確率過程論における調和解析

飛田 武幸
名城大学

0. はじめに。

調和解析 (harmonic analysis) 或いは一般調和解析 (generalized harmonic analysis) という言葉の正確な定義は問わないことにして、大まかに言って、関数に内在する普遍性とか周期性のような規則性などを表に取り出して、関数や関数族の性質を調べたり、それを利用した解析を展開することとでも言えようか。このとき周期性とか、変換群の理論を駆使することが期待されている。狭くはフーリエ解析の一般化と見られてもいるようだ。

Harmonic analysis が代数学 (群論) に深くかかわっていることについて、思いだされる名前に

Stochastic analysis, Geometric analysis, Algebraic analysis, Analytic number theory

などがある。Analysis の懐の深さが表れているようだ。

とにかく、先入観による枠をはめずに、変換群を意識しながら、関係する解析について、昔はどう考えたか、そして現在にどうつながるかを考えてみよう。特に、確率解析に向かって話を進める。

出発点は複素数である。複素数の持つ解析への底力が認められ始めたのは、１７世紀も終わりに近い頃と考えられる。複素変数の偉大さは公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

に象徴されよう。高木貞治先生は変数を複素数にしたことで**微積分に魂が入った**と表現されたのは名言であろう。

１８世紀に入ってフーリエ解析が始まり、フーリエ級数、フーリエ変換などの理論が進むにつれて、変換群が姿を見せ始めた。後に (1950 年代) 出た Gel'fand などの解説を見ると、面影が見えてきて、納得させられることが多い。

途中は疾走して、遂には確率解析にたどりつくのが目的であるが、橋渡しを次の３人の碩学に委ねることにしよう。

Paul Lévy (1886 – 1971)
Norbert Wiener (1894 – 1964)
Solomon Bochner (1899 – 1982)

1. P. Lévy の調和解析　次の２点 1a, 1b を取り上げる。

1.a. 関数解析と無限次元回転群

著書　Leçons d'analyse fonctionnelle.　Gauthier-Villars, 1922
の第 III 部に、無限次元回転群 discrete な version が登場する。それが本質的に関数解析と結びつくところに意義がある。

これについて、またいわゆる Lévy Laplacian について 1950 年頃までの成果をまとめたものは、彼の

Problèmes concrets d'analyse fonctionelle. Gauthier-Villars. 1951

に詳しい。

今日 **Lévy group** と呼んでいるものは、完全正規直交系、すなわち座標の入れ替えに、若干条件をおいたものであるが、関数解析と（したがってホワイトノイズ解析と）関連づけるため、直交系に equally dense とか normally dense などの条件を置いている。
Levy group は無限次元回転群の重要な部分群であり、Laplacian のみならず、無限次元調和解析で大きな役割を果たしている。

1.b. 特性関数

確率分布の特性関数は分布のフーリエ変換といってよかろう。
著書　Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937.
は説明するまでもない。 Homogeneous Lévy process にとき、process の特性(汎)関数が重要になることも周知である。一方
著書 Processus stochastiques et movement brownien. Gauthier-Villars. 1948
において、確率過程の定義に一つの章を割いているが、主要な一つの方法は**同時分布**によるもの（Slutsky の方法、Actualites Sci. et ind. No.738 (1938), 33-55）である。Bochner の観点からすれば、そこで自然にフーリエ変換、すなわち特性汎関数が従うことになる。因みに、もう一つは **innovation** あるいは stochastic integro-differential equation の方法である:

$$\delta X(t) = \phi(t, dt, X(s); s \leqq t, \ \xi, \eta, \ldots)$$

これは 1953 年になって stochastic infinitesimal equation となって現れる。

[註]　注意したいことは、確率解析に対する、彼の立場である。ヒルベルト空間的手法は随所に（特にガウス過程の場合に）見られるが、より重要なことは、**見本関数**に関する取り扱いである。主眼はここにあった言えるであろう。決して ω を使わなかったことは深い意味を持っていたに違いない。確率過程の定義の仕方をみても想像することができる。

2. N. Wiener の harmonic analysis.

Wiener の数学には調和解析に関連する著書・論文が数多くある。中でも、ここで取り上げたいものを列挙すれば、

1) Generalized harmonic analysis. Acta Math. 55 (1930), 117-258.
2) The Fourier integral and certain of its applications. 1933. Cambridge.
3) Fourier transforms in the complex domain. With R.E.A.C. Paley. American Math. Soc. Colloqu. Pub. 1934.
4) Extrapolation, interporation, and smoothing of stationary time series. The MIT Press, 1949
5) Cybernetics. 1948, 邦訳 1962.
6) Nonlinear problems in random theory. 1958.
7) Norbert Wiener: Collected Works. Vol.II, ed. P. Masani. The MIT Press, 1979.

7) は次の２篇からなるが、この volume には調和解析に関係した論文が、人々のコメント（参考になるものもある）とともにおさめられている。

I D. Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theory.

I E. Classical Harmonic and Complex Analysis.

晩年、P. Masani の協力があったことに注意したい。

これら以前の Tauberian Theorem に関連するものをいれて拡大解釈すれば、際限がなくなってしまうので、それらは省略する。・

Wiener のいう random function は主として、ブラウン運動の汎関数である。極めて具体意的に、区間 [0,1].の上の Lebesgue 測度を用い、Fourier 展開でブラウン運動を構成し、そこでの flow {T t} のエルゴード性を直接示している。

さらに、ブラウン運動の線形関数で表される、ガウス過程 X(t) についてもエルゴード性を述べているが、注目したいのは、その見本関数の取り扱いを重視していることである。

さらに、現在ではあまり注目されないが、t を複素数 z にして、ある種の領域を動かし、見本関数の性質、たとえば 0 点の個数を調べて、調和解析（見本関数についての）の一環としている。見直されてもよいことであろう。

ここでは、上の Wiener による諸文献のうち、今回の話に関連するものの中からいくつか選んで、アイデイアを推察したい。

1) について。 調和解析に関する Wiener の初期の労作である。そこでは orbit とか path など、また white light, noise, coherent and incoherent noise についての解析、さらには純粋数学の課題として、Plancherel の定理などフーリエ解析の課題として論じている。
確率過程の見本関数（path）を扱うたちばからフォローすることは意義深い。

3) について。フーリエ解析のいくつかの特論に続いて white light の扱いも含めた一般調和解析に続いて、最後の 2 章は random function への応用になっていて、興味深い確率過程論の話につなげている。

4) について。目的は時系列統計論と情報通信とを連合させることであると著者は述べている。当然そこには確率論が背景にある。実際に起こった一つの事象は起こりうる膨大な事象の集合（ensemble）を想定する。そういった事象の subclass にはウエイトすなわち確率がきまる。このような確率の厳密な数学理論は測度論特にルベーグ測度論による。統計的方法、たとえば時系列について将来の値の予測、その予測値である答が一定の範囲にある確率、あるいはある正の値をとる関数の平均、またはその答に含まれる誤差などが問題である。
　結局、時系列の統計的理論は、個々のサンプルだけで終わる話ではなくて、その時系列の分布であり ensemble の話である。この立場から時系列について、その最良予測の問題を論ずるが、generalized harmonic analysis の立場から linear predictor や filter を構成している。

6) について。ここでも 1) の精神が十分活かされていることに注意する。確率積分も確率測度によるものではなくて、個々の見本関数について部分積分によって定義している。
Lecture 5 – 7 は Frequency modulation (FM) problems に宛てられているが、ホワイトノイズ（ブラウン運動）の非線形関数の扱いであり、ここでも調和解析の立場が見られる。
Lecture 10, 11 は非線形 network の具体的な構成法を述べているが、まさに無限次元の調和解析の具現化である。

7) は、この方向に対する Wiener の思想を追うのに好都合である。特に 1930 前後の論文に注目したい。

3 . S. Bochner の調和解析と確率解析。

Princeton での episode。フーリエ解析から Lie 群のユニタリ表現の philosophy についての私的会話は Bochner の論文の理解を助けた。

Moving Bochner

解析学におけるフーリエ解析の重要性を強調し、ユニタリ表現論にまで及ぶ。

参考文献

1) Stochastic processes. Ann. Of Math. 48 (1947), 1014 – 1061.

2) Harmonic analysis and the theory of probability. Univ. of California Press. 1955.

3) Subordination of non-Gaussian stochastic processes. Proc. National Acad. Sci. 48 (1962), 19 –22.

4) The role of mathematics in the rise of science. Princeton Univ. Press. 1966.

1) について。タイトルは確率過程であるが、分布の特性関数などフーリエ解析を駆使した内容の論文で、労作というにふさわしい。確率過程の定義も同時分布によるアイデイアを発展させたものといえる。

2) フーリエ解析から始まるが、十分確率過程論を意識した設定になっている。Infinitely subdivisible process, subordination of Markov processes など、この著者固有の内容が盛り込まれ興味は尽きない。

3) homogeneous な Lévy 過程の分布を決める ϕ-function を $\phi(z)$ とかく。第一の過程について

$$\exp[-t\phi(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d_x F(t,x), \quad t > 0, \qquad d_x F(t,x) = 1.$$

とし、第二の過程については

$$\exp[-t\tilde{\phi}(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, d_x G(t,x)$$

とする。第二の過程が第一の過程に **subordinate** するとは

$$\tilde{\phi}(z) = c\ \phi(z) + \int_{+0}^{\infty} (1 - e^{-t\phi(z)}) d\sigma(t)$$

となるときである。ただし $c > 0$, σ は適当な条件をみたす測度である。

これは random な time change にあたり、次節の無限次元回転群における whisker の一般化ともみることができよう。

4. 無限次元回転群により導かれるホワイトノイズ調和解析

核型空間 E の回転群を O(E) とかく。Adjoint のなす群 O*(E*) はホワイトノイズ測度を不変にする。ここから調和解析が生まれる。

Diagram

G. Finite dimensional harmonic analysis

$$L^2(S^d) = \bigoplus H_n, \quad S^d = SO(d+1)/SO(d).$$

Hyper function on S^d,

Lie group $SO(d+1)$ and spherical Laplacian Δ_d,

Peter-Weyl theorem

Irreducible unitary representation of $SO(d)$ on H_n.

Fourier series

I. Hyper-finite dimensional analysis

$$(L^2) = \bigoplus H_n.$$

white noise functionals = functions on $S^\infty(\sqrt{\infty})$.

Laplace-Beltrami operator Δ_∞; number operator N

irreducible class 1 representation of G_∞ of class 1

Fourier-Wiener transform; T- and S-transform and integral representation

Complex white noise, holomorphic functionals

II. Infinite dimensional analysis

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*.$$

$$(L^2)^+ \subset (L^2) \subset (L^2)^-.$$

Generalized functionals: CKS space.

Volterra (Gross) Laplacian Δ_V.

Characterization of (S) and $(S)^*$.

Lévy group, Lévy Laplacian Δ_L.

Windmill subgroup, time change group.

Kuo's Fourier-Mehler transform, Gauss kernel.

creation ∂_t^*, annihilation ∂_t and rotation $\gamma_{s,t} = \partial_s^* \partial_t - \partial_t^* \partial_s$.

Whiskers: One-parameter subgroups that come from the diffeomorphisms of parameter space. Spectral representation, flows and ergodic property, tools for variational calculus.

Whiskers describe reversible and/or irreversible properties. Semigroups also introduced.

Development to path integrals: generalization to quantum fields.

Application to noncommutative geometry.

Average power: essentially infinite dimensional

Remark Floor II can not be approximated by the *finite* dimensional analysis under the natural topology.

III. Ultra infinite dimensional analysis

Bridge to quantum probability.

Random field $X(C)$ living in $(S)^* \longrightarrow U(C, \xi)$.

Hadamard equation.

Quantum field — gauge field, electro-magnetic field, etc.

Tomonaga-Schwinger equation.

Whiskers g_t come from the group of diffeomorphisms of R^d, and ψ_t acting on R^d. New various kind whiskers (half whiskers) have been discovered. New applications

Whiskers help to form innovation. Examples. the conformal group; the ergodic property, and others

Irreducible unitary representation, reversibility/irreversibility.

Remark The IIIrd floor includes all of those that are essentially infinite dimensional and are not to be listed in lower floors.

5. Second order processes.

Linear theory について。

K. Karhunen, Über die Struktur stationäre zufälliger Funktionen. Arkiv för Mathematik. Band 1 nr.13 (1950), 141-160.

これは当時の決定版であった。特に、平均連続で純非決定的な定常過程のスペクトル測度は絶対連続で、その密度関数 f(λ) の factorization を、この場にあわせて具体的に与えていて引用に好都合である。

H. Cramer, Half a century with probability theory: Some personal recollections. Ann. of Probability. 4 (1976), 509-546.

当時の 2nd order process に対する総合報告として、対象は限られてはいるが、興味深い。

[文献追加]

[1] U. Grenander ed., Probability and statistics. H. Cramer Volume. Almqvist & Wiksell, John Wiley & Sons. 1959.

[2] T. Hida, Statonary stochastic processes. Princeton Univ. Press. 1970.

[3] T. Hida and Si Si, An innovation approach torandom fields. Application of White Noise Theory. World Scientific Pub. Co. 2004.

おわり