Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その3）

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

2002 年の当数学史シンポジウムにおいて，Frobenius の群の指標および表現に関する研究の発端から Schur との共著論文に到る軌跡について大まかに報告した [平井 2]. 2003 年の同シンポジュウムでは，Schur の学位論文 [S1](1901) を主として，彼の「対称群と一般線形群の指標」の研究について報告した [平井 3]. 2004 年の同シンポジュウムでは，Frobenius の「群の指標および表現」に関する論文（それらは 1896 年～1907 年の間にまとまっている）を，すべてリストアップし，順を追って読んでみて，どこまで読み込めるかを調べ，その数学的内容等との関連において，感想等を報告する積もりになった．しかし，1 回でそんなことが出来る訳もなく，その計画はおそろしく無謀なものであった．そこで，順番に論文を詳しく読んでそれらを検討することにした．この年には，群の線形表現導入以前の指標の理論 **53**(1896), **54**(1896) および最初に線形表現を導入した論文 **56**(1897) を報文 [平井 4] にまとめた（太文字の論文番号は全集に従う）. 2005 年はその続きとして，**57**(1898), **58**(1899), **60**(1900) の報告を [平井 5] に載せた．

今回は，**61**(1901)，**68**(1903) の報告をまとめた．その際，**68** の下敷きとして，**60** が不可分の形で使われているので，前回の **60** の報文の短い抄録，ついで補遺，をここに追加した．これで，Frobenius の指標と表現に関する業績の重要部分を占める「対称群・交代群の表現論」が 1 つの報文にまとまったことになる．

各論文は，いずれも内容が重く，軽くまとめることは不可能で，どうしても詳しく内容に踏み入らざるを得ない．報文が長くなった理由である．

なお，Frobenius の有限群の指標および線形表現に関する論文全てと，関連する Schur, Burnside, Young の論文は，報文末尾にリストアップしてある．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

1　60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*,

Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 516–534(1900).

前回報文の抄録と補遺・追記

§1 (pp.148-150): $\mathfrak{H}$ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とする．その位数は $h = n!$. その共役類の個数 k は n の分割 $n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots$ の個数である．この分割で決まる共役類を (ρ) と書くと，その位数は，

$$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma! \,\cdots}. \tag{1.1}$$

ρ を数字に対応づけて $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ とし，$\rho = 0$ は単位元よりなる共役類とする．$\mathfrak{H}$ の Charakter（既約指標）は k 個あるので，κ $(0 \leq \kappa \leq k-1)$ で番号づけて $\chi^{(\kappa)}$ と書き，それの共役類 ρ での値を $\chi^{(\kappa)}_\rho$ と書く．

n の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ $(n_i > 0)$ に対応して，$\mathfrak{H}$ の部分群 $\mathfrak{G}$ を定義する：n 文字のはじめの n_1 個を不変にし，次の n_2 個を不変にし，・・・・. この $\mathfrak{G}$ の位数は，

$$g = n_1!\, n_2! \,\cdots\, n_m!. \qquad (\text{注}：\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_m,\ \mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{S}_{n_i}). \tag{1.2}$$

$R \in \mathfrak{G}$ を $R = R_1 R_2 \cdots R_m, R_i \in \mathfrak{G}_i$, と分解，$R_i$ $(1 \le i \le m)$ の型が，n_i の分割

$$n_i = \alpha_i + 2\beta_i + 3\gamma_i + \cdots, \tag{1.3}$$

で決まるとすれば，R の共役類 (ρ) を与える n の分割は，次である：

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots, \quad \ldots \tag{1.4}$$

このとき，$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{H}$ の共役類 (ρ) との共通部分の位数は，

$$g_\rho = \sum \frac{n_1!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 2^{\beta_1}\beta_1!\, 3^{\gamma_1}\gamma_1! \,\cdots} \cdot \frac{n_2!}{1^{\alpha_2}\alpha_2!\, 2^{\beta_2}\beta_2!\, 3^{\gamma_2}\gamma_2! \,\cdots} \cdots\cdots. \tag{1.5}$$

上の n の分割を，$\boldsymbol{n} := (n_i)_{1 \le i \le m}$ とおき，

$$X^{\boldsymbol{n}}(\rho) := \frac{h g_\rho}{g h_\rho} = \sum \frac{\alpha!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \,\cdots} \cdot \frac{\beta!}{\beta_1!\, \beta_2! \,\cdots} \cdots\cdots. \tag{1.6}$$

とおけば，論文 **57** により，類関数 $X^{\boldsymbol{n}}$ は，部分群 $\mathfrak{G}$ の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ を $\mathfrak{H}$ に誘導した表現 $\pi := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ の指標である．これは既約指標 $\chi^{(\kappa)}$ の和に書ける：

$$X^{\boldsymbol{n}}(\rho) := \sum\nolimits_\kappa r_\kappa \chi^{(\kappa)}_\rho \tag{1.7}$$

命題 60.1.1. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ を独立変数とする．(1.6) 式の右辺の和は，次の積の展開における $x^{\boldsymbol{n}} := x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ の係数に等しい：

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^\alpha\, (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^\beta\, (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3)^\gamma \cdots \\ = \sum\nolimits_{\boldsymbol{n}} X^{\boldsymbol{n}}(\rho)\, x^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

§2 (pp.150-152): 差積を $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{1 \le i < j \le m} (x_j - x_i)$，とおき，整数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ に対して，

$$[k_1, k_2, \ldots, k_m] := \mathrm{sgn}\big(\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)\big), \tag{1.9}$$

とおく．すると，$[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ は交代的である．$k_i = k_j$ $(i \ne j)$ のときには，$[k_1, k_2, \ldots, k_m] = 0$ とおく．下の多項式展開の係数より，類関数 $\rho \mapsto \chi^{(\lambda)}_\rho$ を λ ごとに定義する：

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^\alpha\, (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^\beta\, (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3)^\gamma \cdots \times \\ &\qquad \times \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \sum\nolimits_{(\lambda)} [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]\, \chi^{(\lambda)}_\rho\, x^\lambda, \qquad x^\lambda := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots, x_m^{\lambda_m},\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\text{ここに，}\ (\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n + \frac{1}{2} m(m-1). \tag{1.11}$$

定理 60.1. 1つの λ に対して，$\rho \mapsto \chi_\rho^{(\lambda)}$ は $\mathfrak{H}$ $(= \mathfrak{S}_n)$ の指標を与える．$(\lambda) = (\lambda_i)_{1 \le i \le m}$ における順序を無視すると，相異なる λ には異なる指標が対応する．

$m = n$ の場合には，$\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n$，$\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n = \frac{1}{2}n(n+1)$，となる $(\kappa) = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ が対応し，その個数は k (= 共役類の個数) である．

§3 (pp.152-154): Cauchy の公式

$$\left|\frac{1}{1 - x_\mu y_\nu}\right| = \frac{\Delta(x_1, \ldots, x_m)\,\Delta(y_1, \ldots, y_m)}{\prod_{\mu,\nu}(1 - x_\mu y_\nu)} \qquad (1 \le \mu, \nu \le m),$$

を用いて，$\chi_\rho^{(\kappa)}$ たちの直交関係式と，いわゆる次元公式を証明している．

命題 60.3.1. $(\kappa_i), (\lambda_i)$ の成分の順序を無視して一致するとき，$(\kappa) \sim (\lambda)$ と書けば，

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho^{(\kappa)} \chi_\rho^{(\lambda)} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\kappa) \not\sim (\lambda), \\ h & \text{if } (\kappa) \sim (\lambda), \end{cases}$$

定理 60.2（次元公式）. $f^{(\lambda)} := \chi_1^{(\lambda)}$ とおくと，$f^{(\lambda)} = \dfrac{n!\,\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_m!}$.

命題 60.3.1. 得られている指標の集合は**完全**である．

§4 (pp.154-157): 指標のパラメーターとして，$\chi^{(\kappa)}$

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n), \qquad 0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n, \tag{1.12}$$

が得られている．$m < n$ や $m > n$ の場合の $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ による $\chi^{(\lambda)}$ との関係も分かる．より実用的なパラメーターとして，**Charakteristik von** $\chi^{(\kappa)}$ と呼ばれる

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} 0 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_r \le n-1, \\ 0 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_r \le n-1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r = n - r, \end{cases} \tag{1.14}$$

を導入する．r は **Rang der Charakteristik** と呼ばれる．

κ_i のうちで $\ge n$ となるものを $n + b_1, n + b_2, \ldots, n + b_r$ と書き，$< n$ となるものを，$n - 1 - a_{r+1}, n - 1 - a_{r+2}, \ldots, n - 1 - a_n$ として，$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \setminus \{a_j\,;\, n - r \le j \le n\}$ である．すると，$r \le \sqrt{n}$ である．

定理 60.3. 次元公式は次のように書き表される：

$$\begin{aligned} f^{(\kappa)} &= \frac{n!\,\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)}{\kappa_1!\,\kappa_2! \cdots \kappa_n!} = \frac{n!\,\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_r)\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_r)}{a_1!\,a_2! \cdots a_r!\,b_1!\,b_2! \cdots b_r! \prod(a_\alpha + b_\beta + 1)} \\ &= \frac{n!}{a_1!\,a_2! \cdots a_r!\,b_1!\,b_2! \cdots b_r!} \left|\frac{1}{a_\alpha + b_\beta + 1}\right|, \end{aligned} \tag{1.15}$$

ここに，$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$.

§5 (pp.157-159): Rang der Charakteristik $r=1$ の場合の指標公式を与えている.

§6 (pp.159-161): $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_n, \mathfrak{G}=\mathfrak{A}_n$ とすると，$\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の 1 次元指標として，

$$\chi^{(1)}_\rho = \chi\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}_\rho = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s} = \mathrm{sgn}(\rho),$$

を得る．ここに，s は共役類 ρ の元に現れる（長さ 1 のものを込めた）Cyklen の個数．

$$\chi^{(\lambda)} = \chi^{(1)}\chi^{(\kappa)} = \mathrm{sgn}\cdot\chi^{(\kappa)} \tag{1.16}$$

となっているときに，$\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とは **associirte** であるという.

定理 60.4. $\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とが *associirte* であるとすると，

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}, \qquad (\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

後日追加 (06/02/13)： 指標のパラメーターとして，次のものをとったとする：

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n, \quad \sum\nolimits_{1\le i\le n} \lambda_n = n + \frac{1}{2}n(n-1),$$
$$0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_n, \quad \sum\nolimits_{1\le i\le n} \kappa_n = n + \frac{1}{2}n(n-1),$$

定理 60.4bis. $\chi^{(\lambda)}, \chi^{(\kappa)}$ が **associirt** であるとき，(λ) と (κ) との関係は,

$$(\star) \qquad \begin{aligned} &\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n,\ 2n-1-\lambda_1, 2n-1-\lambda_2, \dots, 2n-1-\lambda_n\} \\ &= \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots,\ 2n-1\}. \end{aligned}$$

証明. $\displaystyle\sum_\rho \frac{h_\rho}{h}\chi^{(1)}_\rho\chi^{(\kappa)}_\rho\chi^{(\lambda)}_\rho = 1$ を示せばよい．そのために，次の無限級数を考える：

$$\begin{aligned} &\sum_\rho (-1)^{\beta+\delta+\cdots}\frac{1}{\alpha!}(x_1+\cdots+x_n)^\alpha(y_1+\cdots+y_n)^\alpha \times \\ &\times\frac{1}{2^\beta\beta!}({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2)^\beta({y_1}^2+\cdots+{y_n}^2)^\beta\frac{1}{3^\gamma\gamma!}({x_1}^3+\cdots+{x_n}^3)^\gamma({y_1}^3+\cdots+{y_n}^3)^\gamma\cdots \\ &= e^{(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)-\frac{1}{2}({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2)({y_1}^2+\cdots+{y_n}^2)+\frac{1}{3}({x_1}^3+\cdots+{x_n}^3)({y_1}^3+\cdots+{y_n}^3)-\cdots} \\ &= \prod\nolimits_{1\le\mu,\nu\le n}(1+x_\mu y_\nu). \end{aligned}$$

すると，証明したい等式の左辺は積

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\Delta(y_1, y_2, \dots, y_n)\prod\nolimits_{1\le\mu,\nu\le n}(1+x_\mu y_\nu)$$

における単項式 $x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_n^{\kappa_n}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_n^{\lambda_n}$ の係数である．ここで，$y_1, y_2, \dots, y_n$ を $-\dfrac{1}{y_1}, -\dfrac{1}{y_2}, \dots, -\dfrac{1}{y_n}$ で置き換えると，上の係数は,

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\Delta(y_1, y_2, \dots, y_n)\prod\nolimits_{1\le\mu,\nu\le n}(x_\mu - y_\nu) = \Delta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

における $\pm x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n} y_1^{2n-1-\lambda_1} y_2^{2n-1-\lambda_2} \cdots y_n^{2n-1-\lambda_n}$ の係数に等しい．求める和の値は，0 か 1 かしかないので，符号 $\pm$ は問題にならないので，結論を得るのはやさしい．

（証明終わり）

$\chi^{(\kappa)}$ が **sich selbst asociirt** であるとする．あらためて，パラメーターとして，$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$ をとると，$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_r = b_r$ であるから，

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}, \quad n = (2a_1+1) + (2a_2+1) + \cdots + (2a_r+1),$$

となる．よって，$a_1 + a_2 + \cdots + a_r = \frac{1}{2}(n-r)$．このことは，論文 **61** における n-次交代群 $\mathfrak{A}_n$ の指標の理論において重要になる．　**（後日追加終わり）**

§7 (pp.161-166): 指標の値を決定しうる 2，3 の場合を示す．

定理 60.5. 共役類 ρ の元が s 個の Cyklen からなるとする．Rank r der Charakteristik (κ) に対して，$s < r$ ならば，$\chi_\rho^{(\kappa)} = 0$.

定理 60.6. 共役類 ρ の元が長さ c の 1 個の Cyklus と長さ 1 の $n-c$ 個の Cyklen からなるとする．指標の値 $\chi_\rho^{(\kappa)}$ は次のように求められる：

$$f(x) \;:=\; \frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r)}{(x+a_1+1)(x+a_2+1)\cdots(x+a_r+1)} \qquad \text{と置けば，}$$

$$\frac{-c^2\, h_\rho\, \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} \;=\; \left[\frac{f(x-c)\; x(x-1)\cdots(x-c+1)}{f(x)}\right]_{x^{-1}}, \quad h_\rho = \frac{n!}{(n-c)!\cdot c},$$

ここに，直上の第 1 式右辺は，x の降冪の順に展開したときの x^{-1} の係数を表す．

とくに，ρ が互換（$c=2$）のとき，

$$\frac{h_\rho\, \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i b_i(b_i+1) - \sum_i a_i(a_i+1)\right).$$

後日追加（06/03/15）：　Charakteristik と Young 図形

$$(\lambda) \qquad 0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n,$$

に対応する Dynkin 図形 Λ は，k 番目の row の長さ $r_k(\Lambda)$ が，

$$\lambda_n - (n-1) \ge \lambda_{n-1} - (n-2) \ge \cdots \ge \lambda_2 - 1 \ge \lambda_1 \ge 0,$$

となっているものである：$r_k(\Lambda) = \lambda_{n-k+1} - (n-k)$．また，$k$ 番目の column の長さを $c_k(\Lambda)$ と書く．Frobenius の定義を直接翻訳すれば，

(i) $\lambda_{n-k+1} = r_k(\Lambda) + (n-k) \ge n\ (1 \le k \le r)$ のときには，$r_k(\lambda) = n + b_k$ とおく．

(ii) 残りの $\lambda_k = r_k(\Lambda) + (n-k)\ (k > r)$ 全体を $(n-1) - a_i\ (i > r)$ とおくと，$\{a_i\,;\, i > r\}$ は全て相異なる．$\{0,1,2,\dots,n-1\} \setminus \{a_i\,;\, i > r\}$ を $0 \le a_1 < a_2 < \dots < a_r$ とおく．

命題 60.A1. Rank der Charakteristik $=$ Λ の対角線の長さ,

$$\begin{cases} b_r & = r_1(\Lambda) - 1 = \text{対角線からの腕の長さ}\ ; \\ b_{r-1} & = r_2(\Lambda) - 2 = \text{対角線からの腕の長さ}\ ; \\ \cdots & \qquad \cdots\cdots \\ b_1 & = r_r(\Lambda) - r = \text{対角線からの腕の長さ}\ ; \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} a_r & = c_1(\Lambda) - 1 = \text{対角線からの足の長さ}\ ; \\ a_{r-1} & = c_2(\Lambda) - 2 = \text{対角線からの足の長さ}\ ; \\ \cdots & \qquad \cdots\cdots \\ a_1 & = c_r(\Lambda) - r = \text{対角線からの足の長さ}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Kerov, Olshanski の modified Frobenius parameter $\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_r \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$ との関係は,

$$\begin{cases} a'_i & = b_{r-i+1} + \dfrac{1}{2}, \\ b'_j & = a_{r-j+1} + \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_i a_i + \sum_j b_j & = & n - r, \\ \sum_i a'_i + \sum_j b'_j & = & n. \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} 0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_r, & 0 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_r, \\ a'_1 > a'_2 > \cdots > a'_r \ge 0\,, & b'_1 > b'_2 > \cdots > b'_r \ge 0, \end{cases}$$

関係式 (1.18), (1.19) の証明：（その１） 腕の長さを見て,

$$r_k(\Lambda) = k + b_{r-k+1} = n + \big(\lambda_{n-k+1} - (n-k)\big),$$

であるから，$b_r > b_{r-1} > \ldots > b_1 \ge 0$ については，(1.18) 式が分かる．

そこで，今度は，associirt Charakter に移ると,

「associirt Charakter にはワイル図形の転置が対応する」

ことを認めれば，a_k についての関係式 (1.19) が分かる．

（その２） Charakteristik の定義に戻って，直接的に組み合わせ論的にやる．Young 図形 Λ の対角線より下の足の長さ（対角上の box は入れない）を左から $d_1 > d_2 > \ldots > d_r \ge 0$ とする．証明すべきことは，$d_k = a_{r-k+1}$ $(1 \le k \le r)$ である．

縦，横に n 個の box が並んだ正方形を考えて，その左上隅に Young 図形をおく．対角線より下にある（対角線を除いた）直角二等辺三角形 Δ をとる．その左側より，Young 図形の足が，長さ $d_1 > d_2 > \cdots > d_r \ge 0$ で現れている．

この部分を Δ_1 とすると（$\Delta_1 = \emptyset$ のときもある），その下側の線は左下がりになっている．Δ_1 を Δ から取り去ると,（上に行くほど細くなる）ブロック Δ_2 が残る（$\Delta_2 = \emptyset$ のときもある）．Δ_2 の各 row の長さを，大小順に $0 \le e_1 < e_2 < \ldots < e_{n-r}$ とおくと,

$$\{e_i; 1 \le i \le n-r\} = \{a_i; r < i \le n\}$$

となる．従って，我々が証明すべきことは次のより一般の命題に帰着された．

命題 60.A2. 縦，横に n 個の box が並んだ正方形を考え，対角線より下にある直角二等辺三角形 Δ をとる（Δ の左辺，下辺に沿ってそれぞれ n 個の box が並んでいる）．Δ を，境界が（広い意味で）左下がりになるように，２つの空でないブロック Δ_1, Δ_2

に分ける．Δ_1 の column の長さを，$d_1 > d_2 > \cdots > d_r > 0$，ただし，$1 \le r < n$，とする．$\Delta_2$ の row の長さを $0 < e_1 < e_2 < \ldots < e_{n-r}$ とおくと，これらの数値を合わせると，$\{1, 2, \ldots, n\}$ に一致する．

● （既約）指標 $\chi^{(\lambda)}$，associirt な $\chi^{(\kappa)} = \mathrm{sgn} \cdot \chi^{(\lambda)}$ の関係と Young 図形の転置

定理 60.4bis により，$\chi^{(\lambda)}, \chi^{(\kappa)}$ が **associirt** であるとき，(λ) と (κ) との関係は，

$$(\star) \qquad \begin{aligned} &\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,\ 2n-1-\kappa_1, 2n-1-\kappa_2, \ldots, 2n-1-\kappa_n\} \\ &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-1\}. \end{aligned}$$

証明は Young 図形を用いて，命題 60.A2 に帰着することが出来る（詳細は省略）．

追記 (2006/04/03)：§7 における例.

共役類 ρ が長さ $c_1, c_2, \ldots, c_s$ の s 個のサイクルからなっているとする：$c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_s$. $[\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n]\chi_\rho^{(\kappa)}$ は，

$$(x_1^{c_1} + \cdots + x_n^{c_1}) \cdots (x_1^{c_s} + \cdots + x_n^{c_s}) \Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

における $x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n}$ の係数である．$\chi^{(\kappa)}$ の Charakteristik を

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

とすると，$\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n\} = \{n-1-a_{r+1}, \ldots, n-1-a_n, n+b_1, \ldots, n+b_r\}$.

$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ の展開の各項は，$\pm x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ であり，$\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. 他方，$(x_1^{c_1} + \cdots + x_n^{c_1}) \cdots (x_1^{c_s} + \cdots + x_n^{c_s})$ の展開の各項は，分割

$$\{1, 2, \ldots, s\} = \bigsqcup\nolimits_{1 \le j \le n} \mathcal{T}_j$$

に対応する次の単項式である：$x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n}$，$\ell_j = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_j} c_\tau$.
従って，$\ell_j > 0, \mathcal{T}_j \ne \emptyset$, となる j の個数 s' は，$s' \le s$ であり，$s' = s$ のときのみ，$\{\ell_j; \ell_j \ne 0\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ となる．両者を掛けると，現れる単項式は，

$$x_1^{k_1+\ell_1} x_2^{k_2+\ell_2} \cdots x_n^{k_n+\ell_n}.$$

例 1．$s < r$ の場合： x_i の冪 $k_i + \ell_i$ のうち，$\ge n$ となりうるのは，高々 s' 個である．それらが，$n+b_1, \ldots, n+b_r$ となるので，$r \le s' \le s$ となる．従って，

定理 60.5. 同値類 ρ の置換が s 個のサイクルからなっているとする．

$$s < r \implies \chi_\rho^{(\kappa)} = 0.$$

例 2．$s = r$ の場合： $k_1, k_2, \ldots, k_n$ のうち，丁度 $s = r$ 個が $\{\ell_j; \ell_j \ne 0\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ により増加して，$n+b_1, \ldots, n+b_r$ となり，$s' = s$ である．残りの k_j たちが，$\{n-1-a_{r+1}, \ldots, n-1-a_n\}$ であるから，上の r 個の k_j が $\{n-1-a_1, \ldots, n-1-a_r\}$ に一致する．従って，ある $\omega, \omega' \in \mathfrak{S}_r$ が存在して，

$$n - 1 - a_{\omega(i)} + c_i = n + b_{\omega'(i)} \quad \therefore\ c_i - 1 = a_{\omega(i)} + b_{\omega'(i)} \quad (1 \le i \le r), \tag{1.21}$$

$$\text{故に，} \quad c_{\sigma(i)} - 1 = a_{\sigma'(i)} + b_i \ (1 \le i \le r), \quad \sigma = {\omega'}^{-1}, \sigma' = {\omega'}^{-1}\omega.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

2　61. *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe,*

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

§1 pp.167-168（共役類の個数）.

$\mathfrak{H}$ を n 次交代群（alternirende Gruppe）$\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{H}'$ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とする．(注：1901 年施行の新正書法では，alternirende ⇒ alternierende, assciirte ⇒ assoziierte)

$h = |\mathfrak{H}| = \frac{1}{2}n!\,,\ \ h' = |\mathfrak{H}'| = n!\,;$

k, k' :　$\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ の共役類の個数；

$k'_- = u$:　$\mathfrak{H}'$ における共役類のうち，奇置換よりなるものの個数；

k'_+ :　$\mathfrak{H}'$ における共役類のうち，偶置換よりなるものの個数；

v :　長さ相異なる奇数のサイクルの積で表される偶置換の共役類の個数；

（置換のサイクル分解（長さの異なる互いに素な偶サイクルの積に分解）を考える）

以下，次の段落までは，前論文 **60**, §6 末尾の引用である．公式

$$\prod\nolimits_{1\le\ell<\infty}\big(1+x^{2\ell-1}\big) = \frac{1}{\prod_{1\le\ell<\infty}\big(1-(-1)^{\ell-1}x^{\ell}\big)} \tag{2.1}$$

の右辺は，

$$\prod_{1\le\ell<\infty}\Big(\sum_{0\le p<\infty}(-1)^{(\ell-1)p}x^{\ell p}\Big) = \prod_{1\le\ell<\infty}\Big(\sum_{0\le p<\infty}x^{(2\ell-1)p}\Big)\prod_{1\le\ell'<\infty}\Big(\sum_{0\le p<\infty}(-1)^{p}x^{2\ell' p}\Big)$$

であるから，(2.1) の両辺の x^n の係数を比較して，

$$v = k'_+ - k'_- \quad \therefore\ \begin{cases} k'_+ = u+v, \\ (u := k'_-). \end{cases} \qquad \text{また，}\ k' = 2u+v,\ \ u > v.$$

($\because$ $c_1 < c_2 < \ldots < c_s$ 奇数ばかり：① $c_1 > 1$ のとき，$(1, c_1-1(\geq 2), c_2, \ldots, c_s)$, ② $c_1 = 1$ のとき，$(1, 1, c_2-1(\geq 2), c_3, \ldots, c_s)$ を対応させる)

さて，$\mathfrak{H}'$ における偶置換の共役類 K' が，$\mathfrak{H}$ においてそのまま 1 つの共役類にとどまるための必要十分条件は，K' の元とある奇置換とが可換であることである．

他方，いかなる奇置換とも可換でない元の共役類 K' とは，相異なる長さの偶サイクルの積となるものである（v 個）．この $\mathfrak{H}'$ での共役類は $\mathfrak{H}$ では，2 つの（同じ位数の）共役類に分かれる．$A \in K'$ をとり，1 つの奇置換 T をとると，次の 2 つに分かれる：

$$\{RAR^{-1}\,;\ R\in\mathfrak{H}\}, \qquad \{RTAT^{-1}R^{-1}\,;\ R\in\mathfrak{H}\}.$$

従って，$k = u + 2v$ である．故に，$k' > k$.

§2, pp.168-170 (associirt Charakter).　$\mathfrak{H}'$ の指標（= 既約指標）χ を $\mathfrak{H}$ に制限すると，$\mathfrak{H}$ の指標（= 既約指標）の正整数係数の一次結合になる：$\chi|_{\mathfrak{H}} = \sum_\kappa r_\kappa \phi^{(\kappa)}$, よって，

$$\sum\nolimits_{R\in\mathfrak{H}}\chi(R)\chi(R^{-1}) \;=\; h\sum\nolimits_{\kappa} r_\kappa^{\,2}.$$

T を奇置換とする．$\omega := \chi\cdot\mathrm{sgn}$ を χ に associirt (新綴り字では assoziiert) な指標とすると，　$\omega(R) = \chi(R)$, $\omega(RT) = -\chi(R)$.

場合 1：$\omega \neq \chi$ のとき，$\sum_\kappa r_\kappa^2 = 1$ となる．従って，$\chi|_{\mathfrak{H}}$ はまた，$\mathfrak{H}$ の指標である．そして，$\chi(T^{-1}RT) = \chi(R)$ $(R \in \mathfrak{H})$．

場合 2：$\omega = \chi$（すなわち，χ は sich selbst associirt のとき，$\chi(RT) = 0$ $(R \in \mathfrak{H})$ となり，$\sum_\kappa r_\kappa^2 = 2$. 従って，

$$\chi|_{\mathfrak{H}} = \phi + \psi, \qquad \phi(T^{-1}RT) = \psi(R).$$

と $\mathfrak{H}$ の 2 つの指標の和になる．

$T^{-1}RT \sim R$（共役）in $\mathfrak{H}$ のときには，$\phi(R) = \psi(R) = \frac{1}{2}\chi(R)$. 従って，2 つの次元は等しい：$\phi(E) = \psi(E)$.

$T^{-1}RT \not\sim R$ in $\mathfrak{H}$ のときには，R の $\mathfrak{H}'$ における共役類 K' は $\mathfrak{H}$ では 2 つに分かれて，$\phi(T^{-1}RT) = \psi(R)$.

以上で得られた指標が全て相異なることが示される．

かくて，$\mathfrak{H}'$ の指標の u 個のペアから，u 個の $\mathfrak{H}$ の指標が得られ，v 個の selbst associirt の $\mathfrak{H}'$ の指標から，$2v$ 個の $\mathfrak{H}$ の指標が得られる．その全体の個数は，共役類の個数 $k = u + 2v$ に等しいので，これで全てである．

§3, pp.171-174（結果の提示）.

Rang = 2 の場合の指標を，論文 **60**(1900) の手法で与えている：

$$\chi\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & n-4\end{pmatrix}, \chi\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & n-5\end{pmatrix}, \chi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & n-5\end{pmatrix}, \chi\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & n-5\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & n-6\end{pmatrix} &= \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha-7) + \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-5)\beta\\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\gamma + \beta\gamma - (\alpha-1)\delta\end{aligned}$$

$$(\text{for} \quad n = 1\cdot\alpha + 2\cdot\beta + 3\cdot\gamma + 4\cdot\delta + \cdots).$$

p.172: 8 次対称群 $\mathfrak{S}_8$ の指標表； p.173: 8 次交代群 $\mathfrak{A}_8$ の指標表．　このとき，$u = 10, v = 2$, であり，$\mathfrak{S}_8$ の $\mathfrak{A}_8$ で分裂する共役類は，$(1+7), (3+5)$ の 2 個である．

n 一般のときの結果のまとめ：

対称群 $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{H}'$ の指標 χ をもとにする．① $\chi \neq \mathrm{sgn}\cdot\chi$ のときは，$\chi|_{\mathfrak{H}}$ が指標．

② $\chi = \mathrm{sgn}\cdot\chi$ (sich selbst assciirt) のときは，$\chi = \phi + \psi$ と 2 つに分解し，$R \in \mathfrak{H}$ と $S = T^{-1}RT$ (T 奇) とが共役 ($R \sim S$ in $\mathfrak{H}$) のときは，$\phi(R) = \psi(R) = \frac{1}{2}\chi(R)$.

$R \not\sim S$ in $\mathfrak{H}$ のときには，　$\chi(R) = \phi(R) + \psi(R)$, $\psi(R) = \phi(S)$.

命題 61.3.1. $R \in \mathfrak{H}$ と $S = T^{-1}RT$ (T 奇) とが $\mathfrak{H}$-共役でないとする（このとき，$\mathfrak{H}'$ の偶共役類 $(R) = (S)$ を**第 3 種**と呼ぶ (Schur の命名，[Sch3], 1911)）．$R = C_1C_2\cdots C_s$ と偶サイクルの積になり，c_i を C_i の長さとすると，

$$c_i = 2a_i + 1, \quad c_1 + c_2 + \cdots + c_s = n, \quad c_1 < c_2 < \ldots < c_s. \tag{2.2}$$

R の $\mathfrak{H}'$ における中心化群の元は，$C_1^{r_1}C_2^{r_2}\cdots C_s^{r_s}$ の形であり，群の位数は，$c_1c_2\cdots c_s$.

命題 61.3.2（重要）. 第２種の $\mathfrak{H}'$ の共役類 $(R) = (R)_{\mathfrak{H}'}$ に対して，sich selbst associirt な $\mathfrak{H}'$ の指標 χ のうち，

$$\chi = \chi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

を対応させる．v 個の (R) と v 個の χ が 1-1 に対応するが，その対応 $(R) \leftrightarrow \chi$ を特徴づけるのは次の様である．まず，sich selbst associirt な $\mathfrak{H}'$ の指標 χ を $\mathfrak{H}$ に制限すると，$\chi|_{\mathfrak{H}} = \phi + \psi$ と２つに分かれる．また，第２種の $(R)_{\mathfrak{H}'}$ は $\mathfrak{H}$ では２つに分かれ，$(R)_{\mathfrak{H}'} \cap \mathfrak{H} = (R)_{\mathfrak{H}} \sqcup (S)_{\mathfrak{H}}$, $S = T^{-1}RT$.

●対応を決める条件： $\phi(R) \neq \phi(S)$ $(\Longleftrightarrow \psi(R) \neq \psi(S))$.

このとき，R, S と $\mathfrak{H}'$-共役でない第２種の Q については，$\phi(Q) = \psi(Q) = \frac{1}{2}\chi(Q)$.

命題 61.3.3. $R = C_1C_2\cdots C_s$ in (2.2) と χ in (2.3) とが対応しているとすると，

$$\phi(R) = \psi(S) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon p}), \quad \phi(S) = \psi(R) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon p}), \tag{2.4}$$

$$p = c_1c_2\cdots c_s = \frac{h}{h_R}, \quad \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}. \tag{2.5}$$

命題 61.3.4. 命題 61.3.3 において，
$R \sim R^{-1}$ in $\mathfrak{H}$ $(\Leftrightarrow \varepsilon = +1)$ のときは，$\phi(R) = \phi(R^{-1}), \psi(R) = \psi(R^{-1})$ は実数．
$R \not\sim R^{-1}$ in $\mathfrak{H}$ $(\Leftrightarrow \varepsilon = -1)$ のときは，$\phi(R)$ と $\phi(R^{-1}) = \psi(R)$ とは複素共役である．

§4, pp.175-176（一般論よりの準備）. 命題 3.2 〜 3.4 の証明のために準備する．

命題 61.4.1. $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ を２つの群とする．$\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, $h_i := |\mathfrak{H}_i|, h := h_1h_2$.
$\mathfrak{H}$ の既約指標 χ は，$\mathfrak{H}_i$ の既約指標 χ_i によって，$\chi(A_1A_2) = \chi_1(A_1)\chi_2(A_2)$ $(A_i \in \mathfrak{H}_i)$ として得られる（cf. 論文 **56**, §1）.

命題 61.4.2. 群 $\mathfrak{H}$ とその部分群 $\mathfrak{G}$ について，$\psi^{(\kappa)}$ を $\mathfrak{G}$ の指標とする．その誘導指標 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\psi^{(\kappa)}$（この名前も記号も当方の都合で勝手に導入した）の分解公式として，次を得る：$(\rho)_{\mathfrak{H}}$ を $\mathfrak{H}$ を $R \in \mathfrak{H}$ の共役類とし，$(\rho)_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{G} = (P_1)_{\mathfrak{G}} \sqcup (P_2)_{\mathfrak{G}} \sqcup \cdots \sqcup (P_m)_{\mathfrak{G}}$ $(P_i \in \mathfrak{G})$ と分解するとすれば，

$$\sum\nolimits_\lambda r_{\kappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R) = \psi^{(\kappa)}(P_1) + \psi^{(\kappa)}(P_2) + \cdots + \psi^{(\kappa)}(P_m). \tag{2.6}$$

証明. $\displaystyle\sum_\lambda r_{\kappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{h}{gh_\rho}\sum_{P\sim R \text{ in } \mathfrak{H}} \psi^{(\kappa)}(P) \quad ((\rho)_{\mathfrak{H}} = (R))$ （cf. 論文 **57**, §1）.

§5, pp.176-179（命題 61.3.2 〜 61.3.3 の証明）.
n に関する数学的帰納法を使う．命題 61.3.2 〜 61.3.3 は $n_1 < n$ について正しい，と仮定する．$c_1 = 2a_1 + 1 < c_2 = 2a_2 + 1 < \cdots < c_s = 2a_s + 1$ において，$c_1 = 1$ の場合は以下の議論を一寸修正すればよいので，$c_1 > 1$ とする．

場合１：$s > 1$ とする（n 個のときは OK）.
$\{1, 2, \ldots, n\}$ を $\{1, 2, \ldots, c_1\} \sqcup \{c_1{+}{+}1, c_1{+}{+}2, \ldots, n\}$ と分解して，対称群，交代群 $\mathfrak{H}_i' \subset \mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$ を決める．$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}$ を考える．$R_1 \in \mathfrak{H}_1$ を長さ c_1 のサイクル，

$R_2 \in \mathfrak{H}_2$ を長さ $c_2, \dots, c_s$ のサイクルの積，とする．$T_i \in \mathfrak{H}'_i \setminus \mathfrak{H}_i$, $S_i := T_i^{-1} R_i T_i$ とおくと，

$$p_1 = c_1,\ p_2 = c_2 \cdots c_s,\ \varepsilon_i = (-1)^{\frac{1}{2}(p_i - 1)}\ (i = 1, 2), \tag{2.7}$$

として，$\mathfrak{H}_i$ の 2 つの conjugirte な指標 $\phi_i(P_i), \psi_i(P_i) = \phi_i(T_i^{-1} P_i T_i)\ (i = 1, 2)$, で，

$$\phi_i(R_i) = \psi_i(S_i) = \frac{1}{2}(\varepsilon_i + \sqrt{\varepsilon_i p_i}),\ \phi_i(S_i) = \psi_i(R_i) = \frac{1}{2}(\varepsilon_i - \sqrt{\varepsilon_i p_i}), \tag{2.8}$$

$$\phi_i(Q_i) = \psi_i(Q_i) = \phi_i(T_i^{-1} Q_i T_i) = \psi_i(T_i^{-1} Q_i T_i) \in \boldsymbol{Z} \quad \text{if } Q_i \not\sim R_i, S_i \text{ in } \mathfrak{H}_i,$$

となるものをとると，$\mathfrak{G}$ の 4 つの指標 $\phi_i \psi_j$ がとれる．

$$R := R_1 R_2, \quad S := R_1 S_2, \quad T := T_1 T_2,\ \mathrm{sgn}(T) = 1, \tag{2.9}$$

$$T^{-1} R T = S_1 S_2, \quad T^{-1} S T = S_1 R_2, \quad T_2^{-1} R T_2 = S,$$

$$(R)_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{G} = (R_1 R_2)_{\mathfrak{G}} \sqcup (S_1 S_2)_{\mathfrak{G}},\ (S)_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{G} = (R_1 S_2)_{\mathfrak{G}} \sqcup (S_1 R_2)_{\mathfrak{G}}, \tag{2.10}$$

$$(R)_{\mathfrak{H}} \neq (S)_{\mathfrak{H}}, \quad (R)_{\mathfrak{H}'} \neq (S)_{\mathfrak{H}'}.$$

$\forall P \in (R)_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{G}$ は長さ $c_1, c_2 \dots, c_s$ のサイクルの積である．従って，c_i 達の大小を考えると，$P = P_1 P_2, P_i \in \mathfrak{H}'_i$, で，$P_1 = C'_1, P_2 = C'_2 \cdots C'_s, C'_i$ は長さ c_i のサイクル，の形である．(2.10) より，

$P \sim R$ in $\mathfrak{H} \implies P_1 \sim R_1, P_2 \sim R_2$ in $\mathfrak{G}$, または，$P_1 \sim S_1, P_2 \sim S_2$ in $\mathfrak{G}$.
$\psi^{(\kappa)} := \phi_1 \phi_2$ として誘導指標 $\phi := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} \psi^{(\kappa)} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} \phi_1 \phi_2$ に公式 (2.6) を用いる．ϕ は $\mathfrak{H}$ の一般指標であって，

$$\phi(R) = \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1 p_1})(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2 p_2}) + \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1 p_1})(\varepsilon_2 - \sqrt{\varepsilon_2 p_2}), \tag{2.11}$$

同様に
$$\phi(S) = \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1 p_1})(\varepsilon_2 - \sqrt{\varepsilon_2 p_2}) + \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1 p_1})(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2 p_2}). \tag{2.12}$$

$$p := p_1 p_2 = c_1 c_2 \cdots c_s,\ ,\ \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}, \tag{2.13}$$

$\psi(P) := \phi(T_2^{-1} P T_2)$, 　とおくと，

$$\phi(R) = \psi(S) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon p}), \quad \phi(S) = \psi(R) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon p}). \tag{2.14}$$

$Q_i \in \mathfrak{H}_i, Q_i \not\sim R_i\ (i = 1, 2)$ に対し，$\phi_i(Q_i) = \phi_i(T_i^{-1} Q_i T_i)$. 公式 (2.6) を $Q = R_1 Q_2$ で使うと，$\phi(Q)$ を表す右辺の和では，2 個ずつの組として，

$$\phi_1(R_1)\phi_2(Q_2) + \phi_1(T_1^{-1} R_1 T_1)\phi_2(T_2^{-1} Q_2 T_2) = \bigl(\phi_1(R_1) + \phi_1(T_1^{-1} R_1 T_1)\bigr)\phi_2(Q_2)$$

が現れる．「これは有理数であり，$\phi(T_2^{-1} Q T_2) = \phi(Q)$ である．よって，$\in \boldsymbol{Z}$」
（**疑問**：括弧内は，帰納法の仮定から明らか？）
同様にして，$\phi(Q_1 R_2) \in \boldsymbol{Z}$, $\phi(Q_1 Q_2) \in \boldsymbol{Z}$.

zusammengesetzt Charakter (= virtual character) $\theta = \phi - \psi$:

$$\theta(R) = \sqrt{\varepsilon p}, \quad \theta(S) = -\sqrt{\varepsilon p}, \quad \theta(Q) = 0 \ \text{ if } (Q)_{\mathfrak{H}} \neq (R)_{\mathfrak{H}}, (S)_{\mathfrak{H}}; \tag{2.15}$$

$$h_\rho = \frac{h}{p} \ \text{ for } \rho = (R)_{\mathfrak{H}}, (S)_{\mathfrak{H}} \implies \sum_\rho h_\rho \theta_\rho \overline{\theta_\rho} = 2h\,;$$

$$\theta(E) = 0 \implies \phi, \psi \ \text{ einfachen Charaktere (既約指標)}.$$

u 個の $\mathfrak{H}' = \mathfrak{S}_n$ の nicht selbst assciirte Charaktere の組 $(\chi, \mathrm{sgn}\cdot\chi)$ から代表元 χ を取ると，

$$\chi(R) = \chi(S) \implies \sum\nolimits_\rho h_\rho \theta_\rho \overline{\chi_\rho} = 0 \implies \chi \text{ は } \theta \text{ の成分ではない}$$

$\implies$ ϕ, ψ は selbst associirte Charakter から分裂してきた成分

$\implies$ ϕ とその conjugirte Charakter とは違う

$\implies$ ϕ と ψ は互いに conjugirte

これで，$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_n$ に対し（n 奇，$s = 1$ の場合を除いて）
1-1 対応： $(R)_{\mathfrak{H}}, (S)_{\mathfrak{H}} \longleftrightarrow \chi|_{\mathfrak{H}} = \phi + \psi$ が確立された．

$$\chi(R) = \chi(S) = 2\phi(R) - \sqrt{\varepsilon p} \ \ \text{奇整数}, \quad \chi(Q) = 2\phi(Q) \ \ \text{偶整数}.$$

場合２： $s = 1$ とする（n は奇数である）． このときは，$R = C$, 長さ n のサイクル，である．$T \in \mathfrak{H}', \mathrm{sgn}(T) = -1$, をとると，$S := T^{-1}RT \not\sim R$ in $\mathfrak{H}$. 既約指標の個数と共役類の個数は一致するので，$\mathfrak{H}'$ の sich selbst associirt な既約指標 χ があって，

$$\chi(R) = \chi(S), \ \ \chi|_{\mathfrak{H}} = \phi + \psi, \ \ \phi, \psi: \ \mathfrak{H} \text{ の既約指標}, \ \theta := \phi - \psi,$$
$$\psi(P) = \phi(T^{-1}PT), \quad \phi(R) = \psi(S) \neq \phi(S) = \psi(R).$$

$(R'), (S')$ 別の conjugirter Classen のペア，
それに対応する conjugirter Charaktere のぺあ，ϕ', ψ', $\theta' := \phi' - \psi'$.

$$\sum\nolimits_\rho h_\rho \overline{\theta'_\rho} \phi_\rho = 0 \implies \phi(R') = \phi(S') = \psi(R') = \psi(S'),$$
$$\implies \quad (Q) \neq (R), (S) \text{ に対して}, \theta(Q) = 0 \ \therefore \ \phi(Q) = \psi(Q) = \frac{1}{2}\chi(Q).$$

$$n \equiv 1\ (4) \implies (R) = (R^{-1}), \ \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = 1, \ \overline{\phi(R)} = \phi(R),$$
$$\sum_\rho h_\rho \overline{\phi_\rho} \theta_\rho = h, \ \ h_R\big(\phi(R)\theta(R) + \phi(S)\theta(S)\big) = h \ \ \therefore \ \delta(R)^2 = \frac{h}{h_R} = p = n\,;$$
$$n \equiv -1\ (4) \implies (R) \neq (R^{-1}), \ \varepsilon = -1, \ \overline{\phi(R)} = \phi(S),$$
$$\sum_\rho h_\rho \overline{\phi_\rho} \theta_\rho = h, \ \ h_R\big(\phi(R)\theta(S) + \phi(S)\theta(R)\big) = h \ \ \therefore \ \delta(R)^2 = -p = -n\,;$$

まとめると，　$\theta(R) = \sqrt{\varepsilon p}, \quad \theta(S) = -\sqrt{\varepsilon p}.$

命題 61.3.2 は証明されたが，その証明の締めくくりと，命題 61.3.3 の証明の締めくくり：

$\mathfrak{H}' = \mathfrak{S}_n$ での言葉で（$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_n$ を援用しないで）v 個の（第３種 by Schur）の偶共役類 $(R)_{\mathfrak{H}'} = (S)_{\mathfrak{H}'}$ と v 個の sich selbst associirt な指標 χ との 1-1 対応を完全に決定する条件を述べると，

条件 61.5.1. $\mathfrak{H}' = \mathfrak{S}_n$ で，$\chi(R) = \chi(S)$ 奇数，$\chi(Q)$ 偶数（$(Q)_{\mathfrak{H}'} \neq (R)_{\mathfrak{H}'}, (S)_{\mathfrak{H}'}$）.
このとき，$\chi = \chi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{pmatrix}$ と対応するのは，

$$(R)_{\mathfrak{H}'},\ R = C_1C_2\cdots C_s,\ C_i \text{ は長さ } c_i = 2a_i + 1 \text{ のサイクル } (1 \leq i \leq s).$$

論文 **60** の公式 (11) §7 により，

$$\chi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{pmatrix}(R) = \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}. \qquad \textbf{（証明終わり）}$$

注 61.5.1. v 個の第 3 種の共役類 (κ) とそれに対応する指標 $\chi^{(\kappa)}$ とをとると，論文 **60** での次元公式と，命題 61.3.2 により，

$$\dim \chi^{(\kappa)} = \chi^{(\kappa)}(E) = \frac{1}{2}\,\frac{n!\,\Delta(a_1, \cdots, a_s)^2}{(a_1!\cdots a_s!)^2 \prod(a_\alpha + a_\beta + 1)},$$
$$\frac{h}{h_\kappa} = (2a_1+1)\cdots(2a_s+1) = c_1c_2\cdots c_s = p,$$
$$\therefore\ \frac{h_\kappa}{f^{(\kappa)}} = \left(\frac{a_1!\cdots a_s! \prod_{\alpha<\beta}(a_\alpha + a_\beta + 1)}{\Delta(a_1, \cdots, a_s)}\right).$$

従って，$\chi_\kappa^{(\kappa)} = \chi^{(\kappa)}(R)$ に出てくる二乗根は $\dfrac{\varepsilon h}{h_\kappa}$ または $\dfrac{\varepsilon h}{f^{(\kappa)}}$ の平方根であり，場合によってはこの分数は平方数になり，二乗根は有理数になる.（例 **61.9.1.** $n = 9, a_1 = 4$）.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

3 **68.** *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).**

序文 (pp.244-245):

論文 **60** での $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n$ の指標の研究において，指標は，n の分割 (κ) : $n = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\mu$ で決まり，共役類 ρ は $\alpha\cdot 1 + \beta\cdot 2 + \gamma\cdot 3 + \cdots = n$ で決まる．それらの個数を k と書く.

① k^2 個の指標の値 $\chi_\rho^{(\kappa)}$ を与える**第 2 の方法**を与える．それは，(κ) の assciirten Zerlegung (κ') : $n = \kappa'_1 + \kappa'_2 + \cdots + \kappa'_\nu$ も用いて書く（Sätzen I, II, III, §8）.

② χ に対応する primitive Darstellung を作るには，χ_ρ の情報だけでは不足．$h = |\mathfrak{H}|$ 個の数の系 **charakteristische Einheit** を与えるべし．これから k 個の指標値 χ_ρ は求まる．この方法の長所は，各 primitive Darstellung に対して，簡単にその charakteristische Einheit が与えられること.

③ primitive Darstellung は有理数体 Q 上で実現できる.

（**注**： 指標値はすべて整数値である．Cf. **54** ‘Primfactoren’(1896), p.77）

§1 (pp.245-249): charakteristsche Einheit.

n 次元の行列表現 $\mathfrak{H} \ni R \to (R)$ に対して,

$$(X) := \sum_R (R) x_R$$

を，この表現に対応する行列，または **Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige Matrix** という.

$$z_T = \sum_{RS=T} x_R y_S \implies (X)(Y) = (Z). \tag{3.1}$$

表現が primitive なら， $|x_{RS^{-1}}| = \Phi(x)$, Primfactor der Gruppendeterminante,

$$\Phi(x + u\varepsilon) = u^f + \Big(\sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R^{-1}) x_R\Big) u^{f-1} + \cdots. \tag{3.2}$$

[注： **Spur der Primfactoren** Φ を従前は $\sum_R \chi(R) x_R$ としていたのをここで変更. しかし，この変更は迷惑である．表現 π の普通の trace chracter $\chi_\pi(R) =: \phi(R)$ を $\phi'(R^{-1})$ とするので，ϕ' は π の共役表現 π^* の指標 χ_{π^*} になる．しかし，従前の $\phi(R)$ と今回の $\phi'(R) = \phi(R^{-1})$ とは，動く変数を R と置くか，R^{-1} と置くかの違いだけなので，大事件ではない．次式 (3.3) などは，旧記号でも新記号でも同じである．]

一般には， Spur der Matrix (X) は,

$$\varphi(R) = \sum_\lambda r_\lambda \chi^{(\lambda)}(R), \quad \textbf{zusammengesetzter Charakter von } \mathfrak{H}. \tag{3.3}$$

命名 68.1. charakteristische Einheit とは System $a_R, R \in \mathfrak{H}$ で次を満たすもの：

$$\sum_{RS=T} a_R a_S = a_T \quad (T \in \mathfrak{H}). \tag{3.4}$$

すると， $A = (a_{RS^{-1}})$, $A^2 = A$, で,

$$\begin{aligned} &|u\varepsilon_{RS^{-1}} - a_{RS^{-1}}| = (u-1)^n u^{h-n}, \quad n = \text{rank}\, A. \\ &h a_E = n = \text{Spur}\, A. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Gruppenmatrix $X = (x_{RS^{-1}})$ に対し，$\overline{X} := (x_{S^{-1}R})$ を **antistrophe Gruppenmatrix** とよぶ. (注： $X = (x_{PQ^{-1}}) = \pi(R) x_R$ とおくと，$\pi(R)_{P,Q} = 1 \Leftrightarrow PQ^{-1} = R$, 従って，$\pi(R)_{R,E} = 1, \pi(R)_{RP,P} = 1$. 故に，$\pi(R) = \pi_\ell(R)$ ($\because \delta_P \to \delta_{RP}$). また，右正則表現 π_r により，$\overline{X} = \sum_R \pi_r(R^{-1}) x_R$ と書ける.)

$X = \sum_R \pi_\ell(R) x_R$ と $\overline{Y}$ とは可換である．また，$XY = Z \Rightarrow \overline{Y}\,\overline{X} = \overline{Z}$.

$$\overline{A}^2 = \overline{A} \Rightarrow X\overline{A}Y\overline{A} = Z\overline{A}$$

であるから，$(x) \to X\overline{A}$ は積を保存するので表現である．また，$X = (x_{RS^{-1}}) = \sum_R \pi_\ell(R) x_R$ であるから，$X\overline{A} = \sum_R \pi_\ell(R)\overline{A} x_R$ は **zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige Matrix** でもある．その Spur は,

$$\sum_{R,S} a_{S^{-1}R^{-1}S} x_R = \sum_R \phi(R^{-1}) x_R \tag{3.6}$$

(注： $X\overline{A}$ で決まる表現を π とかくと，$\chi_\pi(R) = \phi(R^{-1})$).

$$\phi(R) = \sum_S a_{S^{-1}RS} = \sum_\lambda r_\lambda \chi^{(\lambda)}(R) \ \text{ Einheit } a_R \text{ bestimmte Charakter}, \tag{3.7}$$

$$R = E \text{ で,}\quad n = \sum\nolimits_\lambda r_\lambda f^{(\lambda)} \qquad \text{Spur und Rang der } A. \tag{3.8}$$

注 68.1.1. $\pi_\ell(R)$ は群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ の基底の元について，$\delta_P \to \delta_{RP}$ だから，$(P, R^{-1}P)$-要素が 1 $(P \in \mathfrak{H})$, 他の要素は 0. $\therefore\ \pi_\ell(R)\overline{A}$ の (P,Q)-要素は，$\overline{A}_{R^{-1}P,Q} = a_{Q^{-1},P^{-1}R} = a_{Q^{-1}R^{-1}P}$,

$$\therefore\ X\overline{A} = \sum\nolimits_R \left(a_{Q^{-1}R^{-1}P}\right)x_R, \qquad \therefore\ \mathrm{tr}(X\overline{A}) = \sum\nolimits_{R,S} a_{S^{-1}R^{-1}S}\, x_R.$$

別の計算：　$X = (x_{PR^{-1}}), \overline{A} = (a_{Q^{-1}R})$,

$\therefore\ (X\overline{A})_{P,Q} = \sum_R x_{PR^{-1}} a_{Q^{-1}R} = \sum_R x_{PR} a_{Q^{-1}R^{-1}} = \sum_R a_{Q^{-1}R^{-1}P} x_R.$ □

論文 59 'Darstellung II', §5 では，次の①，②を論じた：

① 与えられた einfache Charakter χ を与える Einheit を如何に見つけるか，

② charakteristische Einheit を用いて如何に einfache Charakter χ に対応する primitive Darstellung を得るか.

$$\sum\nolimits_{RS=T} \phi(R)\chi^{(\lambda)}(S) = \frac{hr_\lambda}{f^{(\lambda)}}\chi^{(\lambda)}(T),$$

$$a_R = \frac{f}{h}\chi(R) \text{ とすれば，次が分かる：} \left(\frac{f}{h}\chi(RS^{-1})\right) =: J_\chi =: J, \tag{3.9}$$

$$J^2 = J, \quad \overline{J} = J, \quad (AJ)^2 = AJ = JA =: B \quad \text{（注：} J \text{ は } \chi\text{-成分への射影),}$$

$$\sum\nolimits_{RS=T} a_R\chi(S) = \sum\nolimits_{RS=T}\chi(R)a_S = \frac{h}{f}b_T, \quad b_T \text{ は Einheit.} \tag{3.10}$$

Einheit $b_T := \dfrac{f}{h}\sum_R \chi(R)a_{R^{-1}T} = \dfrac{f}{h}\sum_R \chi(TS^{-1})a_S$ の決める Charakter は，

$$\sum_U b_{U^{-1}TU} = \frac{f}{h}\sum_{RS=T}\phi(R)\chi(S) = r\chi(T), \quad \phi(R) = \sum_U a_{U^{-1}RU}, \tag{3.11}$$

$$hb_E = rf, \quad \sum_R \chi(R^{-1})a_R = r \geq 0. \tag{3.12}$$

$$\text{Einheit } \varepsilon_R \text{ が決定する Charakter：}\quad h\varepsilon_R = \sum_\lambda f^{(\lambda)}\chi^{(\lambda)}(R) \tag{3.13}$$

Satz 68-1-I. Einheit A は次の指標を決定する：

$$\phi(R) = \sum_S a_{S^{-1}RS} = \sum_\lambda r_\lambda\chi^{(\lambda)}(R), \quad 0 \leq r_\lambda = \sum_S \chi(S^{-1})a_S \leq f^{(\lambda)}.$$

$$ha_E = \sum_\lambda r_\lambda f^{(\lambda)} \text{ は } A \text{ の Spur かつ Rang である.}$$

定義 68.1.2. 2 つの Gruppenmatizen L, M（群行列 $X = (x_{PQ^{-1}})$ の特殊化）が **äquivalent** であるというのは，もう一つの群行列 $K, |K| \neq 0$, があって，$K^{-1}LK = M$, $LK = KM$ となること.（注：群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ の中での同値性か？ この定義はよく分からぬ. K はなぜ固定元でなく群行列か？）

Satz 68-1-II. 2 つの Einheit が同値である必要十分条件は，それらが同じ Charakter を決定すること.（注: 同値の定義は無いが，"$X\overline{A}$ が同値な表現，または Gruppenmatrizen を与える" ことか？ よく分からぬ)

Satz 68-1-III.
(i) $r = r_\lambda = 0$ とすると，$\chi = \chi^{(\lambda)}$ に対して，$AJ_\chi = 0$.
(ii) $r = r_\lambda > 0$ とすると，$\chi = \chi^{(\lambda)}$ に対して，

$AJ_\chi = J_\chi A =: B$, $\frac{f}{h}\sum_S \chi(RS^{-1})a_S = b_T$ は Einheit, B の決定する指標は $r\chi(R)$.

A と AJ_χ が同値 $\Longrightarrow$ $A = AJ_\chi$.　　[事実として J_χ は χ-成分への射影]
逆に，$A = AJ_\chi \Longrightarrow A$ は指標 $r\chi(R)$ を決定，$rf = ha_E$ は A の Spur かつ Rang.

§2 (pp.249-252): charakteristische Einheit と指標.
指標 ϕ, ψ に対応する Einheits a_R, b_R:

$$\phi(R) = \sum_S a_{S^{-1}RS} = \sum_\lambda r_\lambda \chi^{(\lambda)}(R),\quad \psi(R) = \sum_S b_{S^{-1}RS} = \sum_\lambda s_\lambda \chi^{(\lambda)}(R),$$

$$\sum_R \phi(R^{-1})\psi(R) = h\sum_\lambda r_\lambda s_\lambda = hm,\quad \therefore\ hm = \sum_{R,S,T} a_{R^{-1}} b_{T^{-1}S^{-1}RST}.$$

$$\therefore\quad m = \sum_{R,S} a_{R^{-1}} b_{S^{-1}RS} = \sum_{R,S} a_{RS^{-1}} b_{R^{-1}S} = \sum_R a_{R^{-1}}\psi(R) = \sum_R \phi(R) b_{R^{-1}} =$$
$$= \mathrm{Spur}(A\overline{B}) = \mathrm{Spur}(\overline{B}A) = \mathrm{Rang}(A\overline{B}) = \mathrm{Rang}(\overline{B}A)\quad (\because\ (A\overline{B})^2 = A\overline{B}.)$$

場合 $m = 1$: を考察する.
このとき，ϕ, ψ に共通に含まれるのは，1つの χ だけである. 次の行列の Rang $= 1$:

$$A\overline{B} = (c_{R,S}),\quad c_{R,S} = \sum_T a_{RT^{-1}} b_{S^{-1}T} = \sum_T a_{RT^{-1}S^{-1}} b_T,$$

$$\text{従って，}\quad \begin{vmatrix} c_{E,E} & c_{E,S} \\ c_{R,E} & c_{R,S} \end{vmatrix} = c_{E,E}c_{R,S} - c_{E,S}c_{R,E} = 0,$$

$$\therefore\quad c\sum_S c_{R,S}x_S = c_{R,E}\, h\sum_S c_{E,S}x_S = c_{R,E}\, z,$$

$$\text{with}\quad z = \mathrm{tr}(AXB) = \mathrm{tr}(BAX),\quad c = hc_{E,E} = \mathrm{tr}(AB)$$

$$\therefore\quad c\,AXB = z\,AB,\ \text{ i.e., }\ \mathrm{tr}(AB)\cdot AXB = \mathrm{tr}(AXB)\cdot AB. \tag{3.14}$$

$$d_T := \sum_{RS=T} b_R a_S \Longrightarrow z = \mathrm{tr}(AXB) = h\sum_R d_{R^{-1}} x_R. \tag{3.15}$$

$J = J_\chi, J' := J_{\chi'}$ $(\chi' \neq \chi)$ $J + \sum_{\chi' \neq \chi} J' = E$.
χ' を ϕ, ψ に現れないとすると，$ABJ' = AJ'B = 0$,

$$AB = ABE = AB(J + \sum_{\chi'\neq\chi} J') = ABJ = AJB.$$

$A = B$ のときには，

$$m = \sum_{R,S} a_{RS} a_{R^{-1}S^{-1}} = \sum_\lambda r_\lambda^2 = 1 \Longrightarrow A \text{ primitive Einheit}$$
$$\Longrightarrow \chi \text{ einfacher Charakter}$$

Satz 68.2.I. $a_E \neq 0$, $A^2 = A$ とする.

$$A\ \text{ primitive Einheit} \iff \mathrm{Spur}(A\overline{A}) = 1,$$

$$\text{i.e.,} \qquad \sum_{R,S} a_{R^{-1}} a_{S^{-1}RS} = \sum_{R,S} a_{RS} a_{R^{-1}S^{-1}} = 1. \tag{3.16}$$

また，$f := \mathrm{Rang}(A)$ とすると，(3.14) により，

（重要）
$$f\,AXA = z'\,A, \quad z' = \mathrm{tr}(AXA) = \mathrm{tr}(AX) = h\sum_{R} a_{R^{-1}} x_R, \tag{3.17}$$

（注：両辺の (P, Q^{-1}) 要素をとり，その x_R の係数をとれば，(3.19) 式を得る：

$$f\sum_{S,T} a_{PS^{-1}} x_{ST^{-1}} a_{TQ} = a_{PQ}\cdot h\sum_{R} a_{R^{-1}} x_R, \quad ha_E = f. \qquad)$$

$f(XA)^2 = z'\,(AX) \quad \therefore \quad \dfrac{f}{z'}AX$ は Einheit で $\mathrm{tr}(\cdot) = f$；

$JA = A \quad \therefore \ J(AX) = AX, \quad \therefore$ この Einheit は χ を決める．

Satz 68.2.II. A eine primitive Einheit で，$\mathrm{rank}(A) = f$ とする．$X = (x_{PQ^{-1}})$ Gruppenmatrix, $z' := \mathrm{tr}(XA) \neq 0$ なら，

$$\frac{f}{z'}AX = \frac{f}{z'}XA \quad \text{は } A \text{ と同値な Einheit.}$$

Satz 68.2.III. A, B Einheiten, その指標の共通部分は Grade f の einfache Charakter χ 1個だけだとする．よって，

$$\mathrm{tr}(A\overline{B}) = \sum\nolimits_{R,S} a_{R^{-1}} b_{S^{-1}RS} = \sum\nolimits_{R,S} a_{RS} b_{R^{-1}S^{-1}} = 1. \tag{3.18}$$

$\mathrm{tr}(AB) =: c \neq 0$ のとき，$\dfrac{f}{c}AB = \dfrac{f}{z'}AXB$ は χ を与える Einheit,

$\mathrm{tr}(AB) = c = 0$ のとき，$AB = 0$ または $BA = 0$.

命題 68.2.1. $A, A', A'', \ldots$ Einheiten, $\phi, \phi', \phi'', \ldots$ それらから決まる指標．$B := AA'A''\cdots$.

（イ）$\phi, \phi', \phi'', \ldots$ に共通の指標 χ が無いとき，$B = 0$.

（ロ）$\phi, \phi', \phi'', \ldots$ に共通の指標の共通部分が χ 1個のみのとき，$b := \mathrm{tr}(B) \neq 0$ ならば $\dfrac{f}{b}B$ は χ を与える Einheit である．

Satz 68.2.IV. a_R eine primitive Einheit, $P, Q \in \mathfrak{H}$ 固定元,

（イ）$a_{PQ} \neq 0$ のとき，$b_R := a_E a_{PRQ}/a_{PQ}$ と置くと，b_R は a_R と同値な Einheit,

（ロ）$a_{PQ} = 0$ のとき，$b_R := a_{PRQ}$ と置くと，$B^2 = 0$.

$$\because \quad \sum_{RS=T} b_R b_S = (a_E/a_{PQ})^2 \sum_{R} a_{PRQ} a_{PR^{-1}TQ} = (a_E/a_{PQ})^2 \sum_{R} a_R a_{PQR^{-1}PTQ}$$

$\displaystyle\sum_{R,S} a_{RS} a_{R^{-1}S^{-1}} = 1$, では不足なので下の (3.19) 式を使うとよい．

Satz 68.2.2. a_R eine primitive Einheit, (3.17) から出る次式は $a_E \neq 0$ のとき，primitive Einheit とそれが決める指標の性質の全てを含む：

（重要）
$$a_E \sum_{T} a_{T^{-1}} a_{RTS} = a_R a_S. \tag{3.19}$$

ここで，$R=E$ とおけば，(3.4) になる．また，(3.7) により，(3.16) を得る．

(3.17), 従って (3.19) は eine primitive Einheit を特徴づける式である．とくに，これを用いた計算により，

$$a_E \sum_S a_{PS^{-1}QS} = a_P \sum_S a_{S^{-1}QS} = a_P\, \chi(Q), \tag{3.20}$$

（重要，知らなかった）
$$\sum_S a_{PS^{-1}QS} = \frac{h}{f} a_P\, \chi(Q). \tag{3.21}$$

§3 (pp.252-255): charakteristische Einheit の誘導

$\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$: 部分群，$a_P$: $\mathfrak{G}$ の charakteristische Einheit, ψ: 対応する指標，

$$\sum_{PG=T \text{ in } \mathfrak{G}} a_P a_Q = a_T, \qquad \sum_{S\in\mathfrak{G}} a_{S^{-1}RS} = \psi(R). \tag{3.22}$$

$a_T := 0\ (T \notin \mathfrak{G})$ として $\mathfrak{H}$ へ拡張すると，$\mathfrak{H}$ の charakteristische Einheit となる．

$$\varphi(R) := \sum_{S\in\mathfrak{H}} a_{S^{-1}RS} \quad (R\in\mathfrak{H}), \tag{3.23}$$

$$\varphi(R) = \frac{h}{gh_\rho} \sum_{P\in(\rho)\cap\mathfrak{G}} \psi(P), \quad g\varphi(R) = \sum_{S\in\mathfrak{H}} \psi(S^{-1}RS). \tag{3.24}$$

注：$\varphi = \chi_\Pi$，誘導表現 $\Pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} \pi_\psi$ の指標（π_ψ は ψ に対する表現）

χ: $\mathfrak{H}$ の einfacher Charakter, Grade $f=\chi(E)$

$$\sum_{P\in\mathfrak{G}} \chi(P^{-1}) a_P = \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R^{-1}) a_R = r\ (= [\varphi : \chi]), \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{g} \sum_{R\in\mathfrak{H}} \psi(R^{-1})\chi(R) = r\ (= [\chi|_{\mathfrak{G}} : \psi]) \quad \textbf{(Frobenius reciprocity)}. \tag{3.26}$$

Satz 68.3.I. a_P: $\mathfrak{G}$ の charakteristische Einheit,
χ: $\mathfrak{H}$ の einfache Charakter, $f=\chi(E)$,

$$\sum_{P\in\mathfrak{G}} a_{P^{-1}} \chi(P) = r \geq 0, \quad 整数,$$

$$b_R := \frac{f}{h} \sum_{P\in\mathfrak{G}} a_{P^{-1}} \chi(PR)\ (R\in\mathfrak{H}) \quad \left[注: B = A\,J_\chi,\ J_\chi = \left(\frac{f}{h}\chi(RS^{-1})\right)\right]$$

は $r\chi(R)$ を決める charkteristische Einheit である．

$h=gn$ とし，$\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の完全代表元系 $A_i, 0\leq i\leq n-1$ をとる．$A_i^{-1}, 0\leq i\leq n-1$ は $\mathfrak{G}\backslash\mathfrak{H}$ の完全代表元系である．

$\psi(P)$ を $\mathfrak{G}$ の 1 次元指標とする．$a_P := \frac{1}{g}\psi(P)$ は $\mathfrak{G}$ の charakteristisch Einheit であり，$\sum_{Q\in\mathfrak{G}} a_{Q^{-1}PQ} = \psi(P)$, ゆえに a_P の指標は ψ.

$$行列 \quad \left(\sum\nolimits_{P\in\mathfrak{G}} \psi(P^{-1})\, x_{APB^{-1}}\right) \qquad (A,B = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) \tag{3.27}$$

は eine zu $\mathfrak{H}$ gehörige Matrix である．

注 68.3.1. ψ の誘導表現を $\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\psi$ とおくと，上の行列 $= \sum_{R\in\mathfrak{H}}\pi(R)\,x_R$ である．表現空間の基底は，$f_A, A \in \Omega := \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$，で与えられる．ここに，$B \in \mathfrak{H}$ に対し，$f_B(Y) := 0, Y \notin B\mathfrak{G}$, $f_B(BP) := \psi(P)$ ($\psi(P)^{-1}$ ではなく)．そして，$\pi(R)f_B(Y) = f_B(R^{-1}Y) = f_{RB}(Y)$. $\pi(R)f_B = \sum_A c_{AB}(R)f_A$ $(A, B \in \Omega)$ とすれば，$\pi(R) = \big(c_{AB}(R)\big)$. 答えから見ると，$R = APB^{-1}$ に対し，$c_{AB}(R) = \psi(P^{-1}) = \psi(B^{-1}R^{-1}A)$ で，ψ は自明に $\mathfrak{H}$ に拡張しておく．実際，$RB = AP$ のとき，$f_{RB}(AP) = 1 \therefore f_{RB}(A) = \psi(P^{-1})$. □

$$\left|\sum\nolimits_{P\in\mathfrak{G}}\psi(P^{-1})\,x_{APB^{-1}}\right| = \prod\Phi^r \qquad (r = [\pi:\chi], \chi \leftrightarrow \Phi,\ A, B \in \mathfrak{H}/\mathfrak{G}). \tag{3.28}$$

（誘導表現 $\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\psi$ の既約分解に対応）

（$\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\psi$ に対し）$r = 1$ と取れたら，(3.27) 式により，次は $\mathfrak{H}$ の charakteristische Einheit であり，χ に対する既約表現 π を丁度 1 回だけ，$\mathfrak{H}$ の左正則表現から切り出す：

$$b_R = \frac{f}{h}\sum_{P\in\mathfrak{G}} a_{P^{-1}}\chi(PR) = \frac{f}{hg}\sum_{P\in\mathfrak{G}}\psi(P^{-1})\chi(PR) \quad (R \in \mathfrak{H}).$$

従って，ψ, χ に現れる 1 の巾乗根を $\boldsymbol{Q}$ に添加した体上で π は実現できる．

注: $X = (x_{RS^{-1}}), \overline{A} = (a_{Q^{-1}P}), a_P = \dfrac{1}{g}\psi(P)$ とすると，$X\overline{A} = \big(\sum_P \dfrac{1}{g}\psi(P^{-1})x_{RPQ}\big)$.

2 つの部分群 $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ から 1 つの既約表現が出る場合：

a_P, b_Q をそれぞれ $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ の charakteristische Einheit とし，$\mathfrak{H}$ まで自明に拡張する．$A = (a_{RS^{-1}}), B = (b_{RS^{-1}})$ とし，

$$AB =: \frac{c}{f}C, \quad \frac{c}{f}c_R = \sum_{\substack{PQ=R,\\ P\in\mathfrak{P}, Q\in\mathfrak{Q}}} a_P b_Q\,, \quad c = \mathrm{Spur}(C) = hc_E. \tag{3.29}$$

$\mathfrak{P}\cap\mathfrak{Q} = \{E\}$ theilerfremd の場合：

$$c_{PQ} = \frac{f}{c}a_P b_Q, \quad \mathrm{Spur}(AB) = c = ha_E b_E \neq 0. \tag{3.30}$$

命題 68.3.1. $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{Q} = \{E\}$ （theilerfremd）とする．A, B が決定する zusammengesetzten Charaktere を φ, ψ とし，①共通の既約成分が χ のみで，② χ がどちらかに 1 回のみ現れるとする．$C \neq 0$ であるから，Satz 68.2.III により，C は χ を決める Einheit である．

とくに，$\mathrm{Spur}(A\overline{B}) = 1$ とすると，$[\varphi:\chi] = [\psi:\chi] = 1$. ここに，一般に

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(A\overline{B}) &= \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} a_S b_{R^{-1}S^{-1}R} = \sum_{P\in\mathfrak{P}, R\in\mathfrak{H}} a_P b_{R^{-1}P^{-1}R} = &(3.31)\\ &= \sum_{\substack{R^{-1}PRQ=E,\\ P\in\mathfrak{P}, Q\in\mathfrak{Q}, R\in\mathfrak{H}}} a_P b_Q\,. &(3.32)\end{aligned}$$

$$\sum_{P,Q} a_P b_Q = 1 \ \ (R^{-1}PRQ = E) \implies C \ \text{ in (3.29) は primitive Einheit.}$$

●**感想**： §§1-3 は有限群に対する一般論で，
①正則表現の成分 π への射影を charakteristische Einheit $A = (a_{RS^{-1}})$ を用いて，$X = (x_{RS^{-1}}) \to X\overline{A}$ として与える， ②その指標 χ_π が A の指標 $\phi(R) := \sum_S a_{S^{-1}RS}$ により，$\chi_\pi(R) = \phi(R^{-1})$ と与えられる，
いずれも私にとり目新しい．特に②については知らなかった（注 68.11.1 参照）●

§4 (pp.255-258): $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n$ の（既約）指標．
$h = |\mathfrak{H}| = n!$, 共役類の個数 $= k$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$
ρ: 長さ $1, 2, 3, \ldots$ のサイクルが $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 個,
$s_\kappa := x_1^\kappa + x_2^\kappa + \cdots + x_m^\kappa$,

$$s_1{}^\alpha s_2{}^\beta x_3{}^\gamma \cdots \Delta(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\lambda [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]\, \chi_\rho^{(\lambda)}\, x_1{}^{\lambda_1} \cdots x_m{}^{\lambda_m}, \tag{3.33}$$

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n, \tag{3.34}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n + \frac{m(m-1)}{2}. \tag{3.35}$$

既約指標の Frobenius のパラメーター：
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ のうち，$\geq m$ のもの r 個：$m + a_1, m + a_2, \ldots, m + a_r$；

$$\{\lambda_j; \lambda_j < m\} \sqcup \{m-1-b_1, m-1-b_2, \ldots, m-1-b_r\} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}, \tag{3.36}$$

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_r \geq 0,\ b_1 > b_2 > \ldots > b_r \geq 0,\ \sum_i a_i + \sum_i b_i = n - r, \tag{3.37}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \end{pmatrix} \ \text{[論文 60 での } a_i, b_i \text{ をここでは，} b_i, a_i \text{ と変更]} \tag{3.38}$$

[断り無しの変更なので，そのために自分の論文でミスするところだった．迷惑.]

このパラメーターの別の決め方： $\lambda_m > \lambda_{m-1} > \ldots > \lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$ として，

$\lambda_m - m + 1 \geq \lambda_{m-1} - m + 2 \geq \ldots \geq \lambda_3 - 2 \geq \lambda_2 - 1 \geq \lambda_1 \geq 0$, のうち
0 でないものを $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \ldots \geq \kappa_\mu > 0$, (3.39)

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\mu = n, \tag{3.40}$$

$\mu - 1 =: b_1$（Young 図形の脚の長さより） [[60] とは a_i, b_i 入れ替わり)]
$a_1 := \kappa_1 - 1 > a_2 := \kappa_2 - 2 > \ldots > a_r := \kappa_r - r \geq 0$（Young 図形の腕の長さより),
$\kappa_j - j < 0$ 達の絶対値が $1 \leq b_r + 1 < b_{r-1} + 1 < \ldots < b_1 + 1$.

非負整数の列に辞書式順序を入れる．必要ならば列に 0 を加えて延長する．k 個の n の分割にこの順序で番号を, $0, 1, 2, \ldots, k-1$ と振る：

$n > (n-1) + 1 > (n-2) + 2 > (n-2) + 1 + 1 > \ldots$ は番号 $(0), (1), (2), (3), \ldots$

$[\kappa] = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\mu)$ in (3.39) に対応する指標を $\chi^{[\kappa]}$ と書く（**注**：Frobenius の記号は，$(\kappa), \chi^{(\kappa)}$ であるが，$(\lambda), \chi^{(\lambda)}$ と紛らわしい）．

この n の分割に従って，ブロック型対角行列よりなる **Frobenius-Young 部分群** $\mathfrak{P}_\kappa$ をとると，位数は，$p_\kappa := |\mathfrak{P}_\kappa| = \kappa_1!\kappa_2!\cdots\kappa_\mu!$. 必要ならば $\kappa_{\mu+1} = \cdots = \kappa_m = 0$ を付加して延長する．$\kappa'_1 := \mu$ ($\kappa_i > 0$ の個数) とおく．

$$D_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} := |x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_m^{\lambda_m}| \tag{3.41}$$

とおくと，$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ のとき，(3.33) を解くことによって，

$$\frac{D_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m}}{D_{0,1,2,\ldots,m-1}} = \sum_{\rho=(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)} \frac{h_\rho}{h} \chi_\rho^{(\lambda)} s_1{}^\alpha x_2{}^\beta x_3{}^\gamma \cdots, \quad (\lambda) \text{ in } (3.35), \tag{3.42}$$

$$\frac{h_\rho}{h} = 1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma! \cdots \qquad \Big(\because \sum\nolimits_\rho \frac{h_\rho}{h} (\chi_\rho^{(\lambda)})^2 = 1\Big),$$

$\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_1$ を $\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_m$ で置き換えると，

命題 68.4.1. $[\lambda]$: $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0$, に対し，

$$\frac{D_{\lambda_1+m-1,\lambda_2+m-2,\ldots,\lambda_m}}{D_{m-1,m-2,\ldots,1,0}} = \sum_\rho \frac{h_\rho}{h} \chi_\rho^{[\lambda]} s_1{}^\alpha x_2{}^\beta x_3{}^\gamma \cdots. \tag{3.43}$$

$p_\kappa := |\mathfrak{P}_\kappa|$, $p_\rho^{(\kappa)} := |\rho \cap \mathfrak{P}_\kappa|$ とおく（記号 $[\kappa]$ をまた記号を (κ) にもどす，残念）:

$$s_1{}^\alpha s_2{}^\beta s_3{}^\gamma \cdots = \sum\nolimits_{(\kappa)} \frac{h p_\rho^{(\kappa)}}{p_\kappa h_\rho} S(x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots \kappa_m^{\kappa_m}) \qquad (\text{by } [\mathbf{60}, \S 1]).$$

$$\sum_\rho p_\rho^{(\kappa)} \chi_\rho^{(\lambda)} =: p_\kappa r_{\kappa\lambda}, \quad \sum_{P \in \mathfrak{P}_\kappa} \chi^{(\lambda)}(P) =: p_\kappa r_{\kappa\lambda} \quad (r_{\kappa\lambda} \text{ は非負整数}). \tag{3.44}$$

$$\therefore \qquad \frac{D_{\lambda_1+m-1,\lambda_2+m-2,\ldots,\lambda_m}}{D_{m-1,m-2,\ldots,0}} = \sum_\kappa r_{\kappa\lambda} S(x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_m^{\kappa_m}), \tag{3.45}$$

$$r_{\kappa\lambda} = 0 \ \big((\kappa) > (\lambda)\big), \quad r_{\lambda\lambda} = 1 \ (\text{行列 } (r_{\kappa\lambda}) \text{ は下三角，対角要素 } 1) \tag{3.46}$$

（$\because$ 上で分割 (κ) に番号を振ったとき大きいものが早い番号だった）

命題 68.4.2. (3.28) において，$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_\kappa, h = p_\kappa n$, とおくと，

$$D_\kappa := \Big|\sum\nolimits_{P \in \mathfrak{P}_\kappa} x_{APB^{-1}}\Big| = \prod\nolimits_\lambda \Phi_\lambda^{r_{\kappa\lambda}} \quad (A, B \in \mathfrak{H}/\mathfrak{G}) \tag{3.47}$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \kappa).$$

§5 (pp.258-260): n の分割と，対応する指標，Primfunktion.

n の分割

(α) $\quad n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu$ $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\mu > 0)$

を腕の長さとする Young 図形を考え，その脚の長さより，

(β) $\quad n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu$ $(\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_\nu > 0)$ をうる．この $(\alpha), (\beta)$ を n の **associirte Zerlegung**（注：1901 年施行の新正書法では assciirte = assoziierte）とよび（Young diagram では互いに他の転置），$(\beta) = (\alpha')$ とかく．

$$\alpha_\rho \geq \sigma \Leftrightarrow \beta_\sigma \geq \rho\,; \quad \therefore \quad \alpha_\rho < \sigma \Leftrightarrow \beta_\sigma < \rho. \tag{3.48}$$

$$\big\{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 2, \ldots, \alpha_\mu - \mu, \beta_1, -\beta_2 + 1, \ldots, -\beta_\nu + \nu - 1\big\} = \tag{3.49}$$

$= \{\nu - 1, \nu - 2, \ldots, 0, -1, \ldots, -\mu\}$. $\quad [\because$ Young diagram の対角線より上の

直角2等辺三角形と対角線を含む下のそれに，命題 60.A2 を適用]

$(\beta) = (\alpha')$ のほかに $(\lambda) = (\kappa')$ をとる．

$$\frac{D_{\kappa_1+m-1,\kappa_2+m-2,\ldots,\kappa_m}}{D_{m-1,m-2,\ldots,0}} = \sum\nolimits_{(\alpha)} r_{\alpha\kappa} S(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}),$$

において，$r_{\alpha\kappa} \neq 0$ ならば，$m \geq \lambda_1$ ($\Leftrightarrow$ $\kappa_{m+1} = 0$), $m \geq \beta_1$ ($\Leftrightarrow$ $\alpha_{m+1} = 0$).

命題 68.5.1. $r_{\alpha\kappa} = 0 \quad \big((\alpha') = (\beta) < (\kappa') = (\lambda)\big)$ （行列 $(r_{\alpha\kappa})$ は上三角）．

命題 68.5.2. $\vartheta(R) = \mathrm{sgn}(R)$ とおくと，

$$\chi^{(\kappa')}(R) = \chi^{(\kappa)}(R)\vartheta(R), \quad \Phi_{\kappa'}(x_R) = \Phi_\kappa(\vartheta(R)x_R). \tag{3.50}$$

命題 68.5.3. (i) $\mathfrak{Q}_\kappa := \mathfrak{P}_{\kappa'}$ と $\mathfrak{P}_\kappa$ とは theiler fremd: $\mathfrak{Q}_\kappa \cap \mathfrak{P}_\kappa = \emptyset$.
(ii) $\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_\kappa$, $A, B \in \mathfrak{H}/\mathfrak{G}$, として，(3.47) と類似に，

$$\left|\sum\nolimits_{Q\in\mathfrak{Q}_\kappa} x_{AQB^{-1}}\right| = \prod\nolimits_\lambda \Phi_{\lambda'}^{r_{\kappa'\lambda'}} \quad (\lambda = \kappa, \kappa+1, \ldots, k-1),$$
$$D'_\kappa := \left|\sum\nolimits_{Q\in\mathfrak{Q}_\kappa} \vartheta(Q) x_{AQB^{-1}}\right| = \prod\nolimits_\lambda \Phi_\lambda^{r_{\kappa'\lambda'}}. \tag{3.51}$$

(iii) D_κ と $D_{\kappa'}$ との最大共通因子（gröste gemeisame Divisor）は Φ_κ である．

§6 (pp.260-261): associirte Untergruppe $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ der $\mathfrak{H}$.
$\mathfrak{P} := \mathfrak{P}_\kappa, p := |\mathfrak{P}| = p_\kappa$, $\mathfrak{Q} := \mathfrak{P}_{\kappa'}, q := |\mathfrak{Q}| = p_{\kappa'}$, とし，
1 次元指標 $1_\mathfrak{P}, \vartheta(Q) = \mathrm{sgn}(Q)$ に対応する charakteristische Einheit

$$A: \quad a_P = 1/p, \qquad B: \quad b_Q = \mathrm{sgn}/q \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \text{ の外へは } 0 \text{ で延長}),$$

をとる．$\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = \emptyset$ (theilerfremd) と取ったとき，$\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ を $\mathfrak{H}$ の **associirte Untergruppen** とよぶ．A, B の指標を φ, ψ とすると，

$$\varphi(R) = \sum\nolimits_\lambda r_{\kappa\lambda}\chi^{(\lambda)}, \quad \psi(R) = \sum\nolimits_\lambda r_{\kappa'\lambda'}\chi^{(\lambda)}, \tag{3.52}$$
$$r_{\kappa\kappa} = r_{\kappa'\kappa'} = 1, \quad r_{\kappa\lambda} = 0\ (\kappa < \lambda), \quad r_{\kappa'\lambda'} = 0\ (\kappa > \lambda),$$

ゆえに，φ, ψ の共通部分は，$\chi = \chi^{(\kappa)}$ が1回のみ．§3 により，この共通部分 χ を切り出す charakteristische Einheit C は，

$$c_{PQ} = \frac{f a_P b_Q}{h a_E b_E} = \frac{f}{h}\vartheta(Q), \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \text{ の外では } c_R = 0. \tag{3.53}$$

§§4–5 の結果により，次の値が得られる：

$$\sum\nolimits_\lambda r_{\kappa\lambda} r_{\kappa'\lambda'} \frac{\chi^{(\lambda)}(R)}{f^{(\lambda)}}, \quad \sum\nolimits_\lambda \frac{1}{f^{(\lambda)}} r_{\kappa\lambda} r_{\kappa'\lambda'}^2. \tag{3.54}$$

以下，第2の方法として，assciirte Untergruppen の性質を用いる**第2部**である．

§7 (pp.261-263):

$(\alpha):\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\mu=n,\ \ (\beta):\ \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu=n,$ associirte Zerlegungen,
Schema (*graph* nach SYLVESTER, 現代用語では Young tableau): a_{ij}, n Symbolen,

$$(\mathfrak{p})\qquad \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1\alpha_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdot & \cdot & a_{2\alpha_2} & & \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\alpha_\mu} & & & & \end{array}$$

を考え，その転置を $(\mathfrak{q})$ と書く．これらは部分群 $\mathfrak{P},\mathfrak{Q}$ を与える．

Satz 68.7.I. $R^{-1}\mathfrak{P}R\cap\mathfrak{Q}=\emptyset$ (theilerfremd) $\iff$ $R=PQ\in\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$.

Satz 68.7.I′. $\mathfrak{P}$ と可換な $\mathfrak{H}$ の元全体 $\mathfrak{P}':=\{R\in\mathfrak{H}; R^{-1}\mathfrak{P}R=\mathfrak{P}\}$ に対し，$\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}\mathfrak{D}=\mathfrak{D}\mathfrak{P}$, ここに，$\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{P}'$ と $\mathfrak{Q}$ の最大共通因子．

Satz 68.7.II. 両側共役類分解 $\mathfrak{H}=\mathfrak{P}A\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}B\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}C\mathfrak{Q}+\cdots$ において位数が $pq=|\mathfrak{P}|\cdot|\mathfrak{Q}|$ となるものはただ１つで $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ である．
一般に，$|\mathfrak{P}A\mathfrak{Q}|=|\mathfrak{P}|\cdot|\mathfrak{Q}|/|A^{-1}\mathfrak{P}A\cap\mathfrak{Q}|$.

§8 (pp.264-266):

$A:a_P$, $B:b_P$, $C:c_P$, は §6 と同じ，とする．$\mathrm{Spur}(A\overline{B})=1\Rightarrow C$ は $\mathfrak{H}$ の primitive Einheit ($\because$ Satz 68.2.III). $\sum_{R,P;\,R^{-1}PRQ=E} a_Pb_Q=1$ $(R\in\mathfrak{H},P\in\mathfrak{P},Q\in\mathfrak{Q})$ により，

$$\sum_{R,P;\,R^{-1}PR=Q}\vartheta(Q^{-1})=\sum\vartheta(Q)=pq\quad(R\in\mathfrak{H},P\in\mathfrak{P},Q\in\mathfrak{Q}).$$

そこで，$R\in\mathfrak{H}$ fixed に対し，部分和

$$\sum_{Q\in R^{-1}\mathfrak{P}R\cap\mathfrak{Q}}\vartheta(Q)\ =\ \begin{cases}0 & R\notin\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\\ 1 & R\in\mathfrak{P}\mathfrak{Q}.\end{cases}$$

A,B の指標 φ,ψ の共通部分はただ１つで，$\chi=\chi^{(\kappa)}$ ($\because$ (3.52)). $\therefore C$ の決める指標は，

$$\chi_\rho=\chi_\rho^{(\kappa)}=\sum_{S\in\mathfrak{H}}c_{S^{-1}RS}=\frac{h}{h_\rho}\sum_{R\in(\rho)}c_R,\quad \text{故に，}\tag{3.55}$$

（指標公式１）
$$\frac{h_\rho\chi_\rho}{f}=\sum_{PQ=R}\vartheta(Q)=\sum_{PR=Q}\vartheta(Q)=\sum_{RP=Q}\vartheta(Q),\tag{3.56}$$

ここに，$R\in(\rho),P\in\mathfrak{P},Q\in\mathfrak{Q},\vartheta=\mathrm{sgn}$.

$$\sum_{R:\,R=P'Q'=QP}c_{R^{-1}}c_R=1\implies\frac{h}{f}=\sum_{R:\,R=QP=P'Q'}\vartheta(QQ').\tag{3.57}$$

故に，次の注目すべき「対称群とその指標」の性質を得る：

Satz 68.8.I. $P,P'\in\mathfrak{P},Q,Q'\in\mathfrak{Q}$ に対し，

$$\left|\{(P,P',Q,Q')\,;\,QQ'\ \text{偶}\,\}\right|=\left|\{(P,P',Q,Q')\,;\,QQ'\ \text{奇}\,\}\right|.$$

Satz 68.8.II. $P \in \mathfrak{P}, R \in (\rho), \mathfrak{Q} :=$ Gruppe associirte zu $\mathfrak{P}$ に対し，

$$\frac{h_\rho \chi_\rho}{f} = \left|\{RP \in \mathfrak{Q}; \text{偶}\}\right| - \left|\{RP \in \mathfrak{Q}; \text{奇}\}\right| \qquad (RP \text{ は } PR \text{ としてもよい})$$

Satz 68.8.III. $\zeta(R) := \begin{cases} 0 & R \notin \mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \\ \operatorname{sgn}(Q) & R = PQ \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \end{cases}$ とおくと，$a_R := \dfrac{f}{h}\zeta(R)$ は指標 χ を与える charakteristische primitive Einheit. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\kappa \implies \chi = \chi^{(\kappa)}$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{h}{f}\zeta(R) &= \sum_S \zeta(S^{-1})\chi(SR) = \sum_{P,Q} \zeta(P^{-1}Q^{-1})\chi(QPR) \quad (\because \ \text{Satz 68.1.III}), \\ &= \sum_{P,Q} \vartheta(Q)\chi(PRQ). \end{aligned}$$

A. Young は [Y1](1901), [Y2](1902) において，上に定義した $\zeta(R)$ の性質を研究している．しかし，$\zeta(R)$ と指標 $\chi(R)$ およびそれに付随する 対称群の primitive Darstellung との関係については考えていない．ただし，χ の次元 f は複雑な計算で求めている [Y2].

[**56**, §6](1897) における非可換多元環の元 e_R は Young [Y1] では単に R と書かれる．従って，(3.1) 式は次になる：

$$\left(\sum\nolimits_R x_R R\right)\left(\sum\nolimits_R y_R R\right) = \sum\nolimits_R z_R R$$

(Young での記号)	(Frobenius での記号)
$T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}$	$\dfrac{h}{f^{(\alpha)}}\sum_R \chi^{(\alpha)}(R)R$
$A^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{h}{f^{(\alpha)}}$
$G_1 \cdots G_h \Gamma'_1 \cdots \Gamma'_k$ または PN	$\sum_R \zeta(R)R$
ATP, ATN	$\dfrac{f}{h}\sum_R \xi(R)R$, $\dfrac{f}{h}\sum_R \eta(R)R$ (Einheiten)

§9 (pp.266-269): $\zeta(R)$ から決まる（既約）指標.

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\alpha,\ \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\beta,\ \beta = \alpha',\ p = |\mathfrak{P}| = \alpha_1!\,\alpha_2!\cdots,\ q = |\mathfrak{Q}| = \beta_1!\,\beta_2!\cdots.$$

$$\zeta(R) := \begin{cases} 0 & R \notin \mathfrak{P}\mathfrak{Q}, \\ \operatorname{sgn}(Q) & R = PQ \in \mathfrak{P}\mathfrak{Q}. \end{cases} \qquad \text{(cf. Satz 68.8.III)} \tag{3.58}$$

Satz 68.9. $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_0$, または $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{P}$, または $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{Q}$ とする.

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}} \zeta(R^{-1})\zeta(R) =: \frac{h}{f} \quad \text{とおく（左辺} \neq 0 \text{ である），} \tag{3.59}$$

$$\implies \quad \sum_{R,S \in \mathfrak{H}} \zeta(RSR^{-1}S^{-1}) =: \left(\frac{h}{f}\right)^2. \tag{3.60}$$

$$\text{（指標公式２）} \quad \chi(R) := \frac{f}{h}\sum_{S \in \mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS), \qquad \mathfrak{H} \text{ の（既約）指標，} \tag{3.61}$$

$$\chi(E) = f \text{（次元）} \ \therefore\ f|h; \quad \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R^{-1})\zeta(R) = h. \tag{3.62}$$

$$\sum_{P\in\mathfrak{P}} \chi(P) = p, \qquad \sum_{Q\in\mathfrak{Q}} \vartheta(Q)\chi(Q) = q. \tag{3.63}$$

注：上の（指標公式２）は，§8 の（指標公式１）(3.56) 式から直接導かれそうである．

証明． Step I. $A, B \in \mathfrak{H}$ に対し，

$$\zeta(PR) = \zeta(R), \quad \zeta(RQ) = \zeta(R)\zeta(Q), \tag{3.64}$$

$$\begin{cases} \sum_P \zeta(APB) = \sum_P \zeta(AP)\zeta(B), \\ \sum_Q \zeta(Q)\zeta(AQB) = \sum_Q \zeta(A)\zeta(Q)\zeta(QB). \end{cases} \quad \text{(cf. [Y2, 11])} \tag{3.65}$$

Step II. $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_0$, または $\mathfrak{H} > \mathfrak{P}$, $\mathfrak{H} > \mathfrak{Q}$:

$$\begin{cases} \sum_{R\in\mathfrak{H}} \zeta(R^{-1}ARB) = \sum_{R\in\mathfrak{H}} \zeta(R^{-1}AR)\zeta(B) & (\mathfrak{H} > \mathfrak{P}), \\ \sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(AS^{-1}BS) = \sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(A)\zeta(S^{-1}BS) & (\mathfrak{H} > \mathfrak{Q}). \end{cases} \tag{3.66}$$

Step III. $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{P}$ とする．(3.66) より，

$$\begin{aligned} \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(RSR^{-1}S^{-1}) &\overset{(3.66)}{=} \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(RSR^{-1})\zeta(S^{-1}) \qquad (3.67) \\ = \quad \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(RS)\zeta(R^{-1})\zeta(S^{-1}) &= \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(R)\zeta(S)\zeta(R^{-1})\zeta(S^{-1}). \end{aligned}$$

これにより，(3.60) を得る．さらに，

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{f}\right)^2 &= \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS)\zeta(R^{-1}) = \sum_{R,S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS)\zeta(T^{-1}R^{-1}T) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{R\in\mathfrak{H}} \Big(\sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS)\Big)\Big(\sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}R^{-1}S). \end{aligned}$$

$$\text{他方} \qquad \sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS) = \sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}R^{-1}S) \qquad \text{（証明略）}.$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{h}{f}\right)^2 = \frac{1}{h}\sum_{R\in\mathfrak{H}} \Big(\sum_{S\in\mathfrak{H}} \zeta(S^{-1}RS)\Big)^2 \geq \frac{1}{h}\cdot h^2 \quad (R = E \text{ の項}).$$

Step IV. $$\chi(RS) = \chi(SR), \quad \sum_{S\in\mathfrak{H}} \chi(AS^{-1}BS) = \frac{h}{f}\chi(A)\chi(B).$$ □

Note 68.9.1. §§8–9 で Young の論文 [Y1], [Y2] が頻繁に引用されている．

§10 (pp.270-271):

$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n$ とする．k 個の $\mathfrak{P}_\kappa$ に対して，それぞれ，関数 $\zeta^{\kappa)}$, 指標 $\chi^{\kappa)}$, が対応する．§4 で導入した順序

$$\kappa < \lambda \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots) > (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$$

に従って $\mathfrak{P}_\kappa$ を順序づける（ただし，$\mathfrak{P}_\kappa$ は n の分割 κ より詳しい Young tableau で決まる）．$\kappa < \lambda$ のとき，$\mathfrak{P}_\kappa \cap \mathfrak{Q}_\lambda \neq \{1\}, \mathfrak{Q}_\lambda := \mathfrak{P}_{\lambda'}$ とできる．そして，この共通部分に互換 T がある．$\mathfrak{P}_\kappa = \mathfrak{P}_\kappa T, \mathfrak{Q}_\lambda = \mathfrak{Q}_\lambda T$,

$$\sum_{P_\kappa \in \mathfrak{P}_\kappa} \zeta^{(\lambda)}(P_\kappa) = \sum_{P_\kappa} \zeta^{(\lambda)}(P_\kappa T) = \sum_{P_\kappa} \zeta^{(\lambda)}(P_\kappa)\zeta^{(\lambda)}(T) = -\sum_{P_\kappa} \zeta^{(\lambda)}(P_\kappa)$$

$$\therefore \quad \sum_{P_\kappa \in \mathfrak{P}_\kappa} \zeta^{(\lambda)}(P_\kappa) = 0 \qquad (\kappa < \lambda). \tag{3.68}$$

$\mathfrak{P}_\kappa, \mathfrak{Q}_\lambda$ の代わりに $S^{-1}\mathfrak{P}_\kappa S$ 等を使ってもよい．S で足すと，

$$\therefore \quad \sum_{P_\kappa \in \mathfrak{P}_\kappa} \chi^{(\lambda)}(P_\kappa) = 0 \qquad (\kappa < \lambda). \tag{3.69}$$

(3.63) により，$\displaystyle\sum_{P_\lambda \in \mathfrak{P}_\lambda} \chi^{(\lambda)}(P_\lambda) = p_\lambda \neq 0.$

これで，k 個の一次独立な指標が得られたことが分かる．
さらに，指標の番号付け $\kappa^{(\lambda)}$ は，§4, (3.46) での番号付けと一致する．
また，$\mathfrak{P}_{\lambda'} = \mathfrak{Q}_\lambda, \mathfrak{Q}_{\kappa'} = \mathfrak{P}_\kappa$ とは互換を共通に持つので，

$$\sum_{P_{\lambda'} \in \mathfrak{P}_{\lambda'}} \chi^{(\kappa')}(P_{\lambda'}) = 0 \quad (\kappa < \lambda) \qquad \therefore \quad r_{\lambda'\kappa'} = 0 \quad (\kappa < \lambda),$$

$$r_{\kappa\lambda} = 0 \qquad (\kappa' > \lambda'). \tag{3.70}$$

§11 (pp.271-272): 指標 χ を決める primitive Einheiten $\frac{h}{f}\zeta(R), \frac{h}{f}\xi(R), \frac{h}{f}\eta(R)$.

$\mathfrak{H} > \mathfrak{P}$ または $\mathfrak{H} > \mathfrak{Q}$ とする．

命題 68.11.1. $\frac{h}{f}\zeta(R)$ は $\mathfrak{H}$ に対する charakteristische primitive Einheit である．

命題 68.11.2. $\mathfrak{H} > \mathfrak{P}$ または $\mathfrak{H} > \mathfrak{Q}$ に従って，$\frac{h}{f}\xi(R), \frac{h}{f}\eta(R)$ はそれぞれ $\mathfrak{H}$ に対する charakteristische primitive Einheit である．ここに，

$$\xi(R) = \frac{1}{p}\sum_{P \in \mathfrak{P}} \chi(RP) = \frac{1}{p}\sum_{P} \chi(PR) \qquad (\mathfrak{H} > \mathfrak{P}), \tag{3.71}$$

$$\eta(R) = \frac{1}{q}\sum_{Q \in \mathfrak{Q}} \vartheta(Q)\chi(QR) = \frac{1}{q}\sum_{Q} \vartheta(Q)\zeta(QR) = \frac{1}{q}\sum_{Q} \zeta(Q^{-1}RQ) \qquad (\mathfrak{H} > \mathfrak{Q}),$$

$$\xi(R) = \frac{r}{p}\sum_{Q \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{P}R\mathfrak{P}} \vartheta(Q), \qquad r := \left|R^{-1}\mathfrak{P}R \cap \mathfrak{P}\right|, \tag{3.72}$$

$$\eta(R) = \frac{r}{q}\vartheta(R)\sum_{P \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}R\mathfrak{Q}} \vartheta(Q), \qquad r := \left|R^{-1}\mathfrak{Q}R \cap \mathfrak{Q}\right|. \tag{3.73}$$

注 68.11.1（charakteristche Einheit の方法の長所）．
有限群はコンパクト群の 1 種である．コンパクト群 G について，正規ハール測度に関する $L^2(G)$ 上の左正則表現 $\mathcal{R}$ に対する intertwining operators は次のように与えられる．G の既約表現 π, その指標 χ_π, さらに，表現空間 $V(\pi)$ に正規直交基底をとって，

$\pi(g)$ をユニタリ行列 $(\phi_{ij}(g))_{1\le i,j\le d}$ $(d=\dim\pi)$ で表す．$L^2(G)$ 上の right convlution の定義は，$f*\phi(g) := \int_G f(gh^{-1})\phi(h)\,dh$，ここに dh は G 上の正規ハール測度．

$P_\pi f := f*\chi_\pi$, $P_{\pi,i}f := f*\phi_{ii}$ $(f\in L^2(G))$ とおくと，これらは正則表現 $\mathcal{R}$ に対する intertwining operator であり，$P_\pi = \sum_{1\le i\le d} P_{\pi,i}$ $(\because \chi_\pi = \sum_{1\le i\le d}\phi_{ii})$, P_π は $\mathcal{R}$ の π-成分への射影で，各 $P_{\pi,i}$ は 1 つの π-既約成分への射影である．指標 χ_π は ϕ_{ii} からその中心化によって得られる：

$$\dim\pi\cdot\int_G \phi_{ii}(hgh^{-1})\,dh = \chi_\pi(g).$$

上式は，§1 での charakteristische Einheit とその指標との関係，における (3.7) 式と比較できる．§§1–2 での理論と上記の理論との類似性は著しいが，前者が **表現の構成，指標の計算に用いられる** のに比して，後者では，**指標** χ_π が求まれば，π-成分（重複度込み）を正則表現から切り出せる，また，**表現の対角行列要素** $\phi(g)=\langle\pi(g)v,v\rangle$ $(v\in V(\pi), \|v\|=1)$，例えば 1 つの $\phi_{ii}(g)$，が求まれば，その中心化で指標が得られる．

§12 (pp.272-274): 長さ 2, 3, 4, のサイクル置換に対する指標の値．

長さ ℓ のサイクルのなす共役類 $(\rho)=(\ell)$ の位数 $h_\rho = h_\ell = \frac{1}{\ell}n(n-1)\cdots(n-\ell+1)$. 指標 χ, (ρ) での値 χ_ρ, その次元 $f=\chi(E)$,

$\ell=2$（互換）のとき：

$$\begin{aligned}
\frac{h_2\chi_2}{f} &= \left|\{\text{Transposition } T\in\mathfrak{P}\}\right| - \left|\{T\in\mathfrak{Q}\}\right| \qquad (\because (3.57)\ \text{指標公式}\ 1\,)\\
&= \sum_{1\le i\le\mu}\frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-1) - \sum_{1\le j\le\nu}\frac{1}{2}\beta_j(\beta_j-1) \qquad (\beta=\alpha' :\ \text{Young diagram})\\
&= \sum_{1\le i\le\mu}\frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-1) - \sum_{1\le i\le\nu}(i-1)\alpha_i \qquad (3.74)\\
&= \sum_{1\le i\le r}\frac{1}{2}a_i(a_i+1) - \sum_{1\le i\le r}\frac{1}{2}b_i(b_i+1) \quad ((a_i),(b_i) :\ \text{Frobenius parameter})\\
&= \sum_{1\le i\le m}\frac{1}{2}(\lambda_i-m)(\lambda_i-m+1) - \frac{1}{6}m(m^2-1) \qquad (\text{by } (3.35)).
\end{aligned}$$

$\ell=3$ のとき：

$$\begin{aligned}
\frac{h_3\chi_3}{f} &= \sum\binom{\alpha}{3} + \sum\binom{\beta}{3} - \sum_{\alpha_i\ge j,\beta_j\ge i}(\alpha_i-1)(\beta_j-1)\\
&= \sum_{1\le i\le r}\frac{1}{6}a_i(a_i+1)(2a_i+1) + \sum_{1\le i\le r}\frac{1}{6}b_i(b_i+1)(2b_j+1) - \frac{1}{2}n(n-1)\\
&= \sum_{1\le i\le m}\frac{1}{6}(\lambda_i-m)(\lambda_i-m+1)(2\lambda_i-2m+1) + \frac{1}{12}m^2(m^2-1) - \frac{1}{2}n(n-1).
\end{aligned}$$

$\ell=4$ のとき：

$$\begin{aligned}
\frac{h_4\chi_4}{f} &= \sum_{1\le i\le r}\left(\frac{1}{2}a_i(a_i+1)\right)^2 - \sum\left(\frac{1}{2}b_i(b_i+1)\right)^2 - (2n-3)\frac{h_2\chi_2}{f}\\
&= \sum_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{2}(\lambda_i-m)(\lambda_i-m+1)\right)^2 - \frac{1}{60}m(m^2-1)(3m^2-2) - (2n-3)\frac{h_2\chi_2}{f}.
\end{aligned}$$

引　用　文　献：

[岩堀] 岩堀 長慶，対称群と一般線形群の表現論 — 既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解 —，岩波講座 基礎数学 線形代数 iv，1978.

[平井 1] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム（2001），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**, pp.84-94, 2002/03/20.

[平井 2] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第 13 回数学史シンポジュウム（2002），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**, pp.53-58, 2003/03/20.

[平井 3] Schur の学位論文および対称群の表現，第 14 回数学史シンポジュウム（2003），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**25**, pp.1233-131, 2004/03/09.

[平井 4] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，第 15 回数学史シンポジュウム（2004），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**26**, pp.222-240, 2005/03/09.

[平井 5] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その２），第 16 回数学史シンポジュウム（2005），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**27**, pp.168-182, 2006/03/29.

フロベニウス： 有限群の指標および線形表現に関する論文リスト
すべて Frobenius 全集 Band III より

53. *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

56. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

57. *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 501–515(1898).

58. *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

59. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

61. *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

68. *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 401–409(1903).

72. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 987–991(1903).

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 558–571(1904).

75. *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 186–208(1906).

76. *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 209–217(1906).

78. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 428–437(1907).

補完として追加： 最初の論文 53 で与えた "指標の方程式" の解法に使う：

51. *Über vertauschbare Matrizen,* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 601-614(1896).

補完として追加： 論文 54 で与えた "群行列式の分解" を精密化する：

70. *Theorie der hyperkomplexen Größen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 504–537(1903).

71. *Theorie der hyperkomplexen Größen II,* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 601-614(1903).

Appendix: 関連するシュアー，バーンサイドおよびヤングの論文のリスト.

射影表現３部作

[Sch1] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50（全集での論文番号は 4 なので，[S4] とも引用する）

[Sch2] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **132**(1907), 85–137 （= **[S10]**）.

[Sch3] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **139**(1911), 155–255 （= **[S16]**）.

[S1] J. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen* (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen,* Band I, pp.1–71.

[S6] J. Schur, *Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 77–91.

[S7] J. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[S9] J. Schur, *Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164–184.

[S11] J. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

[S14] J. Schur, *Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen,* American Mathematical Society Transactions, **10**(1909), 159–175.

（注： [S4], [S10], [S16] は上記の射影表現三部作 [Sch1], [Sch2], [Sch3] と同じである）

[B1] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, I,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898).

[B2] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, II,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898).

[Y1] A. Young, *On quantitative substitutional analysis,* Proceedings London Math. Soc., **33**(1901), 97-146.

[Y2] A. Young, *On quantitative substitutional analysis* (second paper), Proceedings London Math. Soc., **34**(1902), 361–397.

C.W. Curtis による数学史的評論：

[Cur1] Charles W. Curtis, *Representation theory of finite groups: from Frobenius to Brauer,* The Mathematical Intelligencer, **14**(1992), 48–57.