Jacobi の ” FUNNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM” について

今野秀二

1829 年に出たこの ”Fundamenta nova...” は Legendre の Memoire sur les transcendantes elliptiques に続く最も早い時期の楕円関数論で Jacobi の代表的著作の一つである．楕円関数の歴史では Jacobi はよく Abel と対比されるが，この本は Jacobi の研究成果を体系的にまとめたもので彼の研究成果をほぼカバーしたものとなっている．一方，この本は Eisenstein, Kronecker をはじめ Jacobi に続く研究者達に研究上非常によく引用されるという歴史的著作でもあった．このような理由からここでは ”この本でどんな結果をどんな条件で，どこまで出しているのか” に焦点をあてて紹介してみたい．

この本は 2 部からなり，第 1 部は楕円積分の変換理論で Legendre の導入した第 1 種微分を第 1 種微分に写す変換とその発展をとり扱っている．楕円曲線で見ると周期の n 分点を 1 つとり，それから生成される巡回群を核に持つ isogeny とその dual を楕円関数の言葉で記述している．第 2 部では第 1 部の結果を使いまず楕円関数の無限積表示，フーリエ展開を求める．それを使って第 2 種，第 3 種微分とテータ関数を導入し，それらの加法定理や今日知られているテータ関数の性質を導いている．また，周期やモヂュラス k などの不変量をテータ 0 値で表す Jacobi の有名な発見も登場する．

第 2 部で楕円関数のモヂュラス k はいつも $0 < k < 1$ なる実数と仮定している．つまり実の楕円曲線に限っている．しかし，ここでの結果は今日では関数論を使って一般の k でほとんどそのまま成り立つことがわかっている．また無限積や級数について，収束の議論はないが結果はすべて正しい．この本に関する限り虚数乗法は出てこないことも注意しておこう．

最後にこれは大変内容の豊富な本で，全部をカバーしきれていないことをお断りしておく．

以後簡略して Jacobi を [J], Legendre を [L], Fundamenta nova を [F] と書くことにする．

第 I 部　楕円積分の変数変換

$R(x,y)$ は 2 変数有理関数，$P(x)$ は平方因子を持たない 4 次多項式のとき $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$ の形の積分を楕円積分という．[L] はこの積分を 3 つのタイプの標準型に分類し，それぞれ第 1 種，第 2 種，第 3 種積分と呼んだ．[J] はまず一般の有理変換 $x \to y$ で $dy/\sqrt{P_1(y)} = dx/\sqrt{P(x)}$ （$P_1(y)$ は平方因子を持たない 4 次多項式）という形のものを考えた．しかし，結局有理変換 $x \to y = U(x)/V(x)$ （U,V は互いに素な多項式）で第 1 種微分を第 1 種微分に写す変換を調べている（この場合に帰着している）．すなわち楕円曲線の isogeny で楕円関数の周期の等分点から引き起こされるものを考えている．

定義と基本性質：まず [J] に従って楕円関数の定義と基本性質をまとめておこう．第 1 種楕円積分の標準型を

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (x = \sin\varphi) \tag{1}$$

とする．このとき第 1 の等式で $\varphi = \mathrm{am}(u)$ と定義する． $x = \sin\varphi$ として第 2 等式を得るが，この x を $x = \mathrm{sn}(u) = \mathrm{sn}(u,k) = \sin\mathrm{am}(u)$ と定義する．モヂュラス k は必要なとき以外書かない．さらに関数 cn, dn を $\mathrm{cn}(u) = \cos\mathrm{am}(u), \mathrm{dn}(u) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)}$ と定義する．明らかに $\mathrm{sn}(u)$ は奇関数，$\mathrm{cn}(u), \mathrm{dn}(u)$ は偶関数である．また $\mathrm{sn}(0) = 0, \mathrm{cn}(0) = \mathrm{dn}(0) = 1$ および $\mathrm{sn}^2(u)+\mathrm{cn}^2(u) = 1, \mathrm{dn}^2(u)+k^2\mathrm{sn}^2(u) = 1$ の成り立つことも容易に分かる．さらに導関数は次のようになる．

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}(u) = \mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u), \frac{d}{du}\mathrm{cn}(u) = -\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u), \frac{d}{du}\mathrm{dn}(u) = -k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u).$$

これらの関数について次の加法定理が成り立つ．

$$\mathrm{sn}(u\pm v) = \frac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v) \pm \mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}$$

$$\mathrm{cn}(u\pm v) = \frac{\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v) \mp \mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}$$

$$\mathrm{dn}(u\pm v) = \frac{\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v) \mp k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}.$$

[J] は φ に対して ψ をまったく形式的に $\sin\varphi = i\tan\psi$ と定め $\cos\varphi = 1/\cos\psi, d\varphi = id\psi/\cos\varphi$ より等式

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = i\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

を出している．ただし k' は $k^2+k'^2 = 1$ を満たす数である．この積分を iu と置けば $\mathrm{sn}(iu,k) = i\ \mathrm{sn}(u,k')/\mathrm{cn}(u,k')$ を得る．同様にして $\mathrm{cn}(iu,k) =$

$1/\mathrm{cn}(u,k'), \mathrm{dn}(iu,k)=\mathrm{dn}(u,k')/\mathrm{cn}(u,k')$ を得る．[J] はこれらの式で sn, cn, dn の虚軸上での値を定義し，加法定理を使ってこれらの関数を複素変数関数に拡張している．しかしこの本では複素解析関数としての取り扱いはしていない．

以後 k に対して k' はいつも $k^2+k'^2=1$ を満たす数とし K, K' を

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \tag{2}$$

で定義する．このとき $\mathrm{sn}(u,k), \mathrm{cn}(u,k), \mathrm{dn}(u,k)$ はそれぞれ，格子 $4K\mathbf{Z}+2iK'\mathbf{Z}$, $4K\mathbf{Z}+(2K+2iK')\mathbf{Z}$, $2K\mathbf{Z}+4iK'\mathbf{Z}$ （$\mathbf{Z}$ は有理整数環）を周期にもつ 2 重周期関数になっている．また上で k を k' に置き換えれば K と K' は互いに交換される．さらにこれらの関数の 0 点や極もわかっていて，例えば $\mathrm{sn}(u)$ は $u \equiv iK', 2K+iK' \mod$ (周期) で 1 位の極を持つ．

第 I 部の主結果：[J] は楕円関数の基本性質を準備したあとで，問題を以下のように設定した．問題　与えられた定数 k に対し適当な定数 λ, M について，微分方程式

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad y=\frac{U(x)}{V(x)} \tag{3}$$

を満たす多項式 $U(x), V(x)$ を求めよ．

$\deg U(x), \deg V(x)$ の大きい方を n とするとき，この n を有理変換 $x \to y = U(x)/V(x)$ の次数という． $x=\mathrm{sn}(u,k)$ は (1) の通りで $y=U(x)/V(x)$ が (3) を満たすなら， $y=U(x)/V(x)=\mathrm{sn}(u/M,\lambda)$ でなければならない（(3) を 0 から x まで積分する）．[J] はこの問題を最初 $n=3,5$ について詳しく調べ，次に任意の奇数 $n=2l-1\geq 1$ ついて (3) を満たす λ, M, U, V を求めた．

主結果 ：$n=2l-1\geq 1$ は奇数とし $(n,m,m')=1$ なる整数 m, m' に対し $\omega=(mK+m'iK)/n$ とおく．このとき

$$\lambda=k^n\left(\prod_{j=1}^{l-1}\mathrm{sn}(K-4j\omega)\right)^4, \quad M=(-1)^{l-1}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\mathrm{sn}(K-4j\omega)}{\mathrm{sn}(4j\omega)}\right)^2 \tag{4}$$

に対して

$$U(x)=\frac{x}{M}\prod_{j=1}^{l-1}\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2(4j\omega)}\right), \quad V(x)=\prod_{j=1}^{l-1}\left(1-k^2x^2\mathrm{sn}^2(4j\omega)\right) \tag{5}$$

は (3) を満たす．ここでモヂュラスはすべて k である．

[注 1]　4ω は sn(u) の周期の n 分点で， $\mathrm{sn}(u)$ の性質より (4) (5) の $4j\omega$ は $2j\omega$ としてよい．さらに $\lambda^2+\lambda'^2=1$ なる λ' と k' との間にも (4) と類似の関係が成り立つ．

[注 2]　主結果から ω はモヂュラス k の楕円曲線からモヂュラス λ の楕円曲線への $1/M$ 乗法を引き起こしていることに注意。

証明の概略： $\mathrm{sn}(u,k)$ の加法定理から

$$\left(1-x^2/\mathrm{sn}^2\alpha\right)/\left(1-k^2x^2\mathrm{sn}^2\alpha\right)=-\left(\mathrm{sn}(u+\alpha)\mathrm{sn}(u-\alpha)\right)/\mathrm{sn}^2\alpha.$$

$\mathrm{sn}(u)$ は 4ω を周期にもつから $-\alpha$ を $4n\omega-\alpha$ とする。 $\alpha=4j\omega\ (j=1,2,\ldots)$ を代入し

$$\frac{U(x)}{V(x)}=\frac{x}{M}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1-x^2/\mathrm{sn}^2(4j\omega)}{1-k^2x^2\mathrm{sn}^2(4j\omega)}=\frac{\prod_{m=0}^{n-1}\mathrm{sn}(u+4m\omega)}{\left(\prod_{j=1}^{l-1}\mathrm{sn}(K-4j\omega)\right)^2}. \tag{6}$$

$$A=\prod_{j=1}^{l-1}\left(1+\frac{x}{\mathrm{sn}(K-4j\omega)}\right),\qquad B=\prod_{j=1}^{l-1}\left(1-\frac{x}{\mathrm{sn}(K-4j\omega)}\right)$$

$$C=\prod_{j=1}^{l-1}(1+kx\ \mathrm{sn}(K-4j\omega)),\qquad D=\prod_{j=1}^{l-1}(1-kx\ \mathrm{sn}(K-4j\omega))$$

と置くと， A,B,C,D が

$$V+U=(1+x)A^2, V-U=(1-x)B^2, V+\lambda U=(1+kx)C^2, V-\lambda U=(1-kx)D^2$$

を満たすことを使う。

[例] $n=3$ のとき: このときは楕円関数を使わずに表せて次のようになる。 $u=k^{1/4}, v=\lambda^{1/4}$ が $P(u,v)=u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2)=0$ を満たすとき

$$M=v/(v+2u^3),\quad U(x)=x\{(v+2u^3)v+u^6x^2\},\quad V(x)=v^2+v^3u^2(v+2u^3)x^2$$

に対して $y=U(x)/V(x)$ は (3) を満たす。ここで $P(u,v)=0$ は 3 次のモヂュラー方程式である。

以後上で求めた λ,λ' に対して

$$\Lambda=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},\quad \Lambda'=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda'^2y^2)}}$$

とする。

n 乗法：さて $x=\mathrm{sn}(u,k)$ に対し $y=\mathrm{sn}(u/M,\lambda)$ は $y=U(x)/V(x)$ または $U(x)-yV(x)=0$ を満たしていた。逆に $y=\mathrm{sn}(u/M,\lambda)$ を与え，変数 x の多項式 U,V を (5) で定義し $U(x)-yV(x)=0$ を x の方程式と見るならば，これは n 次方程式でその根は $x=\mathrm{sn}(u+4j\omega,k)\ (j=0,1,\cdots,n-1)$ からな

ることがわかる．とくに $y=0$ の場合 $U(x)=0$ の根は上で $u=0$ とすればよい．

次に特別な場合を考える．まず $\omega=K/n$ から得られる値 $\lambda,\lambda',\Lambda,\Lambda',M$ に対して $\omega=iK'/n$ から得られるこれらの値を $\lambda_1,\lambda'_1,\Lambda_1,\Lambda'_1,M_1$ と表すと

$$\Lambda=\frac{K}{nM},\qquad \Lambda'=\frac{K'}{M},\qquad \Lambda_1=\frac{K}{M_1},\qquad \Lambda'_1=\frac{K'}{nM_1} \tag{7}$$

が成り立つ．[J] は主結果で $\omega=K/n$ によりまずモヂュラス k の楕円関数をモヂュラス λ の楕円関数に移す（$1/M$ 乗法）．これを更に $\omega=i\Lambda'/n$ によって移すと，モヂュラス λ の楕円関数はモヂュラス k の関数（$1/M'_1$ 乗法）に移ることを明らかにし，これら２つの写像を合成するともとの楕円関数 $\mathrm{sn}(u,k)$ の n 乗法 $\mathrm{sn}(nu,k)$ が得られることを示している．例えば n 乗法 $z=\mathrm{sn}(nu,k)$ と $y=\mathrm{sn}(u/M,\lambda)$ の間には

$$\mathrm{sn}(nu,k)=nMy\prod_{j=1}^{l}(1-\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(2ji\Lambda'/n,\lambda)})(1-\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2((2j-1)i\Lambda'/n,\lambda)})^{-1} \tag{8}$$

が成り立つことを示し， n が素数のとき，$\mathrm{sn}(nu,k)$ と $\mathrm{sn}(u,k)$ の間には

$$\mathrm{sn}(nu,k)=n\ \mathrm{sn}(u,k)\prod_{m,m'}\frac{\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,k)}{\mathrm{sn}^2((2mK+2m'iK')/n,k)}\right)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2((2mK+2m'iK')/n,k)\ \mathrm{sn}^2(u,k))} \tag{9}$$

の成り立つことを証明している．ここで $\prod_{m,m'}$ は $m,m'=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-1)/2$ かつ $(m,m')\neq(0,0)$ なる対 (m,m') についての積である．(9) で $x=\mathrm{sn}(u)$ とおくと $z=\mathrm{sn}(nu)=U_1(x)/V_1(x)$ ($\deg U_1(x)=n^2$, $\deg V_1(x)=n^2-1$) と表される． $\mathrm{cn}(nu,k),\mathrm{dn}(nu,k)$ についても同様の結果を得ている．

[J] はこのあと方程式 $U_1(x)=0$ の根がすべて分かるので根と係数の関係から

$$\prod_{m,m'}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2mK+2m'iK'}{n}\right)=\frac{(-1)^{(n-1)/2}n}{k^{(n^2-1)/2}}.$$

同様に sn を cn, dn で置き換えると，右辺はそれぞれ $(k'/k)^{(n^2-1)/2}, k'^{(n^2-1)/2}$ となることを導いている．

[注 3] Kronecker は (9) （n 素数）を sn の加法定理から導き， $U_1(x)=0$ を円周等分方程式の類似とみて，その係数の有理性および整であるか，既約か，アーベルかを調べ，n が素数のとき sn の合同関係式を証明した． Eisenstein はレムニスケート関数（ $k^2=-1$ ）について U_1,V_1 を具体的に求めその合同関係式から４乗剰余を証明した．

モヂュラー方程式　有理変換 $x \to y$ で k は λ に移ったが，この k と λ の関係を [J] はモヂュラー方程式と呼び，$n = 3, 5$ 次のとき $u = k^{1/4}, v = \lambda^{1/4}$ に対して

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0 \qquad (n = 3)$$

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0 \qquad (n = 5)$$

がモヂュラー方程式となることを示た．さらに $n = 3, 5$ について k, λ が微分方程式

$$M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\lambda(1 - \lambda^2)}{k(1 - k^2)} \cdot \frac{dk}{d\lambda}$$

を満たしていることを証明している．

第 II 部　楕円関数の展開

第 II 部では楕円関数を無限積で表しそこからフーリエ展開を求め，第 2 種，第 3 種楕円積分およびテータ関数を導入している．ここでは詳しく書けなかったが，原著では楕円積分から出発してテータ関数を導いたあと，テータ関数を使って楕円関数や周期を表現しそれらの性質を導いている．

便宜上今日使われているテータ関数を $\vartheta_j(x, \tau)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ とする．すなわち複素数 $x \in \mathbf{C}$ および複素上半平面の点 τ $(\Im\tau > 0)$ に対し $q = e^{\pi i \tau}$ とする．この q について $G(q) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^{2m})$ おき $\vartheta_j(x) = \vartheta_j(x, \tau)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ の定義は以下の通りとする．

$$\vartheta_1(x, \tau) = 2G(q)q^{1/4} \sin x \prod_{m=1}^{\infty}(1 - 2q^{2m} \cos 2x + q^{4m}),$$

$$\vartheta_2(x, \tau) = 2G(q)q^{1/4} \cos x \prod_{m=1}^{\infty}(1 + 2q^{2m} \cos 2x + q^{4m}),$$

$$\vartheta_3(x, \tau) = G(q) \prod_{m=1}^{\infty}(1 + 2q^{2m-1} \cos 2x + q^{4m-2}),$$

$$\vartheta_4(x, \tau) = G(q) \prod_{m=1}^{\infty}(1 - 2q^{2m-1} \cos 2x + q^{4m-2}).$$

τ が明らかなとき，$\vartheta_j(0, \tau)$ を単に ϑ_j と書く．$x \to \vartheta_1(x, \tau)$ は奇関数だが他の ϑ_j $(j > 1)$ は偶関数である．

楕円関数の無限積展開：この本では以後 k は実数で $0 < k < 1$ と仮定している．実の楕円曲線に限るのである．さらに $q = \exp(-\pi K'/K)$ と仮定している（ $q = \exp(\pi i \tau)$ で $\tau = iK'/K, K > 0, K' > 0$ の場合である）．[J] はまた変数 x に対し $u = 2Kx/\pi$ とおき，x, u 双方を自由に使っているがここでもそれに従うことにする．

このような仮定の下で (4) を見ると $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる．一方 $\lambda \to 0$ のとき $\mathrm{sn}(u,\lambda) \to \sin u$ かつ $\Lambda \to \pi/2$ であるから，(7) より $nM \to 2K/\pi, \Lambda'/n \to (\pi K')/(2K)$ $\quad (n \to \infty)$ となる．

そこで (8) の u を u/n で置き換えて，極限 $n \to \infty$ をとると $\mathrm{sn}(u,k)$ は下記 (10) のように表せるというのである．この証明で収束の議論はないけれども結果は正しい．cn, dn も同様である．

$$\mathrm{sn}(\frac{2Kx}{\pi},k) = \frac{2AK}{\pi}\sin x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}} \tag{10}$$

$$\mathrm{cn}(\frac{2Kx}{\pi},k) = B\cos x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}} \tag{11}$$

$$\mathrm{dn}(\frac{2Kx}{\pi},k) = C\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}. \tag{12}$$

ここで

$$A=\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2, B=\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2, C=\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2.$$

(12) で $x=\pi/2$ として $\mathrm{dn}(K,k)=C^2$ だが $\mathrm{dn}(K,k)=k'$ ゆえ $C^2=k'$ を得る．さらに

$$k=4\sqrt{q}\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^4, \quad k'=\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^4 \tag{13}$$

$$\frac{2K}{\pi}=\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-q^{2m}}{1-q^{2m-1}}\right)^2\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2. \tag{14}$$

などを導いているが，これらは $\vartheta_j(x,\tau)$ $(1 \le j \le 4)$ で表すと次のようになる．

$$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(x,\tau)}{\vartheta_4(x,\tau)},\ \mathrm{cn}(u,k)=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(x,\tau)}{\vartheta_4(x,\tau)},\ \mathrm{dn}(u,k)=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(x,\tau)}{\vartheta_4(x,\tau)}, \tag{15}$$

$$k=\frac{\vartheta_2^2(0,\tau)}{\vartheta_3^2(0,\tau)}, \qquad k'=\frac{\vartheta_4^2(0,\tau)}{\vartheta_3^2(0,\tau)}, \qquad \frac{2K}{\pi}=\vartheta_3^2(0,\tau). \tag{16}$$

従って $\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4$ となる．以上の結果は任意の τ $(\Im\tau>0)$ について成り立ち，さらに $\tau \to -1/\tau = \tau'$ なる変換で k, K はそれぞれ k', K' に移ることを注意しておく．

$$\frac{2K'}{\pi}=\vartheta_3^2(0,\tau'), \qquad k'=\frac{\vartheta_4^2(0,\tau)}{\vartheta_3^2(0,\tau)}=\frac{\vartheta_2^2(0,\tau')}{\vartheta_3^2(0,\tau')}. \tag{17}$$

[J] は (13), (14), (16) のような関係式に強い関心を持っていたようで，類似の関係式を多数導いている．とくに楕円積分の周期，モヂュラス k をテータ 0 値で表す (16) は自身 Legendre 宛書簡で「輝かしい成果」と報告している．

[J] は続いて $\sqrt{(1-\mathrm{sn}(u))/(1+\mathrm{sn}(u))}$， $\sqrt{(1-k\ \mathrm{sn}(u))/(1+k\ \mathrm{sn}(u))}$ の無限積表示も求めていて，とくに

$$\sqrt{\frac{1-k\ \mathrm{sn}(u)}{1+k\ \mathrm{sn}(u)}}=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-2q^{(2m-1)/2}\sin x+q^{2m-1}}{1+2q^{(2m-1)/2}\sin x+q^{2m-1}}. \tag{18}$$

は $\mathrm{sn}(u)$ のフーリエ展開への準備になっている．

楕円関数のフーリエ展開： [J] はフーリエの理論を使わず，楕円関数の無限積表示の対数微分からフーリエ級数展開を求めた．

$\mathrm{sn}(u)$ の無限積因子の分子を因数分解すると $1-e^{\pm 2ix}q^{2m}$ が現れ，その対数を $e^{\pm 2ix}q^{2m}$ のべき級数で表す．分母も同様である．そこで $\mathrm{sn}(u)$ の x に関する対数微分をとり，べき級数からくる和と無限積因子からくる和を交換すれば三角級数が現れる．この方法をいろいろな無限積に適用すると，幸い (18) から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log\sqrt{\frac{1+k\ \mathrm{sn}(u)}{1-k\ \mathrm{sn}(u)}}&=\frac{2kK}{\pi}\mathrm{sn}\left(K-\frac{2Kx}{\pi}\right)\\&=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{(2m-1)/2}}{1-q^{2m-1}}\cos(2m-1)x\end{aligned}$$

が得られ，ここで x を $\pi/2-x$ として $\mathrm{sn}(u)$ のフーリエ展開

$$\frac{2kK}{\pi}\mathrm{sn}(u)=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{(2m-1)/2}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)x,\quad (u=\frac{2Kx}{\pi}) \tag{19}$$

を発見している．$\mathrm{cn}(u),\mathrm{dn}(u)$ についても同様である．

(19) の両辺を 2 乗し，右辺に現れる 3 角関数の積をおのおの和で表すと

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\mathrm{sn}^2(\frac{2Kx}{\pi})=\frac{2K}{\pi}\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2E^1}{\pi}\right)-8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2mx \tag{20}$$

$$E^1=\frac{2K}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{dn}^2(\frac{2Kx}{\pi})dx.$$

を得る．このようにして [J] は $\mathrm{sn}(u)$ のべき乗（負べきも込めて）のフーリエ展開をいろいろ求め，また x に 0 や $\pi/2$ などの特殊値を代入して

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}},\quad \log k=\log 4\sqrt{q}+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m q^m}{m(1+q^m)}$$

などを得ている．

べき級数展開　$y = \mathrm{sn}(2Kx/\pi)$ のべき級数展開は $R = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$ とおいて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot R, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 y(1+k^2-2k^2y^2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1+k^2-6k^2y^2)\cdot R, \quad \cdots$$

を次々計算し下記のべき級数展開を求めている．

$$y = \mathrm{sn}(u) = \frac{2Kx}{\pi} - \frac{1+k^2}{3!}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{3!}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)^4 - \cdots. \quad (21)$$

第２種，第３種楕円積分とテータ関数：(20) の両辺を 0 から x まで積分する．関数 $Z(u)$ はそこに現れる項を用いて

$$\frac{2K}{\pi}Z(\frac{2Kx}{\pi}) = \frac{2Kx}{\pi}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E^1}{\pi}\right) - \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^x \mathrm{sn}^2(\frac{2Kx}{\pi})dx \qquad (22)$$

と定義する．定義からこれは次のフーリエ展開をもつ．

$$\frac{2K}{\pi}Z(\frac{2Kx}{\pi}) = 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2mx. \qquad (23)$$

$Z(u)$ は $\mathrm{sn}(u)$ が $u \equiv iK', 2K+iK' \mod$ (周期) で１位の極を持つことから第２種の楕円積分で，例えば次の変換公式を満たす．

$$Z(u) - Z(u+K) = k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(K-u). \qquad (24)$$

つぎに $\mathrm{sn}(u)$ の加法定理から

$$\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2(u-a) = \frac{4\mathrm{sn}(a)\mathrm{cn}(a)\mathrm{dn}(a)\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u))^2}$$

となるが，$\mathrm{sn(u)}' = \mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)$ より

$$\int_0^u \left(\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2(u-a)\right)du = \frac{2\,\mathrm{sn}(a)\mathrm{cn}(a)\mathrm{dn}(a)\mathrm{sn}^2(u)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u))}. \qquad (25)$$

この式の右辺は u に関し１位の極を持つことに注意しておく．そこで関数 $\Pi(u,a)$ は a をパラメータとして

$$\Pi(u,a) = \Pi(u,a,k) = \int_0^u \frac{k^2\mathrm{sn}(a)\mathrm{cn}(a)\mathrm{dn}(a)\mathrm{sn}^2(u)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u))}du \qquad (26)$$

で定義する．この積分は第３種積分である．

以下 $u = 2Kx/\pi$ のほかに $a = 2KA/\pi$ と置き a, A も自由に使うことにする．

$$\left(\text{例} \qquad \Pi(u,a) = \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{k^2\mathrm{sn}(a)\mathrm{cn}(a)\mathrm{dn}(a)\mathrm{sn}^2(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u)}dx \qquad (26')\right)$$

さて (20) の x に $x \pm A$ (u に $u \pm a$) を代入すると

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \{\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2(u-a)\} = 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2mq^m \sin 2mA \sin 2mx}{1-q^{2m}}.$$

を得るが，これを 0 から x まで積分すると (25) より

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2k^2\mathrm{sn}(a)\mathrm{cn}(a)\mathrm{dn}(a)\mathrm{sn}^2(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u)} = \frac{4K}{\pi}Z(a) - 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2mA\cos 2mx.$$

従って

$$\Pi(u,a) = uZ(a) - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{m(1-q^{2m})}\sin 2mA \sin 2mx. \tag{27}$$

ところで

$$-\log(1-2q^{2j-1}\cos 2x + q^{4j-2}) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m(2j-1)}}{m}\cos 2mx$$

ゆえ，(27) は

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\log\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2m-1}\cos 2(x-A)+q^{4m-2}}{1-2q^{2m-1}\cos 2(x+A)+q^{4m-2}} \tag{28}$$

と書ける．同様にして次式を得る．

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)dx = \log\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})}{(1-q^{2m-1})^2}. \tag{29}$$

[J] はここでテータ関数 Θ, H を $\Theta(0)$ は未知として以下のように定義する．

$$\frac{\Theta(2Kx/\pi)}{\Theta(0)} = \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})^2}, \tag{30}$$

$$\frac{H(2Kx/\pi)}{\Theta(0)} = \frac{2q^{1/4}\sin x\prod_{m=1}^{\infty}(1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})^2}. \tag{31}$$

または

$$\Theta(u)=\Theta(0)\cdot\exp(\int_0^u Z(u)du),\quad \int_0^u Z(u)=\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}.$$

このとき (28) は次のようになる.

$$\Pi(u,a)=uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},\qquad Z(a)=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}. \tag{32}$$

関数 Θ, H と ϑ_i $(i=1,2,3,4)$ の関係は以下のようになっている.

$$\Theta(\frac{2Kx}{\pi})=\vartheta_4(x,\tau),\quad H(\frac{2Kx}{\pi})=\vartheta_1(x,\tau),\quad \Theta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}. \tag{33}$$

[J] はこのあと, この本の残りの部分で以下のことを証明している.

(i)　(15) つまり, 楕円関数をテータ関数の比で表している.

$$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{H(u)}{\Theta(u)},\ \mathrm{cn}(u,k)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H(u+a)}{\Theta(u)},\ \mathrm{dn}(u,k)=\sqrt{k'}\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u)}. \tag{34}$$

(ii)　関数 Θ, Z, Π の加法公式

$$\Theta(u+a)\Theta(u-a)=\left(\frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(0)}\right)^2(1-k^2\mathrm{sn}^2(a)\mathrm{sn}^2(u)), \tag{35}$$

$$Z(u)+Z(a)-Z(u+a)=k^2\mathrm{sn}(a)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+a), \tag{36}$$

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)+\Pi(u+v,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\Theta(v-a)\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\Theta(v+a)\Theta(u+v-a)}, \tag{37}$$

を証明している.

(iii)　$\Theta(u), H(u)$ を x に関してフーリエ展開し, Θ と H の関係を出している.

$$\Theta(\frac{2Kx}{\pi}+iK')=iq^{-1/4}e^{-ix}H(\frac{2Kx}{\pi})\quad(\vartheta_1(x)=-ie^{ix+\pi i\tau/4}\theta_4(x+\frac{\pi\tau}{2})).$$

(iv)　$\vartheta_j(x,\tau)$ $(1\le j\le 4)$ で $x\to x+\pi$ および $x\to x+\pi\tau$ としたとき, その変換公式はよく知られているが [J] はこれを Θ, H で求めている. また (33) の $\Theta(0)$ を求め, $u\equiv iK' \mod (2K\mathbf{Z}+2iK'\mathbf{Z})$ で唯一の単純根をもつことなどを明らかにしている.

(v)　変換 $u\to iu$ による $Z(u)$ の変換を求め, そこから

$$\frac{\Theta(iu,k)}{\Theta(0,k)}=e^{\pi u^2/(4KK')}\mathrm{cn}(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')} \tag{38}$$

を証明している. [J] はこの変換を非常に重要視しているのだが, この本では変換 $\tau\to\tau'=-1/\tau$ について書いてはいないからテータ公式かは分からない

(ただし $\tau = iK'/K$). しかし k, k' は τ の関数で k' は k のこの変換による像ゆえこれはテータ公式のはずである. 以下そのことを点検しておこう. 今日よく知られているテータ公式は

$$\vartheta_3(z,\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{z^2/(\pi i\tau)} \vartheta_3(-z\tau',\tau'),\ \vartheta_4(z,\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{z^2/(\pi i\tau)} \vartheta_2(z\tau',\tau')$$

である ([W-W]). ただし $|\arg(-i\tau)^{-1/2}| < \pi/2, \tau' = -1/\tau$. 従って

$$\frac{\vartheta_4(z,\tau)}{\vartheta_4(0,\tau)} = e^{z^2/(\pi i\tau)} \frac{\vartheta_2(z\tau',\tau')}{\vartheta_2(0,\tau')}. \tag{39}$$

この式に $z = ix, \tau = iK'/K$ とし, $u = 2Kx/\pi, 2K/\pi = \vartheta_3^2(0,\tau), 2K'/\pi = \vartheta_3^2(0,\tau')$ さらに

$$\operatorname{cn}(u,k') = \frac{\vartheta_4(0,\tau')}{\vartheta_2(0,\tau')} \times \frac{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2}(0,\tau'),\tau')}{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2}(0,\tau'),\tau')}.$$

そこで $\vartheta_2(z,\tau)$ が z の偶関数であること, および ϑ_3^{-2} の変換公式に注意すれば (38) を得るから, テータ公式はこれを含んでいる.

あとがき　[J] はこの本の出たあとの論文で $\Theta(x) = \theta_4(x), H(x) = \theta_1(x)$ と定義し直し, よく知られた微分方程式

$$\frac{\partial^2\theta_3(x,\tau)}{\partial x^2} = -\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\theta_3(x,\tau)}{\partial\tau}$$

を証明している。また 1838 年の講義ではテータ関数から出発して楕円関数論を展開していて, テータ関数の三重積なども紹介している。ただテータから楕円関数論を構成するとき, 与えられたモヂュラス k に対し (16) を満たす τ の存在が問題で [J] はそれには触れていない。 k が $0 < k < 1$ なる実数のときは容易に証明でき, k が複素数のときはモヂュラー関数の一意化である.

虚数乗法については Mertens 宛書簡の草稿の中に, 素数 p が $p = a^2 + b^2 n$ (n は平方因子を持たない自然数) と書けるとき, 周期の $4p$ 分点 ω に対して $1/M = a + ib\sqrt{n}, x = \operatorname{sn}(u), y = \operatorname{sn}(a+ib\sqrt{n})u$ の成り立つことを伝えている。しかし λ の k に対する関係 (アーベル) はない.

[J]: Jacobi 全集　vol 1.
[L]: Le Gendre, Memoire sur les transcendantes elliptiques.
[W-W]: Whittaker-Watson, Acourse of Modern Analysis.