 29=H(k)$ を得る。その他の値に対しても興味ある関係があるが、省略する。

$F(y)$ の変数を y から x に変更して、§9の部分積分の公式（ライステ 92 頁の1行目に訂正を施した式）に、$a=2,\ b=3,\ c=4/3$ を代入すれば、

$$F(x) = x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)} - f(x)$$

なる関係式が得られる。$k=\sqrt[3]{(1/2)}$ を代入すれば、$k^2/\sqrt[3]{(1-k^3)}=k$ であり、$F(k)$, $f(k)$ と $k=0,793700\ 52598410$ との間に、数値的に関係式が成立することが確かめらる。同様な関係式は

$$H(x) = x^2/\sqrt[3]{(1+x^3)} - h(x)$$

であり、$k=\sqrt[3]{(1/2)}$ を代入すれば $k^2/\sqrt[3]{(1+k^3)}=\sqrt[3]{(1/6)}=0,550321\ 208149\ 10$ であり、$H(k)$, $h(k)$ との間の関係式の成立が、数値によっても確かめられる。

ライステから彼の計算を引用しよう。y の欄は $f(x)$ を、[z] と書いた欄は $h(x)$ を表し、≈は途中の省略を示す。

ライステ 35頁

für $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

x	y	
0		
0,1		
0,2		
≈	≈	≈
0,8		
0,9		
1.0	0.684	0.60

für $\int x\,dx/\sqrt[3]{(1-x^3)}$ 〔 … に対して〕

x	y	[z]
0,1	0,005000 67	0,004999 33
0,2	0,020021 40	0,019978 74
0,3	0,045163 85	0,044839 80
0,4	0,080701 56	0,079334 91
0,5	0,127200 20	0,123018 08
0,6	0,185717 11	0,175232 55
0,7	0,258209 64	0,235142 16
0,8	0,348531 71	0,301798 14
0,9	0,466496 47	0,374220 14
1,0	0,684463 41	0,451468 83
∞		

0.314980262	0.020998684
4374726	1237296
405072	144555
54610	21482

0,31982
0,0224

0,342
0,30

0,68
0,60　　0.684　1,7　$\dfrac{\pi}{3\sqrt{\frac{3}{4}}}$

0, 314980262	0, 020998684
4374726	1237264
405072	144555
54610	21482

0, 31982
0, 0224

0, 342
0, 30

0, 68
0, 60　　0, 684　1, 7　$\pi/3\surd(3/4)$

	0, 31498 02624 74		0, 02099 86841 65
	0, 00437 47258 68		0, 00123 72962 05
	0, 00040 50672 10		0, 00014 45533 97
	0, 00005 46090 61		0, 00002 14818 25
	0, 31981 46646 13		0, 02238 20155 92
和	0, 34219 66802 05	2倍	0, 68439 33604 10
差	0, 29743 46480 21	2倍	0, 59486 92960 42

ガウスは $x=k=\sqrt[3]{(1/2)}=0,793700\ 525984\ 10$ と置いたときの級数の奇数項の和 0, 31982（私の計算では 0, 319814 664613)，偶数項の和 0, 0224（私のは 0, 022382 015592）を求めた。両者の和 0, 342 (0, 342196 680205) と両者の差 0, 30（0, 297434 648021）を一挙に求めようという意図である。それぞれの 2 倍は 0, 684 (0, 684393 360410)，0, 60 (0, 594869 296042）となる。この数値の意味する所は、$A=f(1)=0,684463\ 405979\ 72$ が目標であるが、項数の不足のため小数 4 位までしか求まらない結果となった。第二の数値は、交代級数 $h(y)=\int ydy/\sqrt[3]{(1+y^3)}$ の $y=k=\sqrt[3]{(1/2)}$ のときの値 0, 29741 88145 11 を目標にしている。これも項数が不足するため、目標には達しない。

ガウスの真の狙いは、次節の相補関係を数値で試すことである。彼は B の値を前々節で 1, 766 と求めていた。いま A として 0, 684 を得た。そこで両者の積 $1,766\times0,684=1,208$ が目標の $2\pi/3\surd3=1,2092$ に近づくか否かを試そうとしたのだ。だが話の先取り！ライステ 35頁は、次節の準備段階であろう。

§ 1 5．相補関係

[1] 講演の§ 2 と§ 6 で、レムニスケート積分における《オイラーの関係式》

を述べた。これは、二つの完全積分（0 から 1 まで）

$$\int\ dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^2}\quad =1,311028\ 777146\ 1$$

$$\int\ xxdx/\sqrt[4]{(1-x^4)^2}=0,599070\ 117367\ 8$$

の積が　$\pi/4=0,785398\ 163397\ 4$　に等しいことを主張する。

オイラーが、もっと一般に[11]381節、243頁で述べた《相補関係》

$$\int\frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{q+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{p+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{\pi}{nr\ \sin.\frac{p\pi}{n}}$$

の $n=4$ の場合は、左の式で $q=1,\ r=2,\ p=2$ を入れた値に相当する。

オイラーは相補関係の証明を、巧妙な方法で行なう。そこには、ベータ関数やガンマ関数に相当する無限積が登場する。これらは次回に論ずる予定。

当面の $n=3$ の場合、中の式で、$q=1,\ r=1,\ p=2$ のときに相当し、

$$A=\int xdx/\sqrt[3]{(1-x^3)}=0,68446\ 341$$

$$B=\int dx/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}=1,76663\ 875$$

の積　$A\cdot B=1,20919\ 958$　が $2\pi/3\sqrt{3}$ に等しいことを主張する。

ガウスは執拗にも、A と B の相補関係の成立を級数同士の掛算で確かめようとした。以下に引用する紙片（日付を持つ紙片は稀）は、[13]『ガウス全集』の編集者たちも見逃していた。私の模写によりガウスの表現を忠実に再現しよう。

紙片 Math 25-(9)オ　Jan. 18. 1797

$$\int\frac{xdx}{(1-x^3)^{1:3}}\times\int\frac{dx}{(1-x^3)^{2:3}}=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{20}x^6+\frac{11}{140}x^9+\frac{31}{770}x^{12}+\frac{\quad}{220.91}x^{15}+\&c.$$

Jan. 18. 1797

$$\int x\ dx/(1-x^3)^{1:3}\times\int dx/(1-x^3)^{2:3}=(1/2)x^3+(3/20)x^6+(11/140)x^9$$
$$+(31/770)x^{12}+((3\cdot 239)/(220\cdot 91))x^{15}+\&c.$$

級数同士の掛け算を実行すれば、

$$[(1/2)x^2+(1/15)x^5+(1/36)x^8+(14/891)x^{11}+(5/486)x^{14}+(19/12393)x^{17}\cdots]$$
$$\times[x+(1/6)x^4+(5/63)x^7+(4/81)x^{10}+(110/3159)x^{13}+(77/2916)x^{16}\cdots]$$
$$=(1/2)x^3+(3/20)x^6+(11/140)x^9+(31/616)x^{12}+(717/20020)x^{15}$$
$$+(529/19448)x^{18}\cdots$$

となる。積の級数の x^{12} の係数の分母は 616 に訂す。

相補関係について、岩峅茂夫氏より、多桁の検算を頂いたことに感謝する。

§１６．レムニスケートの場合

[11]オイラー『積分計算教程』360節～396節、特に393節（250～251頁）には、

$n=4$ の場合、すなわちレムニスケート積分を一部として含む

$\int x^{m-1}dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^p}$　の形の完全積分（$x=0$ から $x=1$ まで）

をまとめた一覧表が載っている。$n=4$ の場合、部分積分の公式で簡約していくと、次の 10 個の基本形に絞られる。オイラーの順序により（ただし完全積分の値を示す文字はオイラーとは変えて)、一覧表にすると、次の通り：

① $\int x^3dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^3}=\int dx=1$,　② $\int x^3dx/\sqrt{(1-x^4)}=\int xdx=1/2$,

③ $\int x^3dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}=\int x^2dx=1/3$,　④ $\int x^3dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^0}=\int x^3dx=1/4$,

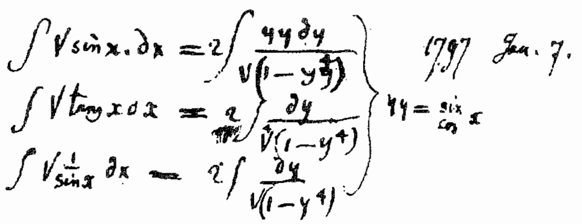
⑤ $\int dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}=\pi/2\sqrt{2}$,　⑥ $\int x^2dx/\sqrt{(1-x^4)}=B$,

⑦ $\int x^2dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}=D$,　⑧ $\int dx/\sqrt{(1-x^4)}=A$,

⑨ $\int xdx/\sqrt{(1-x^4)}=\pi/4$,　⑩ $\int dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^3}=C$

②，⑥，⑧，⑨は分母の根号が平方根なることに注意せよ。$n=3$ の場合と区別のため、A，B を太文字に変えた。これらのうち、①〜④ は共通して $\int x^3dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^p}=1/(4-p)$ の形になる。⑤と⑨は π を含む値となる。　⑥，⑦，⑧，⑩から、新たな超越数を生ずる。⑧ $A=1,31102\ 87771\ 461$，及び ⑥ $B=0,59907\ 011173\ 678$，はレムニスケートの完全積分として重要である。⑩ $C=\sqrt{2}A=1,85407\ 46773\ 014$，　⑦ $D=B/\sqrt{2}=0,42360\ 65423\ 970$ は、A，B から誘導される値である。

［2］『ガウス日記』第50項(1797.1.7) には⑥、⑤、⑧が出て来る。⑤は $\int x^2dx/\sqrt[4]{(1-x^4)^3}$　と等しく、$\pi/2\sqrt{2}=1,11072\ 0745\ 396$　なる値を持つ。



$$\left.\begin{aligned}\int\sqrt{\sin x}\,.\,dx&=2\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\mathrm{tang}\,x}\,.\,dx&=2\int\frac{dy}{\sqrt[4]{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\cdot dx&=2\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\end{aligned}\right\}\quad yy=\frac{\sin}{\cos}x.\qquad \text{1797 Ian. 7.}$$

各項の左辺に変換 $y^2=\sin\ x$ または $y^2=\cos\ x$ を施せば、右辺の様になる。

［8］ライステ 104頁に表題「積分 $\int dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}$ の研究」の記述がある。

Untersuchungen über das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = y$$

Untersuchungen über das Integral

$\int dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}=y$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}} x + \int \frac{4x^4}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \partial x$$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}} x + \frac{4}{5}(1-x^4)^{3:4} x^5 + \frac{4\cdot 8}{5}\int \frac{x^8\,\partial x}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}}\left(x + \frac{4}{5}x^5 + \frac{4\cdot 8}{5\cdot 9}x^9 \cdots\right) + \frac{4\cdot 8\cdot 12 \cdots 4n}{5\cdot 9\cdot 13 \cdots 4n-3}\int \frac{x^{4n}\,\partial x}{\sqrt[4]{1-x^4)}}$$

$$= x + \frac{1}{4}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{1}{9}x^9 + \frac{1\;5\;9}{4\cdot 8\cdot 12}\frac{1}{13}x^{13}$$

最後の級数は、

$$\int dx/\sqrt[4]{(1-x^4)} = \int dx\,[1+(1/4)x^4+(1/4)\cdot(5/8)x^8+\cdots]$$

$$= x+(1/4)\cdot(1/5)x^5+(1/4)\cdot(5/8)\cdot(1/9)x^9+\cdots$$

とすれば容易に出て来るのに、ガウスは部分積分の公式

$$\int x^{m-1}dx/\sqrt[4]{(1-x^4)} = (1/m)(1-x^4)^{3/4}x^m + [(m+3)/m]\int x^{m+3}dx/\sqrt[4]{(1-x^4)}$$

を繰り返し用いて $(1-x^4)^{3/4}$ に或る級数を掛けた形に直し、しかる後に $(1-x^4)^{3/4}$ を級数に直して掛け合わせる、という迂遠な方法を取った。

x	y
0,	0,
0,1	0,1000005
0,2	0,2000160
0,3	0,30012
0,4	0,4006
0,5	0,5015176
0,6	0,6
0,7	0,7
0,8	0.8193082
0,9	
1,0	1,1107207

x	y
0,	0,
0, 1	0, 10000 05000 17
0, 2	0, 20001 60088 96
0, 3	0, 30012 18431 63
0, 4	0, 40051 66125 85
0, 5	0, 50159 75534 70
0, 6	0, 60407 57749 96
0, 7	0, 70920 70720 51
0, 8	0, 81938 71470 79
0, 9	0, 94032 24640 48
1, 0	1, 11072 07345 40

数値計算の部分は恐らく級数

$$x+(1/20)x^5+(5/288)x^9+\cdots$$

で求めたのだろう。ただし完全積分の値は $x=1$ の級数が仲々収束しないので、既知の $\pi/2\sqrt{2}=1,11072\ 07345\ 396$ から予想したのであろう。1, 11072 0 の次の 7 を点線の 7 で表している。このような《点線の数字》はガウスがよく用いる。「次の数字は 7 になる筈だ」と言う気持ちを表している！

レムニスケート積分の場合の相補公式について一言すれば、

$$A\cdot B=\pi/4, \qquad C\cdot D=(\sqrt{2}A)\cdot(B/\sqrt{2})=A\cdot B=\pi/4$$

となり、いずれの積も同じく $\pi/4$ になる。

§17．オイラーの規準

オイラーは[11]『積分計算教程』104節、問題9(61頁)で、幾つか可能性のある変数変換を検討した後で、次のように述べた。

「…この目的に適う他の適切な置換を工夫するのは不可能なことが、容易に了解されよう。それ故、我々は次のように工夫する。無理式 $x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\mu/\nu}$ は、もしも m/n または $(m/n)+(\mu/\nu)$ が整数ならば、無理性から解法される。」

これが《オイラーの規準》と呼ばれることは周知である。

ところで、ガウスは[8]ライステ 33～35 頁で、$n=3$ の場合の六種類の《特殊オイラー積分》を徹底的に研究した。本稿§10～§15で詳細に検討したところである。前節では、さらに彼が同時平行して $n=4$ の場合、即ちレムニスケート積分をも研究したことを述べた。これらの研究を元に、彼は [2]日記第52項(1797年1月10日)に、次のように記入した。

Criterii Euleriani rationem sponte detexi Jan. 10.

Criterii **Euleriani** rationem sponte detexi. [1797] Ian. 10.

高瀬氏による[4]『ガウスの数学日記について』の中での翻訳は、次の通り。

「オイラーの基準の論拠を自力で発見した。」

私は、どうも「自力で発見した」なる翻訳がそぐわないような気がする。この翻訳は、[2]『日記』のエリザベート・シューマンによる独訳“ Ganz von selbst habe ich die Begründung des Eulerschen Kriteriums entdeckt. ” を参照したのであろう。しかし、§4で述べたようにガウスがオイラーの[11]『積分計算教程』を読んでいたことは確実である。《自力で》と訳すことに私は抵抗を感ずる。ガウスが当時、$n=3$, $n=4$ の場合を検討するうちに 《何時の間にか》オイラーの規準を再発見した、というのが真相であろう。[12] Dunnington 著の付録に日記の英訳を付けたジェレミー・グレイが、“ I have spontaneously discovered the ground for Euler's criterion. ” と英訳したのが、ラテン語の“ sponte ”の意味に近いのではないか、と考える。

私訳「おいらーノ規準ノ基礎ヲ成リ行キデ見付ケリ。」

[11]『オイラー全集』の編集者も、ガウスの『日記』記入の事実と「オイラーの主張は、チェビシェフが 1853年に肯定した。」とを注記している。後者は、「オイラーの述べた二つの場合に限る」ことを証明したのであろう。

§18．オイラーの《超越性》概念

前節の「オイラーの規準」は、被積分関数が含む無理性が、積分計算によって何時《有理化》されるかの判定規準であった。これと並んで重要なのは、オイラーによる《代数的》と《超越的》の二概念の対比である。私はオイラー及び同時代の思考方式に不慣れなので、高瀬氏のご教示を受けた。しかし以下は私の理解に基づく記述なので、文責は私に帰する。

いま x と y が、$P(x,y)$を多項式とするときの $P(x,y)=0$ を満たすとき、x と y は《代数的な》関係、満たさぬとき、《超越的な》関係と言う。

$t=\phi(u)$ が t と u との或る関数関係(functio)を表しているとする。いま dy と dx の間の微分方程式 $dy=\phi(x)dx$ を積分して $y=\int\phi(x)dx$ を作ったとき、y と x の関係は、上記の意味で《代数的な》場合と《超越的な》場合がある。微分・積分なる計算法が発明されて、オイラーの頃までには[11]『積分計算教程』に見られる種々の不定積分が作られた。例えば、$\int dx/x$, $\int dx/(1+x^2)$, $\int dx/\sqrt{(1-x^2)}$ 等から対数関数や逆三角関数などによる、πをも含む y と x の超越的な関係が知られるようになった。そのオイラーと雖も、微分方程式 $\int dx/\sqrt{(1-x^4)}+\int dy/\sqrt{(1-y^4)}=0$ は解けず、ファニャーノの研究（レムニスケート積分）を待たねばならなかった。

さてオイラーは[11]『積分計算教程』において、本稿で見たような《特殊オイラー積分》$\int x^{m-1}dx/(1-x^3)^{p/3}$ を取り上げた。§10 の分類(i)(ii)(iii)の場合、$\int x^2dx/(1-x^3)^{p/3}$ は $\int x^{2-p}dx$ なる《代数的》積分の最簡な場合に帰着した。分類(iv) $\int xdx/(1-x^3)^{2/3}$ の場合は、うまい変数変換を見つけることにより既知の $\int dx/(1+x^3)$ 即ち《超越的》積分に帰着し、完全積分はπを含む。残る(v)と(vi)の場合は、如何なる変数変換によっても、既知の形の積分には帰着できない。オイラーはここで全く新しい《超越的》積分に直面した！　彼は[11]『積分計算教程』においてはそれ以上の追求をせず、その後の論文に譲った。

オイラー積分の研究においては、被積分関数の無理性を解消できる《うまい》変数変換を如何にして見つけるか、が鍵となる。その可能・不可能を判別するのに、《オイラーの規準》が有効な決め手となったのだ。

§12 から§14 にかけて便宜のため屡々《超越量》なる言葉を用いた。しかしオイラーの時代には《超越的な関係》が問題とされ、数値そのものを《超越数》と呼ぶ習慣はなく、数値の個性が問題とされるのはガウス以後と言われる。

§19．気質の違い

オイラーが有名な「逆平方数の和 $\Sigma(1/n^2)$ が $\pi^2/6$ に等しい」ことの発見とその証明(1731)に到達したとき、彼はまず有限和の値を突き止めようとした。彼の値は 1.644934 であったと言う。この収束しにくい級数の和を求めるため、彼は巧妙な技法を駆使した。得られた数値がよもや円周と関連するとは、研究当初には到底予想されなかった。正弦関数の無限積にまで到達するには、どれ程の計算を試みたであろうか。オイラーもガウスに劣らぬ数値計算家であった。

しかしながら、刊行された形の[11]オイラー『積分計算教程』(1768)を読む限り、ここには数値計算は全く影を潜め、彼は無理式の被積分関数に対して巧妙な《代数的変形》を施して有理式に変形する。この《胸がすくような》技こそが、オイラーの気質ではないかと思われる。『オイラー全集』には、自筆の原稿が生(なま)の形で出版される、という予告がある。そうなれば《オイラーのライステ》を見る機会が来るであろう。（出版予定から、私の生存中は無理であろうが。）

ガウスの場合も、発表された論文はあくまで《式の変形》による証明が主体である。ところが『太陽ノ周リノ円錐曲線ニ沿ウ天体ノ運動論』(1809)は勿論《理論書》であるのに、その内容は無数の数値計算で埋められている。有名な小惑星ケレスの軌道予測法も、ガウスの数値計算を辿れば理解できるように書かれている。ベータ関数とガンマ関数を結ぶ関係式を、オイラーは無限積を介して発見したらしい。しかし1797年１月段階のガウスは、さほど無限積に関心を寄せない。その理由を考えてみると、今回の主題の $g(x)$ や $f(x)$ の無限積は確かに綺麗ではあるが、収束が遅くて計算に適さないからであろう。

私はいまガウスの《楽屋裏》を覗いて、彼が《オイラー積分》にどう立ち向かったのか、を辿っている。そこでは《総合的に》式の代数的な変換を施せば得られる場合にも、彼は数値例を作り《丹念な数値計算》によって、《命題の成立》を確かめている。［５］高木『数学史談』68～69頁に「その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。… 我々は空虚な一般論に捉われないで、帰納の一途に精進すべきではあるまいか。」とある。どうも私には帰納的な方法《数値計算》こそがガウスの気質のように思われる。　（2006年10月14日講演）

訂正

前回（第 16 回数学史シンポジウム、2005）報告書、杉本講演、

24頁、§26, $s2$ の式を $s2=sc(1+s^2)\cdot 2/(1+s^4)$ に訂す。

29頁、§29, 式(*25) の Mu の級数の u^{12} の係数を (23/259459200) に訂す。