RATIONAL FUNCTIONS DEFINED BY LEMNISCATE FUNCTIONS AND PRIMARY NUMBERS OF GAUSSIAN INTEGERS (STEP 1)

TAKUMA OGAWA (小川 琢磨)

1. 背景、その壱

1.1. 前回の復習. 2004.10.16 の『第１５回数学史シンポジウム』において、**三角関数と lemniscate 関数についての類似性**に焦点を絞った講演をした [2]。類似性を認める事が出来る土壌として、

(1) Eisenstein による相互法則 [12, 13, 14]
(2) Abel に依って提示された Abel 方程式の概念 [19]
(3) Abel 拡大体の記述 [23]
(4) 三角関数と lemniscate 関数の構成法 [5, 6]

を挙げ、新たに類似性が認められる状況証拠を２つ提示した。

(a) **対称性**という類似の性質を関数等式で提示した。[2, 定理 3.6], [38]
(b) 円、lemniscate、を含む曲線族を構成しその弧長が Beta 関数で与えられる事を示した。つまり **Beta 関数が特定の曲線族の弧長を与える関数の役割を果たしている一例を得た。** [2, 定理 4.1]

そして、以上の得られた２つの状況証拠を加味して、三角関数と lemniscate 関数の性質が上の (1)～(4) の橋渡しをすると考えて、さらに、先人達の数学観の意識の繋がりを含めて [1, 10, 11]、**膨大な知の蓄積としての数学に対する一つの認識**を提示した [2, p77 高瀬一小川プログラム]。

> 『高瀬一小川プログラム』とは、数学の現象としての項目（相互法則、Abel 方程式、弧長、対称性、‥等）及び、完成されている理論等（関数論、Galois 理論、類体論、‥等）を三角関数と lemniscate 関数の性質（特質）等を基準として捉え直したもので、一つの表としての認識を公表した。また、命名に関しては高瀬正仁氏より許可を頂いた。

1.2. 今回の話（今後の展望） [37, 39]。今回の講演は、

『lemniscate 関数と primary 数によって定義される有理関数』

という内容でお話します。先の得られた状況証拠の (a) の**対称性**という**性質**は実は、これからお話する有理関数の**対称性**としての性質の一部で、実際に有理関数の具体例から、その零点と極に対称性があるのは直ちに解ります。今回は具体的に

AMS Mathematics Subject Classification 2000: Primary 11C99, 33B99, 33E05. Secondary: 01-02, 01A55.

Key words and phrase: Abelian equation, Abelian extension, Complex multiplication, lemniscate function, Reciprocity law.

Date: 2006.10.15. 第１７回数学史シンポジウム (講演予定稿) +研究所報 (2007.2.6 提出).

筆者連絡先: 埼玉県 北葛飾郡 庄和町 永沼 159-3.

I どのようにして具体例を得たか？(漸化式の構成)
II 複数の有理関数を組み合わせたものに見られる対称性

を紹介します。これからお話する有理関数に確かに**対称性**としての数学的現象が具体的にみてとれます。

① 有理関数の零点と極の対称性
② 有理関数どうしで補完し合う対称性
③ 複数の有理関数を組み合わせたものに見られる対称性
④ その他?

ここに色々現れている（今後現れてくる？)、**対称性という現象を関数（楕円関数、モジュラー関数、超幾何関数等々…）の性質としてなんとか捉えられないか？**というのが現在考えている研究テーマです。先の記事の [2, 問題 3.7] に対する一定の解決や、あるいは、モジュラー関数や超幾何関数などで特徴付け出来ればと考えています。

1.3. 追記①. 前回のシンポジウムで発表、公表した記事 [2] を根幹に据えて、これまでの公表してきた記事を一つに合わせるようにして、細かな処を加筆して、改めて体系的に整理するようにして、学位論文 [39] を筑波大学に提出した。今回の発表内容は学位論文 [39] の第３章からです。この第３章を基本に上で述べた**対称性**を捉え直して行こうと考えています。また、この第３章自身が完結したものになっていないので、それを補う記事をここに提示します。具体的な内容は、修士論文の内容 [37]、それから、前回のシンポジウムで発表、公表した記事 [2, p52–p60] の続編です。

1.4. 追記②（数学史家としての立場と、数学者としての立場の違い？、共通部分？). 今回の数学史シンポジウムの講演を通して感じた事ですが、数学史家として話すとするなら歴史的な**正確な事実**（誰が、何を何処まで明らかにしたのか等々)、正確な日本語訳、を踏まえて発表者自身が感じた、あるいは得た**認識**を公表するという**形式**になると考えます。数学者として話すのなら、**得られた事実（結果）**と、その他の多くの既成の事実とを比較し、得られた結果に対する**位置付けを与える。**さらに可能ならば、発生する問題や疑問、現代数学から見た**認識**も付け加える。という**形式**になると考えます。

小川個人は、数学者としての立場によっていると考えています。個人的な興味、**関数（三角関数、lemniscate 関数、超幾何関数、Beta 関数 …）が持っている性質、特質を明らかにして、既成の事実を加味して一つの認識を提示する** … ただ、扱っている内容は古典的です。それ故に数学史家として公表された認識 [1] と、数学者が提示した認識 [2] が互いに共鳴する事があるのだなと感じています。このあたりの話に疑問を感じる人は、上記２つの記事 [1] [2] を読み比べてください。もっとも、… 記事 [2] は、高瀬正仁氏が書いた記事 [1] の姉妹版を意図として書いたものなのですが … さて、ここで改めて公表された**認識**をどう捉えるか?という事ですが、あくまで『発表者個人が提示した物』と考えるのか、或いは『数学という知の蓄積によって作られる潮流の一部分』と考えるのか、という事になると思います。このときに注意が必要だと考えます。つまり、当の本人（例えば Gauss,Euler …）が、やってもいないのに、或いは、やってあるのに、後から来た人間によって過大評価されてしまう。或いは過小評価されてしまう。という事があるという事です。このあたりの話は、杉本敏夫氏の三部作『ガウスが行った数値計算』[32, 33, 34] が良い具

体的な事例になっていると考えます。また、このような記事としての形式で警鐘を鳴らす事も真に数学史家が果たす一つの役割なのだろうと感じています。

小川個人としては、正直、自分自身が、数学史家なのか、数学者なのか、は良く解りませんが、上記に表明した立場に筆を加えると、いずれにしても、少なくとも歴史的な正確な事実を踏まえ、其処に在る（小川個人の認識かもしれませんが）**数学の意識、感覚等を、関数が持つ性質から浮き彫りに**出来ればと、考えています。

2. 漸化式の構成のための準備

2.1. 三角関数の場合に ⋯ [14], [39, Chapter 2]. 正の**奇数** q にたいして、

$$f_q = f_q(z) := \frac{\sin qz}{\sin z}, \qquad g_q = g_q(z) := \frac{\cos qz}{\cos z}. \tag{2.1.1}$$

を考えます。この段階では、いずれも z の関数です。しかし、これらの関数は以下の漸化式を満たしている事が直ちに（加法定理と帰納法により）解ります。

$$f_q = f_3 f_{q-2} - f_{q-2} - f_{q-4}, \qquad g_q = g_3 g_{q-2} + g_{q-2} - g_{q-4}. \tag{2.1.2}$$

この漸化式と、

$$f_1 = 1, \qquad f_3 = 3 - 4\sin^2 z, \qquad g_1 = 1, \qquad g_3 = 1 - 4\sin^2 z.$$

という初期値から、奇数の q に対して

$$\frac{\sin qz}{\sin z}, \qquad \frac{\cos qz}{\cos z} \quad \in \mathbb{Z}[\sin^2 z], \tag{2.1.3}$$

である事が解ります。漸化式の構成により、上記のような多項式の存在が言えただけでなく、帰納的にして、具体例も得られるようになります。

これから、お話するものは、**上記の内容に対する、lemniscate 関数の場合には？**という内容です。

前回のシンポジウムの復習になりますが、前回は (m を奇数として) [2, 定義 3.5.]

$$P_{s,m}(x) = \frac{\sin mz}{\sin z}, \qquad P_{c,m}(x) = \frac{\cos mz}{\cos z} \qquad 但し \qquad x = \sin z.$$

と記号を導入して多項式 $P_{s,m}(x), P_{c,m}(x)$ の関数等式を提示しました [2, 定理 3.6], [38]。ちなみに Eisenstein は、上記多項式 $P_{s,m}(x)$ を用いて平方剰余の相互法則を証明しました [12]。

2.2. 奇数という概念について [7]. 要は三角関数の場合の analogy を lemniscate 関数の場合でやってみようという事なのですが、実は、いきなり躓きます。

Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の奇数って？

そこで、改めて整数 $\mathbb{Z}$ 上の奇数の定義を確認します。

定義 2.1 ($\mathbb{Z}$ 上の奇数). ある $a \in \mathbb{Z}$ に対して $2 \nmid a$, つまり ($a \equiv 1 \pmod 2$), を満たす時このの a を $\mathbb{Z}$ 上の奇数と呼ぶ.

例 2.2.

$$\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots.$$

整数という集まりの中に、**単数、偶数、奇数、そして素数**という考え方があります。ここでは改めて整数 $\mathbb{Z}$ の場合の**奇数**という概念をさらに追求するします。ポイントは $\mathbb{Z}$ 上の 2 という数はどんな数か？という事になります。

$\mathbb{Z}$ 上の 2 は最小絶対値の素数である

この事に留意します。

では、これから、Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の奇数についての考察を始めます。まずは、2 という数ですが、これを Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ 上で考えると

$$2 = (1+i)(1-i).$$

と因数分解してしまいます。そして、この上記の因数に着目すると

$\mathbb{Z}[i]$ 上で $1+i$ が最小絶対値 (最小のノルム) の素数である

事に気付きます。以上の事を踏まえて、Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の奇数を以下のように決めます。

定義 2.3 (Gauss 整数上の奇数)**.** ある Gauss 整数 $\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i]; a, b \in \mathbb{Z},$ に対して $(1+i) \nmid \alpha,$ つまり $(a - b \equiv 1 \pmod 2)),$ のとき α を Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ 上の奇数と呼ぶ。

例 2.4.

$$\dots, 1+2i, 1-2i, 2+i, 3+2i, \dots.$$

2.3. **Gauss 整数上の primary 数について** [4, 7]**.** 以下、Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ 上の奇数全体を $\mathbb{M}$ で表し、Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数全体を $\mathbb{P}$ で表します。以下が primary 数の定義です。

定義 2.5. α が Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数であるとは $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$ を満たす事である.

この primary 数の定義を $\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$; $a, b \in \mathbb{Z}$ の a, b の合同式で書きかえると以下のようになります。

Proposition 2.6. ある $\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対して、この $\alpha = a + ib$ が *primary* 数のとき、a と b に以下の合同式が成立する。

$$a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod 4, \quad \text{または} \quad a \equiv 3, b \equiv 2 \pmod 4.$$

この Proposition 2.6 と、Gauss 整数上の奇数の定義から、実は、primary 数全体は、Gauss 整数上の奇数の全体の中で、単数倍 $(1, -1, i, -i)$ で移り合うものを除いた一例になっているのが解ります。

$$M = \mathbb{P} + i\mathbb{P} + i^2\mathbb{P} + i^3\mathbb{P}.$$

2.4. $\mathbb{Z}$ 上の素数 (有理素数) と、$\mathbb{Z}[i]$ 上の素数について [4, 7, 9]. $\mathbb{Z}$ 上の場合には、単数は $1, -1$ で、偶数は 2 の倍数、奇数は 2 の倍数で無いもの、と考えます。そして、素数は（例えば p)、約数が 1 とその数自身（この場合 p の事）しか持たないもの。と考えます。さらに任意の整数 $m (m \in \mathbb{Z})$ は

$$m = (-1)^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} \cdots 11^{a_{11}} 13^{a_{13}} \cdots . \qquad a_i \text{ は各素数の正の整数指数}$$

と標準（素因数）分解します。そして、互いに素な奇素数 p, q に対してあの平方剰余の相互法則

$$\left(\frac{q}{p}\right)_2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)_2. \qquad \left(\frac{p}{q}\right)_2 : \text{ルジャンドル記号}$$

が成立します。以上が $\mathbb{Z}$ 上の場合の話です。

今度は $\mathbb{Z}[i]$ 上の場合の話ですが様子が異なります。

単数は $1, i, -1, -i$ の 4 つです。そして先程も言いましたが、$\mathbb{Z}[i]$ 上だと $2 = (1+i)(1-i)$ と因数分解してしまうので結局、次のような 3 つの分類が与えられる事になります。

$$\mathbb{Z}[i] \text{ 上の} := \begin{cases} \text{奇数} & 1+i \text{ で割り切れないもの,} \\ \text{半偶数} & 1+i \text{ では割れるが } (1+i)^2 \text{ で割り切れないもの,} \\ \text{偶数} & (1+i)^2 = 2i \text{ または } 2 \text{ で割り切れるもの.} \end{cases}$$

また、$\mathbb{Z}[i]$ 上でも素数が $\mathbb{Z}$ 上と同じように考えられます。（つまり、単数と単数倍、とその数しか約数に持たないもの。或いは単数を除く 2 つ以上の複素整数の積で描けないもの。）ただ、$\mathbb{Z}$ 上で素数だからと言っても、$\mathbb{Z}[i]$ 上でも素数とは限りません。例えば 2 はそうです。そして、$\mathbb{Z}$ 上の奇素数 p は 2 つのタイプ① $p = 4n+1$ 型か② $p = 4n+3$ 型か、が在ります。特にタイプ① $p = 4n+1$ 型ですが、これは $\mathbb{Z}[i]$ 上だと因数分解してしまいます。例えば …

$$5 = (-1-2i)(-1+2i), \qquad 13 = (3+2i)(3-2i), \qquad 17 = (1+4i)(1-4i), \cdots .$$

$\mathbb{Z}[i]$ 上では素数は以下の 3 つのタイプがあります。

(1) $\mathbb{Z}$ 上の奇素数 p でタイプ② $(p = 4n+3)$ 型 これは $\mathbb{Z}[i]$ 上でも素数。
(2) 複素整数 $\alpha := a + ib (a, b \in \mathbb{Z})$, $N(\alpha) := a^2 + b^2$ で $N(\alpha) = p$、但し p は $\mathbb{Z}$ 上の奇素数 p タイプ① $(p = 4n+1)$ 型。
(3) $1+i$.

上記の 3 つのタイプにそれぞれ同伴（単数倍をしたもの）しているもの達があります。先に説明をしましたが、奇数という概念を $\mathbb{Z}[i]$ 上に拡張し、さらに同伴（単数倍）になっているものを除外しているものが $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary 数というものです。さらに primary 数はその定義から（定義 2．5）直ちに primary 数は算法、積に関して閉じている事が解ります。つまり任意の primary 数 p $(\forall p \in \mathbb{P})$ は

$$p = P_1{}^{b_1} P_2{}^{b_2} P_3{}^{b_3} \cdots . \qquad (P_1, P_2, P_3, \cdots \text{ は primary primes})$$

と primary prime の積で因数分解した形でかけます。この primary prime が $\mathbb{Z}$ 上における奇素数という概念を $\mathbb{Z}[i]$ 上に拡張したものです。（$\mathbb{Z}$ 上における奇素数 p タイプ② $p = 4n+3$ 型は、$-p$ と

考える事により $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime になります。）任意の複素整数 α ($\alpha := a+ib, (a,b \in \mathbb{Z})$) は $P_1, P_2, P_3, \cdots$ という primary prime を用いると

$$\alpha = i^k (1+i)^l {P_1}^{b_1} {P_2}^{b_2} {P_3}^{b_3} \cdots .$$

と素因数分解した形で表記できます。そして $r, s \in \mathbb{Z}[i]$ が互いに素な primary prime のとき、

$$\left(\frac{s}{r}\right)_4 = (-1)^{\frac{N(s)-1}{4}\frac{N(r)-1}{4}} \left(\frac{r}{s}\right)_4. \qquad \left(\frac{r}{s}\right)_4 : 4 \text{ 次剰余記号}$$

が成立します。これが 4 次剰余の相互法則です。

結局、primary 数とは何なのか？ということですが、

① 奇数という概念を $\mathbb{Z}[i]$ 上に拡張したもの。

② 4 次剰余の相互法則の**形式**を整えているもの。

という事になります。Gauss が 4 次剰余の相互法則の**形式**を整えるために**開発（創造）**した。と言う事も状況証拠（出来上がっている既成の事実）より**可能**であると考えます。

追記③.

講演中に『primary 数を準素数と訳すのは、おかしい。』という一幕がありました。primary 数を準素数と訳したものは、講演中に回覧した平松：「相互法則入門」[7, p204–205] に見る事が出来ます。筆者も改めて数学辞典 (岩波　数学辞典、第 3 版、第 2 刷発行、1986) や、倉田 [4]、平松 [7, p204–205] 等々で改めて調べましたが、該当する項目は見つからず … 筆者（小川）は、例えば優勝、準優勝、**ぐらいの感覚で**、素数、準素数（奇数という概念を準素数と考えるのもありかな、と感じていました。）と認識してました。しかし、**適訳**か？というと確かに疑問は感じます。ただ、逆に、複素数 (complex number) と**ヒット商品**を提出するのも、大変な事だと思うのですが …

追記④.

上記の primary 数に関しての記事は講演終了後に、杉本敏夫氏より教えて頂いた記事

E.J.H.Smith: Report on the Theory of numbers [9]

の primary 数に関連する部分を参照、参考にまとめたものです。上記の [9] は Smith の 6 つの論文があり、その第一論文を参照、参考にしました。上記の [9] については、また機会改めて触れたいと思います。そして、今回、primary 数に関して整理をして感じた事ですが、後から来る者は、出来あがっている既成の事実をまず初めに知ります。しかし … その**実体**はさっぱり解りません。後天的にして**本質的な概念**を知り、そして、改めて最後にその**主目的**を知る事になります。定義が大事ですか？それとも、定理が大事ですか？著者が言わんとする主張、主張したい事を、著者が感じた事を、広く世間に、正確に、美しく、**公表するためのプロセス**を朧げながら感じた次第です。そして、真の**創造**していく事の大変さを …

2.5. 4 次剰余相互法則の証明の中で使われている有理関数. 今回のお話は、前回の復習の部分もかなりあります。この研究の出発点は Eisenstein によって成された lemniscate 関数を用いた 4 次剰余相互法則の証明です [12, 13]。Eisenstein によって成された lemniscate 関数を用いた 4 次剰余相互法則の証明の中で、実際に以下の有理関数が現れます。

定理 2.7 (Theorem 3.3 [17]). $\mathrm{sl}(u)$ を *lemniscate sine* とする。このとき、$m = a+ib \in \mathbb{Z}[i], a, b \in \mathbb{Z}, a - b \equiv 1 \pmod 2$ ならば、

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} \in \mathbb{C}(\mathrm{sl}(u)^4).$$

上記定理は、条件の m に対する $R_m(\mathrm{sl}(u)) = \mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ を満たす有理関数 $R_m(x)$ が存在する事を主張しています。また、条件の m は Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の奇数に他なりません。そして、Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の奇数全体 $\mathbb{M}$ と Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の primary 数全体 $\mathbb{P}$ との関係を踏まえて、講演タイトル（上記定理 2.7）の有理関数、

lemniscate 関数と Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の primary 数に依って定義される有理関数

を帰納的に求める事が可能となる漸化式の構成に入りたいと思います。

3. 有理関数を帰納的に求める事の出来る漸化式の構成

3.1. **定義.** $\mathbb{P}$ をガウス整数上の primary 数全体とする。$p \in \mathbb{P}$ に対して、$\alpha = -2+2i, \beta = -2-2i$ と置けば、

$$p = m\alpha + n\beta + 1 \qquad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

任意の (Gauss 整数上の) primary 数が上記のように書けるのは、Proposition 2.6. より primary 数がラティス構造を持つ事に依ります。絵は後程。そこで改めて、$P_{m,n} \in \mathbb{P}$ を次のように定義します。そして、新たに関数 $F_{m,n}, G_{m,n}$ を $P_{m,n}$ を用いて次のように定義します。

定義 3.1. primary 数の p を以下のものとして考える。

$$p = P_{m,n} := m\alpha + n\beta + 1 \qquad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\alpha := -2+2i, \qquad \beta := -2-2i.$$

定義 3.2. 上記定義の $P_{m,n}$ と lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$、lemniscate cosine $\mathrm{cl}(u)$ を用いて、新たに関数 $F_{m,n}, G_{m,n}$ を次のように定義する。

$$F_{m,n} := \frac{\mathrm{sl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad G_{m,n} := \frac{\mathrm{cl}(P_{m,n}u)}{\mathrm{cl}(u)}.$$

この $F_{m,n}, G_{m,n}$ を用いて **lemniscate 関数と Gauss 整数 $\mathbb{Z}[i]$ の primary 数に依って定義される有理関数**を明らかにしていきます。

前回の講演との対応ですが、$F_{m,n}$ は $R_{s,m}(x)$, $G_{m,n}$ は $R_{c,m}(x)$ と対応しています。

前回は $m \in \mathbb{P}$ とし、$x := \mathrm{sl}(u)$ として、

$$R_{s,m}(x) := \frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad R_{c,m}(x) := \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)}$$

と定義して $R_{s,m}(x)$ と $R_{c,m}(x)$ の関数等式を提示しました。[2, 定理 3.6], [38]

3.2. **漸化式.** 関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式の構成は

- primary 数 $P_{m,n}$ が満たす漸化式
- lemniscate 関数の加法定理

以上の２つを用いて構成できます。

primary 数の漸化式. 上記に与えた定義 3.1 から $P_{m,n}$ の漸化式が以下のようにして得られます。実際に n を固定して

$$P_{m+1,n}=(m+1)\alpha+n\beta+1=m\alpha+n\beta+1+\alpha=P_{m,n}+\alpha,$$
$$P_{m-1,n}=(m-1)\alpha+n\beta+1=m\alpha+n\beta+1-\alpha=P_{m,n}-\alpha.$$

依って上記2つの式から、

$$P_{m+1,n}+P_{m-1,n}=2P_{m,n}. \tag{3.1}$$

同様にして m を固定した場合を考えて

$$P_{m,n+1}+P_{m,n-1}=2P_{m,n}. \tag{3.2}$$

が得られます。この2つの関係式 (3.1),(3.2) を漸化式として書き直すと

$$P_{m+1,n}=2P_{m,n}-P_{m-1,n}; \tag{case 1}$$
$$P_{m-1,n}=2P_{m,n}-P_{m+1,n}; \tag{case 2}$$
$$P_{m,n+1}=2P_{m,n}-P_{m,n-1}; \tag{case 3}$$
$$P_{m,n-1}=2P_{m,n}-P_{m,n+1}. \tag{case 4}$$

と以上の4つの primary 数 $P_{m,n}$ の漸化式が得られます。本質としては一つの漸化式と考えられなくもないですが、それぞれに意味があります。それは、有理関数の具体例の後の絵を参考にして下さい。そして関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式は、①関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の定義 3.2、それから、②上記の primary 数 $P_{m,n}$ の漸化式、最後に③ lemniscate 関数の加法定理の計算結果つまり $a=2b-c$ として $\mathrm{sl}(a)$ と、$\mathrm{cl}(a)$ を $\mathrm{sl}(b),\mathrm{cl}(b),\mathrm{sl}(c),\mathrm{cl}(c)$ の有理関数で表したもの、以上3つを踏まえて得られます。

定理 3.3. [39, Theorem 3.10] 関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ は以下の漸化式を満たします。ここでは、$s:=\mathrm{sl}(u)$ と置きます。(注：漸化式は正確には4タイプあります。4つの *primary* 数 $P_{m,n}$ の漸化式が在るからです。ここでは、そのうちの1つ *(case 1)* を挙げます。)

$$F_{m+1,n}=\frac{\begin{aligned}&2(1-s^2)G_{m,n}G_{m-1,n}F_{m,n}(1+s^2F_{m,n}^2)(1+2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\\&\qquad-F_{m-1,n}(1+s^2)(1+s^4F_{m,n}^4)(1-2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\end{aligned}}{\begin{aligned}&(1+s^2)(1+s^4F_{m,n}^4)(1+2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\\&\qquad+2s^2(1-s^2)G_{m,n}G_{m-1,n}F_{m,n}F_{m-1,n}(1+s^2F_{m,n}^2)(1-2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\end{aligned}};$$

$$G_{m+1,n}=\frac{\begin{aligned}&(1+s^2)G_{m-1,n}(1+s^4F_{m,n}^4)(1-2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\\&\qquad+2s^2(1+s^2)G_{m,n}F_{m,n}F_{m-1,n}(1+s^2F_{m,n}^2)(1+2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\end{aligned}}{\begin{aligned}&(1+s^2)(1+s^4F_{m,n}^4)(1+2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\\&\qquad-2s^2(1-s^2)F_{m,n}F_{m-1,n}G_{m,n}G_{m-1,n}(1+s^2F_{m,n}^2)(1-2s^2F_{m,n}^2-s^4F_{m,n}^4)\end{aligned}}.$$

今、上記に関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式が構成された事により初期条件（値）$F_{0,0}, F_{1,0}, F_{0,1}, F_{1,1}$ と $G_{0,0}, G_{1,0}, G_{0,1}, G_{1,1}$ 以上の８つが解れば、後は帰納的に求められます。そして、上記８つの有理関数はその計算結果より $\mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}^2(u))$ の有理関数である事が解ります (具体例は後程)。再び漸化式を用いる事により $F_{m,n}, G_{m,n} \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}^2(u))$ が解ります。さらに

$$\mathrm{sl}(iu) = i\,\mathrm{sl}(u), \qquad \mathrm{cl}(iu) = \frac{1}{\mathrm{cl}(u)}.$$

に留意すれば以下の事が解ります。

Corollary 3.4. [39, Corollary 3.12] *Gauss* 整数の奇数 $m = a + ib; a, b \in \mathbb{Z}; a - b \equiv 1 \pmod 2$ に対して

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \quad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)} \quad \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^2),$$

さらに、上記事実を用いて、$\mathrm{sl}(iu) = i\,\mathrm{sl}(u)$ 踏まえると

(Fact 1)
$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}(u)^4).$$

という事実が得られます。この論法は、Abel の Recherches [18] に見る事が出来ます。

3.3. **幾つかの有理関数を組み合わせたものに見られる対称性.** 具体的な有理関数を求めるために、関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ を定義し、そして漸化式とその初期値を考えました。その事により今 $F_{m,n}, G_{m,n} \in \mathbb{Q}(i)(\mathrm{sl}^2(u))$ が解っています。取り敢えず以下を準備します。

$$A_{m,n} := \mathrm{sl}(P_{m,n}u)\,\mathrm{cl}(P_{m,n}u)\,\mathrm{sl}(\alpha u)\,\mathrm{cl}(\alpha u), \qquad k := \mathrm{cl}(\alpha u), \qquad \alpha := -2 + 2i;$$

$$A'_{m,n} := \mathrm{sl}(P_{m,n}u)\,\mathrm{cl}(P_{m,n}u)\,\mathrm{sl}(\beta u)\,\mathrm{cl}(\beta u), \qquad k' := \mathrm{cl}(\beta u), \qquad \beta := -2 - 2i.$$

これらを変数 x, y と見たてて、特に上記の k, k' について $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ で表す事を考える事により、以下の**対称的な**関係が得られました。

定理 3.5. [39, Theorem 3.13] ここでは $s := \mathrm{sl}(u)$ と置く。関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の間（達）に以下の対称的な関係式が成立する。

$$k = \frac{1 + 4is^2 + 2s^4 - 4is^6 + s^8}{1 - 4is^2 + 2s^4 + 4is^6 + s^8}, \qquad k' = \frac{1}{k}.$$

$$k = \frac{F_{m+1,n}G_{m+1,n} - F_{m-1,n}G_{m-1,n}}{F_{m,n}(G_{m+1,n} - G_{m-1,n}) + G_{m,n}(F_{m+1,n} - F_{m-1,n})}. \qquad (n \text{ を固定})$$

$$k' = \frac{F_{m,n+1}G_{m,n+1} - F_{m,n-1}G_{m,n-1}}{F_{m,n}(G_{m,n+1} - G_{m,n-1}) + G_{m,n}(F_{m,n+1} - F_{m,n-1})}. \qquad (m \text{ を固定})$$

上記定理 3.5 を得るまでのプロセスと筆者の考えている、感じている事. 先に関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の漸化式を構成しました。目的は有理関数の具体例をことごとく取り出したいということだったのですが、どうも‥‥漸化式が、$F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ **だけで表現されていないという観点で汚いな**…と感じていました。なんとか $s:=\mathrm{sl}(u)$ を消去出来ないのか？というのが当時考えていた事でした。そこで、lemniscate 関数の加法定理

$$\mathrm{sl}(u+v)=\frac{\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{cl}(v)+\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{sl}(v)}{1-\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)},\qquad \mathrm{cl}(u+v)=\frac{\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)-\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)}{1+\mathrm{sl}(u)\,\mathrm{sl}(v)\,\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v)}.$$

の形状を踏まえて、強引に

$$F_{m+1,n}+F_{m-1,n}=F_{m+1,n},F_{m,n},F_{m-1,n}\text{ の 3 つの関係式として }\cdots$$

という形式で捉えられないのか？と考えました。以下はこの考え方をごり押しして、得た計算結果達です。

Lemma 3.6. [39, Lemma 3.14] 関数 $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ は以下の関係式を満たす。

$$F_{m+1,n}+F_{m-1,n}=A_{m,n}(F_{m+1,n}-F_{m-1,n})+2kF_{m,n}, \tag{3.3}$$

$$G_{m+1,n}+G_{m-1,n}=-A_{m,n}(G_{m+1,n}-G_{m-1,n})+2kG_{m,n}; \tag{3.4}$$

$$F_{m,n+1}+F_{m,n-1}=A'_{m,n}(F_{m,n+1}-F_{m,n-1})+2k'F_{m,n}, \tag{3.5}$$

$$G_{m,n+1}+G_{m,n-1}=-A'_{m,n}(G_{m,n+1}-G_{m,n-1})+2k'G_{m,n}. \tag{3.6}$$

この lemma3.6 の計算結果を受けて、式 (3.3)、(3.4) を連立方程式と見たてて k を $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ で表す事が出来て、同様に式 (3.5)、(3.6) を連立方程式と見たてて k' を $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ で表す事が出来ました。こうして得たのが定理 3.5 です。定理 3.5 は以上のように、計算のごり押しだけで出力したのですが、得られた定理 3.5 は御覧のような確かな**対称性**を訴えています。

① $P_{m,n}$ の (m,n) に関する $F_{m,n}$ と $G_{m,n}$ の対称的な関係を与えている。
② $P_{m,n}$ に依らない特定の不変有理関数の存在を示唆している。

以下が筆者の感じている疑問です。

問題 3.7 ((疑問)). 得られた、対称性、定理 3.5 は、既存の数学の中のどのような事と、あるいは、どのような具体例に対応しているのか？

3.4. **有理関数の具体例** [39, p31–p36]. 以下では $P_{m,n},F_{m,n},G_{m,n}$ の具体例を紹介します。(ここでは $s:=\mathrm{sl}(u),c(u)=\mathrm{cl}(u)$ とし m は与えられている primary 数としています。)

- $m=1=P_{0,0}$:

$$F_{0,0}=\frac{s(u)}{s(u)}=1;$$

$$G_{0,0}=\frac{c(u)}{c(u)}=1.$$

- $m=-1+2i=P_{1,0}$:

$$F_{1,0}=\frac{s((-1+2i)u)}{s(u)}=\frac{(-1+2i)+s^4}{1+(-1+2i)s^4};$$

$$G_{1,0} = \frac{c((-1+2i)u)}{c(u)} = \frac{1+(2+2i)s^2+s^4}{1-(2+2i)s^2+s^4}.$$

- $m = -1-2i = P_{0,1}$:

$$F_{0,1} = \frac{s((-1-2i)u)}{s(u)} = \frac{(-1-2i)+s^4}{1+(-1-2i)s^4};$$

$$G_{0,1} = \frac{c((-1-2i)u)}{c(u)} = \frac{1+(2-2i)s^2+s^4}{1-(2-2i)s^2+s^4}.$$

- $m = -3 = P_{1,1}$:

$$F_{1,1} = \frac{s((-3)u)}{s(u)} = \frac{-3+6s^4+s^8}{1+6s^4-3s^8};$$

$$G_{1,1} = \frac{c((-3)u)}{c(u)} = \frac{1-4s^2-6s^4-4s^6+s^8}{1+4s^2-6s^4+4s^6+s^8}.$$

- $m = 3+2i = P_{0,-1}$:

$$F_{0,-1} = \frac{s((3+2i)u)}{s(u)} = \frac{(3+2i)+(7-4i)s^4+(-11+10i)s^8+s^{12}}{1+(-11+10i)s^4+(7-4i)s^8+(3+2i)s^{12}};$$

$$G_{0,-1} = \frac{c((3+2i)u)}{c(u)} = \frac{1-(2+6i)s^2+(3-8i)s^4+(12+4i)s^6+(3-8i)s^8-(2+6i)s^{10}+s^{12}}{1+(2+6i)s^2+(3-8i)s^4-(12+4i)s^6+(3-8i)s^8+(2+6i)s^{10}+s^{12}}.$$

- $m = 3-2i = P_{-1,0}$:

$$F_{-1,0} = \frac{s((3-2i)u)}{s(u)} = \frac{(3-2i)+(7+4i)s^4+(-11-10i)s^8+s^{12}}{1+(-11-10i)s^4+(7+4i)s^8+(3-2i)s^{12}};$$

$$G_{-1,0} = \frac{c((3-2i)u)}{c(u)} = \frac{1-(2-6i)s^2+(3+8i)s^4+(12-4i)s^6+(3+8i)s^8-(2-6i)s^{10}+s^{12}}{1+(2-6i)s^2+(3+8i)s^4-(12-4i)s^6+(3+8i)s^8+(2-6i)s^{10}+s^{12}}.$$

- $m = 1+4i = P_{1,-1}$:

$$F_{1,-1} = \frac{s((1+4i)u)}{s(u)} = \frac{(1+4i)-(20+12i)s^4-(10-28i)s^8+(12-20i)s^{12}+s^{16}}{1+(12-20i)s^4-(10-28i)s^8-(20+12i)s^{12}+(1+4i)s^{16}};$$

$$G_{1,-1} = \frac{c((1+4i)u)}{c(u)} = \frac{\begin{aligned}1+(8-4i)s^2-(4-8i)s^4-(8+12i)s^6-(10+48i)s^8\\ -(8+12i)s^{10}-(4-8i)s^{12}+(8-4i)s^{14}+s^{16}\end{aligned}}{\begin{aligned}1-(8-4i)s^2-(4-8i)s^4+(8+12i)s^6-(10+48i)s^8\\ +(8+12i)s^{10}-(4-8i)s^{12}-(8-4i)s^{14}+s^{16}\end{aligned}}.$$

- $m = 1-4i = P_{-1,1}$:

$$F_{-1,1} = \frac{s((1-4i)u)}{s(u)} = \frac{(1-4i)-(20-12i)s^4-(10+28i)s^8+(12+20i)s^{12}+s^{16}}{1+(12+20i)s^4-(10+28i)s^8-(20-12i)s^{12}+(1-4i)s^{16}};$$

$$G_{-1,1} = \frac{c((1-4i)u)}{c(u)} = \frac{\begin{aligned}1+(8+4i)s^2-(4+8i)s^4-(8-12i)s^6-(10-48i)s^8\\ -(8-12i)s^{10}-(4+8i)s^{12}+(8+4i)s^{14}+s^{16}\end{aligned}}{\begin{aligned}1-(8+4i)s^2-(4+8i)s^4+(8-12i)s^6-(10-48i)s^8\\ +(8-12i)s^{10}-(4+8i)s^{12}-(8+4i)s^{14}+s^{16}\end{aligned}}$$

- $m = 5 = P_{-1,-1}$:

$$F_{-1,-1}=\frac{s(5u)}{s(u)}=\frac{5-62s^4-105s^8+300s^{12}-125s^{16}+50s^{20}+s^{24}}{1+50s^4-125s^8+300s^{12}-105s^{16}-62s^{20}+5s^{24}};$$

$$G_{-1,-1}=\frac{c(5u)}{c(u)}=\frac{\begin{array}{c}1-12s^2-34s^4-60s^6+175s^8+136s^{10}-92s^{12}+136s^{14}+175s^{16}\\-60s^{18}-34s^{20}-12s^{22}+s^{24}\end{array}}{\begin{array}{c}1+12s^2-34s^4+60s^6+175s^8-136s^{10}-92s^{12}-136s^{14}+175s^{16}\\+60s^{18}-34s^{20}+12s^{22}+s^{24}\end{array}}.$$

- $m=-3+4i=P_{2,0}$:

$$F_{2,0}=\frac{s((-3+4i))u}{s(u)}=\frac{\begin{array}{c}(-3+4i)+(2+44i)s^4-(89+248i)s^8+(12+184i)s^{12}\\+(59-12i)s^{16}-(46-28i)s^{20}+s^{24}\end{array}}{\begin{array}{c}1-(46-28i)s^4+(59-12i)s^8+(12+184i)s^{12}\\-(89+248i)s^{16}+(2+44i)s^{20}+(-3+4i)s^{24}\end{array}};$$

$$G_{2,0}=\frac{c((-3+4i))u}{c(u)}=\frac{\begin{array}{c}1+(4+12i)s^2+(22-8i)s^4-(44+68i)s^6+(15-160i)s^8\\+(104-8i)s^{10}-(12-208i)s^{12}+(104-8i)s^{14}+(15-160i)s^{16}\\-(44+68i)s^{18}+(22-8i)s^{20}+(4+12i)s^{22}+s^{24}\end{array}}{\begin{array}{c}1-(4+12i)s^2+(22-8i)s^4+(44+68i)s^6+(15-160i)s^8\\-(104-8i)s^{10}-(12-208i)s^{12}-(104-8i)s^{14}+(15-160i)s^{16}\\+(44+68i)s^{18}+(22-8i)s^{20}-(4+12i)s^{22}+s^{24}\end{array}}.$$

- $m=-3-4i=P_{0,2}$:

$$F_{0,2}=\frac{s((-3-4i))u}{s(u)}=\frac{\begin{array}{c}(-3-4i)+(2-44i)s^4-(89-248i)s^8+(12-184i)s^{12}\\+(59+12i)s^{16}-(46+28i)s^{20}+s^{24}\end{array}}{\begin{array}{c}1-(46+28i)s^4+(59+12i)s^8+(12-184i)s^{12}\\-(89-248i)s^{16}+(2-44i)s^{20}+(-3-4i)s^{24}\end{array}};$$

$$G_{0,2}=\frac{c((-3-4i))u}{c(u)}=\frac{\begin{array}{c}1+(4-12i)s^2+(22+8i)s^4-(44-68i)s^6+(15+160i)s^8\\+(104+8i)s^{10}-(12+208i)s^{12}+(104+8i)s^{14}+(15+160i)s^{16}\\-(44-68i)s^{18}+(22+8i)s^{20}+(4-12i)s^{22}+s^{24}\end{array}}{\begin{array}{c}1-(4-12i)s^2+(22+8i)s^4+(44-68i)s^6+(15+160i)s^8\\-(104+8i)s^{10}-(12+208i)s^{12}-(104+8i)s^{14}+(15+160i)s^{16}\\+(44-68i)s^{18}+(22+8i)s^{20}-(4-12i)s^{22}+s^{24}\end{array}}.$$

- $m=-5+2i=P_{2,1}$:

$$F_{2,1}=\frac{s((-5+2i))u}{s(u)}=\frac{\begin{array}{l}(-5+2i)-(13+76i)s^4-(325-246i)s^8+(459-520i)s^{12}\\ \qquad -(183-398i)s^{16}+(65+148i)s^{20}+(1-70i)s^{24}+s^{28}\end{array}}{\begin{array}{l}1+(1-70i)s^4+(65+148i)s^8-(183-398i)s^{12}\\ \quad +(459-520i)s^{16}-(325-246i)s^{20}-(13+76i)s^{24}+(-5+2i)s^{28}\end{array}};$$

$$G_{2,1}=\frac{c((-5+2i))u}{c(u)}=\frac{\begin{array}{l}1-(10-10i)s^2-(9-40i)s^4+(84+76i)s^6-(251+56i)s^8\\ \quad -(214+170i)s^{10}+(323+144i)s^{12}+(408+552i)s^{14}\\ \quad +(323+144i)s^{16}-(214+170i)s^{18}\\ \quad -(251+56i)s^{20}+(84+76i)s^{22}-(9-40i)s^{24}-(10-10i)s^{26}+s^{28}\end{array}}{\begin{array}{l}1+(10-10i)s^2-(9-40i)s^4-(84+76i)s^6-(251+56i)s^8\\ \quad +(214+170i)s^{10}+(323+144i)s^{12}-(408+552i)s^{14}\\ \quad +(323+144i)s^{16}+(214+170i)s^{18}\\ \quad -(251+56i)s^{20}-(84+76i)s^{22}-(9-40i)s^{24}+(10-10i)s^{26}+s^{28}\end{array}}.$$

- $m=-7=P_{2,2}$:

$$F_{2,2}=\frac{s((-7)u)}{s(u)}$$
$$=\frac{\begin{array}{l}-7+308s^4+2954s^8-19852s^{12}+35231s^{16}-82264s^{20}+111916s^{24}\\ -42168s^{28}-15736s^{32}+14756s^{36}-1302s^{40}+196s^{44}+s^{48}\end{array}}{\begin{array}{l}1+196s^4-1302s^8+14756s^{12}-15736s^{16}-42168s^{20}\\ \quad +111916s^{24}-82264s^{28}+35231s^{32}-19852s^{36}+2954s^{40}+308s^{44}-7s^{48}\end{array}};$$

$$G_{2,2}=\frac{c((-7)u)}{c(u)}$$
$$=\frac{\begin{array}{l}1-24s^2-116s^4-456s^6+2562s^8+2072s^{10}-4004s^{12}+16776s^{14}\\ \quad +29423s^{16}-55792s^{18}-64488s^{20}+29232s^{22}+60956s^{24}\\ \quad +29232s^{26}-64488s^{28}-55792s^{30}+29423s^{32}+16776s^{34}\\ \quad -4004s^{36}+2072s^{38}+2562s^{40}-456s^{42}-116s^{44}-24s^{46}+s^{48}\end{array}}{\begin{array}{l}1+24s^2-116s^4+456s^6+2562s^8-2072s^{10}-4004s^{12}-16776s^{14}\\ \quad +29423s^{16}+55792s^{18}-64488s^{20}-29232s^{22}+60956s^{24}\\ \quad -29232s^{26}-64488s^{28}+55792s^{30}+29423s^{32}-16776s^{34}\\ \quad -4004s^{36}-2072s^{38}+2562s^{40}+456s^{42}-116s^{44}+24s^{46}+s^{48}\end{array}}.$$

上記有理関数の具体例に関する補足. 上記、有理関数は Mathematica4.1 を用いて計算させたものです。漸化式が構成できたので、後は計算機におまかせです。ただ、実際に先人達（この場合 Gauss と Eisenstein）がどのように計算したのかはまた別の話です。Gauss に関しての有理関数の計算方法（倍角公式としての）は、杉本敏夫氏の [34] にあります。（この報告集の $F_{-1,-1}$ や $F_{2,2}$ についての説明があります。）また、Eisenstein に関してですが、4 次剰余相互法則の証明の論文 [13] の中で合同関係を満たしている有理関数の存在の具体例を言うために、この報告集で言う $F_{1,0}, F_{0,-1}, F_{1,-1}, F_{-1,-1}$ を提示してます。

前回の第１５回数学史シンポジウム [2] においては、これらの具体例の中から、$F_{-1,0}, G_{-1,0}$ それから $F_{2,1}, G_{2,1}$ を提示致しました。

今回、提示している有理関数の数学の中の位置付け、あるいは役割等については章を改めて述べたいと思います。

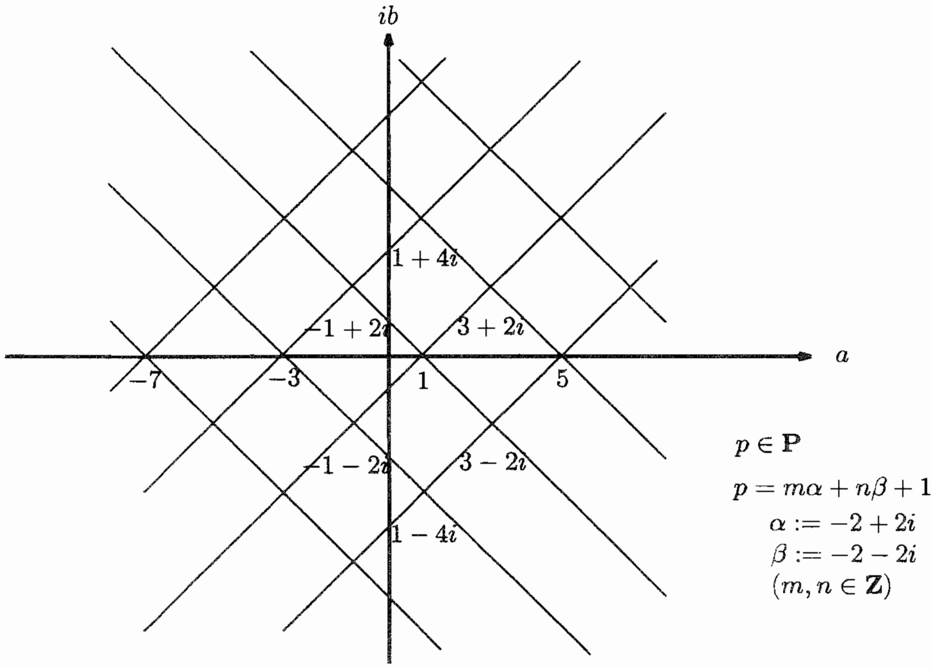

Figure 1 (Lattice of primary numbers of $\mathbf{z}[i]$)

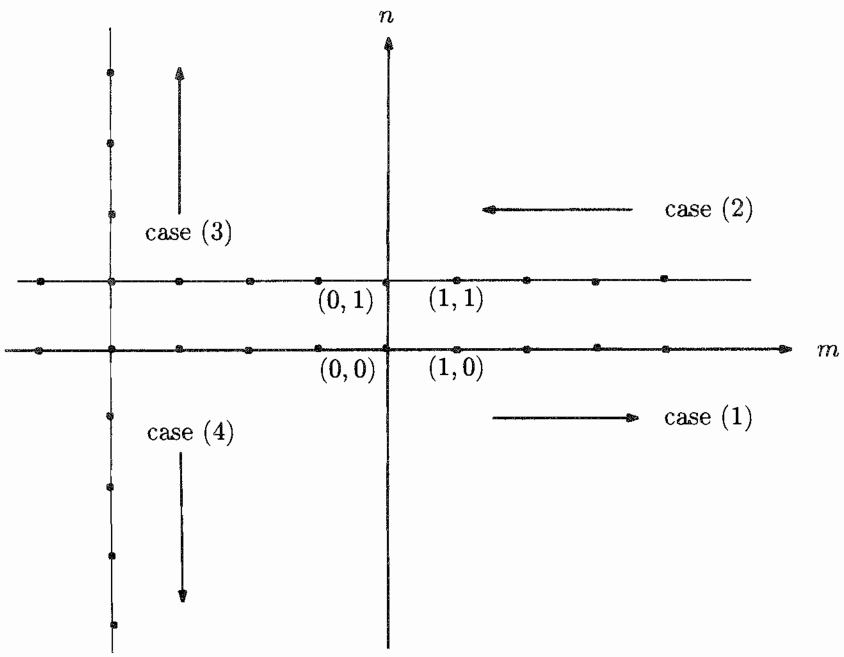

Figure 2 ((m, n) of $\mathbf{P}_{m,n}$)

4. 背景、その弐 (虚数乗法に関するノート)

今回のお話は、$m \in \mathbb{P}$ に対して、

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)}, \qquad \frac{\mathrm{cl}(mu)}{\mathrm{cl}(u)}$$

を $\mathrm{sl}(u)$ で表した**有理関数を帰納的に求める事ができる漸化式**を紹介し、また、改めて多めに、その有理関数の具体例を提示しました。具体例や関係式から、**対称性としての現象**が現れているのが見て取れます。冒頭にも書きましたが、この**対称性**としての性質を、関数の性質(特質)として捉え直していくというのが目的です。元々の**動機**は Eisenstein によってなされた lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ を用いた4次剰余の相互法則の証明でした [12, 13, 15, 17, 24]。先にも書きましたが Eisenstein は $m \in \mathbb{P}$ で $\mathrm{sl}(mu)/\mathrm{sl}(u)$ に対して決まる $\mathrm{sl}(u)$ の有理関数を用いて4次剰余の相互法則の証明を与えました。以下がその有理関数の形です。

定理 4.1. [24, Proposition 8.2] $m = a + ib(a, b \in \mathbb{Z}) \in \mathbb{P}$ に対して、$Nm := a^2 + b^2$ とおく。このとき $\mathbb{Z}[i]$ 係数の多項式 $W_m(X), V_m(X)$ が存在し、それぞれ次数は $(Nm-1)/4$ で、これらの多項式を用いて

$$\frac{\mathrm{sl}(mu)}{\mathrm{sl}(u)} = \frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \qquad \text{但し } x := \mathrm{sl}(u).$$

と表される。また、多項式 $W_m(X), V_m(X)$ は以下の関係で結ばれている。

$$W_m(x^4) = x^{Nm-1}V_m(x^{-4}), \qquad W_m(X) = X^{\frac{Nm-1}{4}}V_m(X^{-1}).$$

我々は、先に提示されている具体例からも上記定理を認める事が出来ます。ここで、我々が扱っている研究対象が何なのか?という事ですが、**虚数乗法 (complex multiplication) を持つ楕円関数**を扱っています。以下が虚数乗法を持つ楕円関数の定義です。

定義 4.2. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ とする。$\phi(u)$ を基本周期 (ω_1, ω_2) を持つ楕円関数とする。このときに、$\phi(\alpha u)$ が基本周期 (ω_1, ω_2) を持つ楕円関数になる時、楕円関数 $\phi(u)$ は虚数乗法 α を持つという。

さらに、この上記定義に対して、楕円関数 $\phi(u)$ の基本周期 (ω_1, ω_2) の周期平行四辺形をラティスと考え直して α を作用させてもラティス不変であると考える事によって、母数(基本周期の比) $\tau := \omega_2/\omega_1$ が虚2次体の数となっている事が解ります。定義の書き換えがなされます。(必要十分になっています。)

Proposition 4.3.

楕円関数 $\phi(u)$ が虚数乗法 $(\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ を持つ。$\Longleftrightarrow$ 基本周期の比 $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ が虚 *2* 次体の数。

今日だと、上記が虚数乗法の一つの定義です [28, p415–p421]。

> 虚数乗法論はそれぞれの立場から、歴史的な意義 [10, 11]、関数論としての意義(**特別な楕円関数**)、類体論の源流としての位置づけ [29]、そして楕円曲線論からの見解 [27]、等で論じられていて後から来る者は非情に迷惑します。皆が騒ぐぐらいだから大事な概念、あるいは理論であるのだろうと察しはするのですが ⋯

先に挙げた定理で見直すと、

$$\mathrm{sl}(mu) = \mathrm{sl}(u)\frac{W_m(x^4)}{V_m(x^4)}, \qquad \text{但し } x := \mathrm{sl}(u).$$

より直ちに、lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ は虚数乗法 $m \in \mathbb{P}$ を持つ事が解ります。実際、lemniscate sine $\mathrm{sl}(u)$ は母数 $\tau = 1+i$ となっています [5]。虚数乗法を持つ楕円関数の意義や有用性については数学（世間）では随分言われていましたが、筆者は何故？とか、『まあ、取り敢えず**定義だけは押さえておくか …**』という程度の認識しかありませんでした。以下は筆者が後天的にして得た虚数乗法論が有用であると思えるに至った一つの認識です。虚数乗法論の形成史といえます。（特に [10, 11] を参考、参照にしました。）

一般に代数方程式は、１、２、３、４次の方程式までは、解の公式が存在します。代数的に解く事ができます。しかし、５次以上の代数方程式に関しては一般的に代数的に解く事が出来ません。（これは、Abel の指摘です。）しかし、**特別の場合に**５次以上の代数方程式で代数的解法を有するものがあります。これは、Gauss 整数論第７章の話 [3, p419–p469] ですが、例えば、

$$x^n - 1 = 0,$$

などがそうです。これの根は、現在だと関数論の立場から直ちに

$$e^{\frac{2\pi ri}{n}} = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}, \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

で与えられます。再び関数論の立場から、上記の根が、半径１の円に内接する正多角形（n 角形）の頂点に対応しているのが解ります。無論、Gauss も円の分割を定める方程式として $x^n - 1 = 0$ を認識し、$x^n - 1 = 0$ という代数方程式を**円関数（三角関数）を用いて理論展開**を与えました。また、円周等分方程式 $x^n - 1 = 0$ を根の形状から以下の代数方程式を含むものとしても認識していました。

(1) $\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, を根に持つ代数方程式

(2) $\cos\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, を根に持つ代数方程式

(3) $\tan\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, を根に持つ代数方程式

また、その冒頭で次のような示唆も与えられています。Gauss により始められた**等分方程式論**の中に**虚数乗法論の源泉**を認める事が出来ます。

「ところが、我々は今から説明を始めたいと思う理論の諸原理は、ここで繰り拡げられる事柄に対して、それよりもはるかに広々と開かれている。なぜなら、この理論の諸原理は円関数のみならず、そのほかの多くの超越関数、たとえば積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

に依拠する超越関数に対しても、そうして、またさまざまな種類の合同式に対しても、同様の成果を伴いつつ、適用することができるからである。」[3, p419]

上記の積分の式に依拠する超越関数が、lemniscate 関数のことです。Gauss は公表をしませんでしたが、既に lemniscate の曲線の等分理論を感知していました [5, 34]。

以上のような Gauss 整数論第 7 章の話 [3, p419–p469] を、上記の示唆を受けて、また、その内容、円周等分理論、あるいは、この場合言い換えると**三角関数の等分方程式論を受けて**、Abel は Recherches の中で**楕円関数の等分方程式論**を展開します [18, 22]。Abel は実際に [18, 22] において

$$x := \phi(\alpha) \overset{\text{逆関数}}{\Longleftrightarrow} \alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}, \qquad (c, e : \text{定数}). \tag{4}$$

さらに、**状勢を簡易化するために** (<ーこれに関しては機会改めて、Recherches [18, 22] の具体的な内容と関連付けて言いたいと思います。)

$$f(\alpha) := \sqrt{1-c^2\phi(\alpha)^2}, \qquad F(\alpha) := \sqrt{1+e^2\phi(\alpha)^2}. \tag{5}$$

と定義して、楕円関数の性質をまず明確にした上で、$m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\phi(m\alpha), \qquad f(m\alpha), \qquad F(m\alpha).$$

をそれぞれ $\phi(\alpha), f(\alpha), F(\alpha)$ の有理関数で表示できる事実に着目します（帰納的に加法定理を用いて事実が得られます。)。そして、得られた表示、考えられる事実より、有理関数の積表示を考えれば $\phi(m\alpha) = 0$ を満たす方程式の根、つまり

$$\phi(m\alpha) = \frac{P_m(\phi(\alpha)^2)}{Q_m(\phi(\alpha)^2)}, \qquad (\exists P_m(X), Q_m(X) \in \mathbb{Z}[X]).$$

という事実を用いれば上記 $\phi(m\alpha)$ の表示によって決定される代数方程式 $P_m(X) = 0$(**これが特殊等分方程式**) の根 X_0 が**形式的に楕円関数の特殊値として**

$$X_0 = \phi\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{m}\right)^2, \qquad (a, b \in \mathbb{Z}). \tag{6}$$

で与えられる事を表明します。ここで、ω_1, ω_2 は

$$\omega_1 = 2\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}, \qquad \omega_2 = 2\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

で決まる定数です。(上記定義した、楕円関数 $\phi(\alpha)$ はその基本周期を $(2\omega_1, i2\omega_2)$ に持ちます。）特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ の根の形状 (6) を用いて、特に $m = 2n+1$ の時の場合に代数的に解けるのか、解けないのかを Gauss 整数論第 7 章 [3, p419–p469] をまねて考察します。そして、Abel は特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ が代数的に解けるものと、代数的に解けない場合の 2 つのグループに分かれる認識を持ちます。Abel は特殊（周期）等分方程式 $P_m(X) = 0$ が一般的には代数的に解けない事に気付きました。

$$\text{特殊等分方程式 } P_m(X) = 0 \begin{cases} \text{代数的に解ける} & e = c, e = c\sqrt{3}, e = c(2 \pm \sqrt{3}), \cdots. \\ \text{代数的に解けない.} & \end{cases}$$

この楕円関数とその加法定理によって定義される特殊等分方程式が代数的に解ける。この時の楕円関数を今日では虚数乗法を持つ楕円関数と呼んでいます。**この Abel の発見が虚数乗法論の誕生です。** Abel は Recherches [18, 22] の中で楕円関数 $\phi(\alpha)$ を与える定数 c, e が上記に在るような**特別な関係**にあるとき、その特殊等分方程式は代数的に解けると明言し、さらに具体的に $e = c = 1$ の

時、つまり lemniscate 関数の時の詳細も論じています。具体的に $\mathrm{sl}((2+i)u)$ の計算結果、本報告集の $F_{1,0}$ に相当するものも提示しています。また曲線 lemniscate の分割ができる事も言明しています。今回、提示している有理関数の具体例は、改めて分子の多項式に注目した上で、そう言った意味でも代数的に解く事が可能な5次以上の代数方程式達（先の定理 4.1 を用いると）$W_m(X)=0$ を提示している事にもなります。

さらに Abel は Gauss 整数論第7章の話 [3, p419–p469] や、自身のの発表論文 Recherches [18, 22] の内容を受けて、**代数的に解く事が出来る、代数方程式達には、その根どうしに何らかの関係があるのでは？**という着眼に至ります。そして論文 [19, 22] のなかで、最初に今日でいう巡回方程式に相当する事実を提示します。

定理 4.4. [19, Theorem III] n 次代数方程式 n 個の根が、α をある1つの根、$R(x)$ をある有理関数、$R^k(x)$ を $R(x)$ の k 回合成変換とし、これらを用いて以下の *(7)* ように表現される場合、この n 次代数方程式は可解。

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^{n-1}(\alpha). \qquad (R^n(\alpha)=\alpha) \tag{7}$$

上記定理 4.4 に対して、今回の報告集の中で提示している有理関数の例が、そのまま上記定理の有理関数の例に対応しています。つまり定理 4.1 に依る代数方程式 $W_m(X)=0$ の根どうしの関係を与える有理関数 $R(x)$ になっている。この具体例は前回の記事 [2, p55–p57] で与えました。

さて話を Gauss に戻しますが、lemniscate の分割が出来ると、Abel は Recherches [18, 22] の中で表明しましたが、実は Gauss も lemniscate における分割を lemniscate 関数を用いてその洞察をしていました [5, 6, 34]。この具体的な話は杉本敏夫氏の3部作、『ガウスが行った数値計算(参)』[34] に**実際に Gauss がどのような道筋を辿ったか？**という観点から詳しく描かれてあります。その杉本敏夫氏の [34] の中で、$\mathrm{sl}(5u)$ の倍角公式としての計算結果を提示し次のような注意を与えている箇所があります。($\mathrm{sl}(5u)$ はこの報告集の $F_{-1,-1}$ に相当します。)

> (前略) 5倍角公式自体は
>
> $$\mathrm{sl}(5u) = s\frac{5-62s^4-105s^8+300s^{12}-125s^{16}+50s^{20}+s^{24}}{1+50s^4-125s^8+300s^{12}-105s^{16}-62s^{20}+5s^{24}}, \qquad s := \mathrm{sl}(u).$$
>
> である。注意すべきは、分母の方程式は分子括弧内の方程式に $1/s$ を代入して s^{24} を掛けたいわゆる**逆数方程式**になっていることである。この点は各 n 倍角公式にも共通する。[34, p22](後略)

この報告集に在る有理関数の具体例や、事実、定理 4.1 が上記に在る**逆数方程式**という言明を肯定しています。実際に有理関数の具体例や定理 4.1 から、有理関数の**零点と極の対称性**がある事は直ちに解ります。また、Abel もこの**逆数方程式**つまり有理関数の**零点と極の対称性**については認識していました [22]。(<ーこの件に関しては機会改めます。)

筆者の目的は冒頭においても宣言しましたが、**現象として現れている対称性を関数の性質（特質）として捉え直したい**と考えています。

最後に Kronecker までの経緯ですが、Abel は [20]、及びその補足 [21] の中で、今日の虚数乗法の定義（Proposition 4.3）に相当する発見をしています。そして、**代数的に解く事の出来る代数方程式達をことごとく取り出したい**という**数学的意志**を持って、あの『Kronecker 青春の夢』が表明

される事になります。

Gauss 整数論第 7 章 $\Longrightarrow$ Abel の楕円関数の等分方程式論 $\Longrightarrow$ Kronecker 青春の夢

Kronecker 青春の夢
「有理数の平方根を係数にもつ Abel 方程式は、特異母数を持つ楕円関数の変換方程式によってつくされる。」

補足（関連記事等）. 筆者が、このシンポジウムに来るようになったのは、高瀬正仁氏その人に会いに来たのが、きっかけです。特に、

(1) 『「Gauss 整数論」と Hilbert の第１２問題』[1]
(2) 『ｄｘとｄｙの解析学』[30]

以上の論説と、著作が筆者に足を津田塾大学に向かわせました。論説 [1] に関して、高瀬正仁氏は冒頭で、

「Gauss『整数論』と Hilbert の第１２問題の間にはきわめて親密な関係が認められ、Gauss『整数論』を共通の泉とするさまざまな数学の流れ（相互に分かちがたく結ばれている５筋の流れがある。）は、Hilbert の第１２問題の解決をもって、ある同じ場所に合流するであろうと私は思う。現在の段階では、なお、Hilbert の第１２問題は、解けたとは言えず『整数論』以来の数学の流れは依然として流れ続けている。」[1, p415]

と述べ、**個々の先人数学者達の意識をつなぎあわせるようにして一つの道筋（認識）を提示**しました。論説の中では上記に在る５筋の流れを①相互法則、② Abel 方程式論、③虚数乗法論（Kronecker 青春の夢)、④ Jacobi の逆問題、⑤多変数解析関数論、としています。この提示された５つの流れと、上記表明された認識を肯定する意味でも、**三角関数と lemniscate 関数の、関数の性質としての類似性に着目して**整理し、双方の関数の性質を基準として数学全体を捉え直した認識を [2]

(3) 『三角関数ｖｓ lemniscate 関数』[2]

にて公表しました。尚、今回のこの報告集の内容はこの [2] の続編です。また、この今回のこの報告集の内容の正確な位置付けを与えるために（特に虚数乗法論に関して）

(4) 『ガウスの遺産と継承者達』[10]
(5) 『Three aspects of the theory of complex multiplication』[11]

を参考にしています。筆者はこれらの論文 [11]、著作 [10] のおかげで、虚数乗法論という概念を自分自身の情緒として、貯える事が出来ました。それから、今日でいう虚数乗法論に関する認識を Abel がどこまで持っていたのかについては、原文は [18, 19, 20, 21]、筆者は主にこれら論文の日本語訳（高瀬正仁氏による）

(6) 『アーベル／ガロア楕円関数論』[22]

とその巻末の注釈を参考にしました。この上記訳本 [22] は巻末の注釈が丁寧にあるという意味で、訳本を超える、独自の数学書としての存在意義もあると考えます。尚、虚数乗法論の形成史と言うものになりますが、先に挙げた系譜の他に

Gauss 整数論 $\Longrightarrow$ Eisenstein の楕円関数による相互法則の証明 $\Longrightarrow$ Kronecker 青春の夢

という系譜もあります。この話も、[10, 11] に在ります。上記の系譜に関する具体的な話も機会改めてしたいと思います。また**積み上げられた知の蓄積**としての数学の一つの潮流としての**認識**の提示としては、上記にある [1] もそうですが、この数学史シンポジウム（第１６回）の報告集

(6) 『数学史通史の試み（数論と関数論）』[31]

等もここに挙げておきます。

それから、Gauss に関しては、杉本俊夫氏の３部作

(7) 『ガウスが行った数値計算』[32]

(8) 『ガウスが行った数値計算 (続)』[33]

(9) 『ガウスが行った数値計算 (参)』[34]

を挙げます。これらの３部作は特に**実際にガウスがどのように辿ったか？**という事を忠実に再現を与える事を念頭に書かれています。この報告集の記事と、特に上記の [34] は関連があります。[34] には、曲線 lemniscate の５分割に関する訂正や (近代数学史談 [6] の間違いを指摘）や、倍角公式としての sl($7u$) を**ガウスが実際にどのように計算したのか**等が書かれてあります。尚、sl($7u$) はこの報告集の $F_{2,2}$ に相当するものです。これら、杉本俊夫氏の３部作を通して、筆者は学者（数学史家）が果たすべき一つの役割を改めて感じている次第です。興味を持たれた方は是非、読んでください。筆者は、改めて感銘を受けました。

最後に直接、内容には触れられませんが、今野秀二氏の

(10) 『クロネッカーについて』[35]

(11) 『アイゼンシュタインによる楕円関数』[36]

を挙げておきます。これらについては、機会改めて触れたいと考えます。尚、今野秀二氏も今回のシンポジウムで『Jacobi's Funndamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum』というタイトルで講演しています。荒い言い方ですが、この今野秀二氏の講演内容の一部の**特殊の具体的な事例**がこの報告集の内容です。

以上、この報告集の内容と、数学の潮流としての位置付け、それから、関連する記事との関わりについて整理しました。参考文献というのは、後から次々に登場し、本当にキリがなく、また何処までを触れればよいのかも際限が無く … 多分、これが**本当の学問の重さ**なんだとは感じてはいるのですが …（日曜日の講演終了後、月曜日、筆者はダウンしてしまいました。）

『以下の、参考文献を全部読んで下さい。』というのも、乱暴な話と思い、関連する記事を上記に、別行にして (1)〜(11) と挙げた次第です。興味をもって、筆者の講演、ならびに、この記事を読んでくれた方々の役に立てれば幸いです。改めて筆者（小川）へのコメント、批判、評価、賛同、間違い … 等など、在りましたら、この記事の最初のページ下段に住所を載せてあります。そちらに、手紙等を送って頂けると幸いです。

REFERENCES

[1] 高瀬 正仁: 論説 『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月 秋季号.

[2] 小川 琢磨: 「三角関数 ｖｓ (対) lemniscate 関数 ～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～」第１５回数学史シンポジウム (2004.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.26** (2005.4), 44–77.

[3] 高瀬 正仁: 訳 『ガウス整数論』 朝倉書店 1995.

[4] 倉田 令二郎: 『平方剰余の相互法則』(ガウスの全証明) 日本評論社 1992.

[5] 河田 敬義: 『ガウスの楕円関数論』上智大学数学講究録 No 24, 1986.

[6] 高木 貞治: 『近代数学史談』『数学雑談』 (復刻版) 共立出版 1996.

[7] 平松 豊一: 数理情報科学シリーズ 18, 数論を学ぶ人のための『相互法則入門』, 牧野書店 1998.

[8] 久保田 富雄: 「整数論の発展をもとめて」(Gauss の第４証明をめぐる問題)、数学の歩み、8-4 (1961), 198–207 (この記事は、上記、平松『相互法則入門』217–232 にもある。)

[9] H.J.S.Smith: Report on the theory of numbers; reprinted, 1894 and 1965, in The Collected Mathematical Papers (originally published, in six parts, as a report of The British Association, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, and 1865.), Chelsea Publishing Company Bronx, New york.

[10] 高瀬 正仁: 『ガウスの遺産と継承者達』 ドイツ数学史の構想、 海鳴社, 1990.

[11] M. Takase: *Three aspects of the theory of complex multiplication*, The intersection of history and mathematics, Sci. Network Hist. Stud, **15** (1994), 91–108.

[12] G.Eisenstein: *Application de l'algébre à l'arithmétique transcendante*, J. fur reine u. angew. Math **29**(1845), 177–184.

[13] G.Eisenstein: *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen, I: Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln*, J. fur reine u. angew. Math **30**(1846), 185–210.

[14] M. Yukitaka: *Entrance examination and the law of quardratic reciprocity*, Mathematical communication for mathematician, No **30**(1998), 20–23, in Japanese.

[15] T.Kubota: *Some arithmetical applications of an elliptic function*, J. Reine Angew. Math. **214/215**(1964), 141–145.

[16] T.Kubota: *Anwendung Jacobischer Thetafunktionen auf die Potenzreste*, Nagoya Math. J. **19**(1961) 1–13.

[17] K. Watanabe, Y. Miyagawa and T. Higuchi: *A remark on the analytic proof of the law of biquadratic reciprocity*, Journal of the Yokohama National University, Sec. **1**, No. 43, (1996).

[18] N.H.Abel: *Recherches sur les functions elliptiques*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.**2** (1827), 101–181. Bd.**3**(1828), 160–190.

[19] N.H.Abel: *Mémoire sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.**4**(1829), 131–156.

[20] N.H.Abel: *Solution d'un problème gènèral concernant la transformation des fonctions elliptiques*, Astronomische Nachrichten, 6, 138, pp. 365–388, (1828).

[21] N.H.Abel: *Addition au mèmoire prècèdent*, Astronomische Nachrichten, 6, 138, pp. 365–388, (1828).

[22] 高瀬 正仁 訳 『アーベル／ガロア楕円関数論』 朝倉書店 (1998).

[23] T.Takagi: *Über die im Bereiche der rationalen komplexen Zahlen Abelscher Zahlkörper*, J. Coll. Sci. Tokyo **19** (1903), 1–42; Collected Papers, 13–39.

[24] F. Lemmermeyer: Reciprocity Laws ; From Euler to Eisenstein, Chapter 8, Springer, (2000).

[25] K. Ireland and M. Rosen: A Classical Introduction to Modern Number Theory, New york:Springer-Verlag, (1990).

[26] デュドネ編 『数学史 II』(１７００～１９００) 上野 健爾、金子 晃、浪川 幸彦、森田 康夫、山下 純一 訳 岩波書店 (1985)

[27] J.H. Shlverman and J. Tate (著)、足立 恒雄、木田 雅成、小松 啓一、田谷 久雄 (訳) 『楕円曲線論入門』(第3版) シュプリンガー・ファラーク東京 (1997)

[28] 河田 敬義: 「数論Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ」(岩波講座 基礎数学) 岩波書店 (1979)

[29] 足立 恒雄、三宅 克哉: 『類体論講義』 (日評数学選書) 日本評論社 1998.

[30] 高瀬 正仁 『ｄｘとｄｙの解析学』(オイラーに学ぶ) 日本評論社 (2000).

[31] 高瀬 正仁: 『数学史通史の試み (数論と関数論)』、第１６回 数学史シンポジウム (2005.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.27** (2006.4), p46–61.

[32] 杉本 敏夫: 『ガウスが行った数値計算』、第１４回 数学史シンポジウム (2003.10.25), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.25** (2004.4), p29–48.

[33] 杉本 敏夫: 『ガウスが行った数値計算 (続)』、第１５回 数学史シンポジウム (2004.10.17), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.26** (2005.4), p14–29.

[34] 杉本 敏夫: 『ガウスが行った数値計算 (参)』、第１６回 数学史シンポジウム (2005.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.27** (2006.4), p11–30.

[35] 今野 秀二: 『クロネッカーについて』、第１５回 数学史シンポジウム (2004.10.17), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.26** (2005.4), p104–113.

[36] 今野 秀二: 『アイゼンシュタインによる楕円関数』、第１６回 数学史シンポジウム (2005.10.16), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 **No.27** (2006.4), p31–45.

[37] T.Ogawa: *The recurrence formulas and the symmetrical relation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, preprint (2000).

[38] T.Ogawa: *Similarities between the trigonometric function and the lemniscate function from arithemetic view point*, Tsukuba Journal of Mathematics, **29**(2005), 65–77.

[39] T.Ogawa: *Analogies between Circular Functions and Lemniscate Functions from a Viewpoint of Number Theory*, Doctoral thesis (Mathematics), University of Tsukuba (2006).