Schur の学位論文および対称群の表現

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

1．問題意識．シュアー（J. Shcur = I. Schur, 1875-1941）の学位論文は，３巻の全集の第１論文として掲げられている：

[**S1**] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (1901 年 Berlin における Inaugural-Dissertation (博士論文)), Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

この学位論文を，主査であった師のフロベニウス（F.G. Frobenius, 1849-1917）はその審査報告に於いて激賞している（cf. [TH], Part VI, Chapter 10, p.403）とのことであるが，それにも拘わらず，少部数が印刷配布されただけで，雑誌に発表されることはなかった．その間の事情を知りたい，という興味が１つ．

さらに，筆者が $GL(n, \boldsymbol{C})$ や古典群 $SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(2n, \boldsymbol{C})$, の表現論を勉強したのは，論文によってではなく，成書によってであり，主として次の２冊を勉強して，指標公式・次元公式を学んだのである：

[**HW**] H. Weyl, *Classical Groups. Their Invariants and Representations*, 2nd edition, Princeton, 1946.
[**岩堀**] 岩堀長慶，対称群と一般線形群の表現論　—既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解—，岩波講座 基礎数学，1978.

そこで，あらためて歴史的な原論文に直接当たってみて，この学位論文の内容や意味そのものについて検討したい，というのがこの小論の目的である．

2．学位論文とその後の事情．この論文の主たる内容（というか目的というか）は，現代風にまとめると，$GL(n, \boldsymbol{C})$ の正則な既約表現と対称群の既約表現の対応（今日これを Schur-Weyl の双対とよぶ）を与えて，前者を分類することである．しかし，それはある重要な制限的仮定の下に取り扱われている（後述の「主仮定」）．その制限をはずして一般的な命題を提示する論文を書く予定であったのが，（現実には二十数年も）その実行が遅れたのであろうと筆者は推察する．

学位論文の 12 年後，この論文のことは知らずに，É. Cartan (1869-1951) は，下記の３部作の論文のうちの [C1] において，

「$\boldsymbol{C}$ 上の半単純リー環の全ての有限次元既約表現をその最高ウェイトを用いて分類した.」

（また，この３部作の [C2] においては，実半単純リー環の分類を行い，[C3] では，それらのリー環の有限次元既約表現を分類する方法を与えた.）

[**C1**] E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bulletin des sciences mathématiques*, **41**(1913), 53-96.

[**C2**] E. Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, *Annales scientifiques École Normale Supérieure Paris* **(3) 31**(1914), 263-355.

[**C3**] E. Cartan, Les groupes projectifs continus réels qui ne laisseent invariante aucune multiplicité plane, *Journale des sciences mathématiques pures et appliquées*, **10**(1914), 149-186.

[**C4**] E. Cartan, Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl, *Journale des sciences mathématiques pures et appliquées*, **(2) 2**(1923), 167-192.

1923 年に H. Weyl (1885-1955) は，カルタンから送られてきた論文 [C4] の別刷によって，カルタンの仕事 [C1] ～ [C3] の存在を知り，これを研究した．このリー環の表現論は infinitesimal form ともいうべきものであり，ワイルはリー群の表現論（global form）へと進んでいったのである（[平井 1], II, 閑話休題 23, pp.449-450, 参照）.

1924 年にワイルは，特殊線形群 $SL(n, \boldsymbol{C})$ の有限次元（正則）表現が完全可約であることを証明した．さらに，この結果が他の古典群 $SO(n, \boldsymbol{C}), Sp(2n, \boldsymbol{C})$ にも拡張可能であることを認識していて，[W1] の別刷と [W2] の原稿のコピーとを送るとともにシュアーに手紙を書いた．シュアーはその当時，回転群 $SO(n, \boldsymbol{R})$ および全直交群 $O(n, \boldsymbol{R})$ について，既約表現の次元公式を得て，$O(n, \boldsymbol{R})$ に対する指標公式も与えていた（下の [S1924] 参照）．ワイルへの返事には，学位論文 [S1] や [S1924] における自分自身の方法などについて述べた．この後のワイルからの返事を公式文書化したのが [W3] である．ワイルはこれらの文通から重要なヒントを得て，彼の有名な３部作 [W4] に短時間のうちに到達した．それはカルタンの仕事 [C1] ～ [C3] を前提としている.

[**W1**] H. Weyl, Über die Symmetrie der Tensoren und die Tragweite der symbolischen Methode in der Invariantentheorie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **48**(1924), 29-36.

[**W2**] H. Weyl, Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung, *Göttingen Nachrichten 1924* (1924), 218-224.

[**W3**] H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen

Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur), *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924* (1924), 338-345. [A letter to Schur dated 28 November 1924, which Schur requested for publication]

[W4] H. Weyl, Theorie der Darstellung der halbeinfachen Gruppen durch lineare Transformationen. I–III, *Mathematische Zeitschrift*, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-374; **24**(1926), 377-395.

シュアーは，上記のワイルの仕事に触発されて，あらためて学位論文のテーマに戻り，そこでの方法を敷衍して，[S1927] では制限条件無しで，一般線形群 $GL(n, \boldsymbol{C})$ の多項式表現に対して，既約表現の次元公式および指標公式を証明した．[S1928] では，この群の連続表現を研究した．

[S1924] I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924* (1924), 189-208; II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare Transformationen, *ibid.* (1925), 297-321; III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen, *ibid.* (1925), 346-355.

[S1927] I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1927* (1927), 58-75.

[S1928] I. Schur, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1928* (1928), 100-124.

３．学位論文 [S1] の構成．内容の検討に入る前に，学位論文の外形的な面を検討してみよう．

論文本体は 70 頁で，導入部と Abschnitt I～VIII とよりなる．p.71 に学歴があり，p.72 に Thesen I～IV と Opponenten（反対討論者）３人のリストがある．より細かい頁数を見ると次のリストになる．

注記： p.71 の履歴書（Lebenslauf）の第 1 節は,「私，Issai Schur, は 1875 年 1 月 10 日にロシアのドニエプルに於いてユダヤ教徒として生まれ，学校教育は…」と書かれている．続いて大学以降のことが書いてある．この履歴書の中で，何故ユダヤ教徒と書く必要があったのか，よく分からない．もう一つ分からないことは，名前である．彼の初めの頃の数編の論文の著者名では，Von Herrn J. Schur in Berlin となっていて，I. Schur ではない．改名したのだろうか（[平井 1], I, p.216, 参照）

章 (Abschnitt)	節	頁	命題 (Satz)
導入部		1 – 3	
I	§§1 – 2	3 – 9	I – IV
II	§§3 – 7	9 – 16	V
III	§§8 – 13	16 – 28	VI
IV	§§14 – 17	28 – 36	VII – IX
V	§§18 – 28	36 – 52	X – XIII
VI	§§29 – 30	52 – 57	XIV
VII	§§31 – 34	57 – 65	XV, XVa, XVI
VIII	§§35 – 37	65 – 70	

4．学位論文 [S1] の内容． 章を追ってその内容を要約する．森鴎外や夏目漱石より少し若い世代のシュアーの用語は当然時代的な古みを帯びているが，そのほかにも同時代のフロベニウスの用語とも微妙に食い違っている．それはやはりシュアーの問題意識がそうさせているのであろうから，その点に留意してドイツ語のままの用語を直接引用することもある（英語や日本語に翻訳してしまうと大事なニュアンスが消えてしまう）．

導入部： $M(m,\boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{C}$ 上の m 次正方行列の全体とする．正則な行列全体の集合 $GL(m,\boldsymbol{C})$ は m 次の一般線形群である．写像

$$T\,:\,M(m,\boldsymbol{C})\ni A\to T(A)\in M(r,\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

で次の２条件を満たすものを考察の対称とする：

① 行列 $T(A)$ の各要素はすべて $A=(a_{ij})$ の要素の多項式である；

② $$T(A)T(B)=T(AB)\quad\big(A,B\in M(m,\boldsymbol{C})\big).$$

• 行列 $T(A)$ を eine A gebildete *invariante Form* または *invariante Matrix* という．

• A を $T(A)$ に写す der Prozess der Bildung を eine *invariante Operation* という．

（ここでいう *invariant* は不変というより共変という意味にとれる．この用語に Hurewitz の不変式論からの影響が見て取れる．）

• $T(A)$ の各要素が a_{ij} の n 次同次式であるとき，n を T の die Ordnung という．このとき，T に対して，eine *Darstellung* der symmetrischen Gruppe n-ter Grades *durch lineare Substitutionen*（$\mathfrak{S}_n$ の線形表現）が１対１に対応する．

第 I 章： E_m を m 次の単位行列とする．関係式 $T(xE_m)T(yE_m)=$

$T(xyE_m)$ $(x, y \in \boldsymbol{C})$ から，$T(xE_m)$ が同時対角化可能であることが分かる．記号 $\sim$ を‘共役’の意味に使うと，$T(xE_m) \sim \mathrm{diag}(x^n E_{r_0}, x^{n-1}E_{r_1}, \cdots)$ （ブロック型対角行列）となる．ついで，$T(xE_m)T(A) = T(A)T(xE_m) = T(xA)$ から，

$$T(A) \sim \mathrm{diag}(T_n(A), T_{n-1}(A), \ldots, T_1(A), T_0(A), S(A)) \quad \bigl(A \in M(m, \boldsymbol{C})\bigr),$$

ここに，$T_\nu(A)$ は各要素が a_{ij} の ν 次同次式となっている正方行列で $T_\nu(E_m) = E_{s_\nu}$，$S(A) = 0_s$ （s 次零行列），$s_n + s_{n-1} + \cdots + s_0 + s = r$.

従って，今後は各 T_ν を調べればよい．このとき，$T_\nu(A^{-1}) = T_\nu(A)^{-1}$ であるから，$A \to T_\nu(A)$ は $GL(m, \boldsymbol{C})$ の s_ν 次の線形表現（行列表現）である．しかし，シュアーは（フロベニウスの術語である）Darstellung を用いずに，homogene invariante Form ν-ter Ordnung と呼ぶ．$GL(m, \boldsymbol{C})$ と $M(m, \boldsymbol{C})$ との違いを気にしているのであろうか.

今後，ν を n で代表させて，T_n を調べる．得るべき結果は,

（イ） der Grad（次元）der primitiven invarianten Form;

（ロ） die Spur（指標）der primitiven invarianten Form（フロベニウスの用語では Charakter．ここには対称群 $\mathfrak{S}_n$ と $GL(m, \boldsymbol{C})$ との相関関係が現れる）.

(I-1) $X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = \mathrm{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in M(m, \boldsymbol{C})$ ととると，$T(X)T(Y) = T(XY)$ より，$T(X)$ は同時対角化可能.

(I-2) $A \in M(m, \boldsymbol{C})$ が対角化可能ならば，$T(A)$ は対角化可能.

(I-3) $A \sim \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ とすると，ω_j は A の特性根（charakteristischen Wurzeln der Matrix A）である．（この用語に倣って？）$\mathrm{Spur}\bigl(T(A)\bigr)$ を die *Charakteristik* der invarianten Operation $T(A)$ と呼ぶ．これは，T を $GL(m, \boldsymbol{C})$ の線形表現と思えば，その指標（Charakter）である.

第 II 章：　ここでは基本的な交代テンソル，対称テンソルを考察する.

(II-1) A の n 次交代テンソル（die n-te Determinantentransformation der linearen Substitution (A)）を C_nA と書く．必然的に $n \leq m$ である．その Charakteristik を c_n と書くと，A の特性根を $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ とすると,

$$c_n = c_n(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m} \omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\omega_{i_n}. \qquad (2)$$

(II-2) A の n 次対称テンソル（die n-te Potenztransformation der linearen Substitution (A)）を P_nA と書く．その Charakteristik を p_n と書くと,

$$p_n = p_n(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n} \omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2}\cdots\omega_m^{\alpha_m}. \qquad (3)$$

第 III 章： $T(A) = T_n(A)$ であるから，a_{ij} の n 次式として $r \times r$ 型定数行列を係数として次のように展開される：

$$T(A) \;=\; \sum_{(\kappa,\lambda)} \begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix} a_{\kappa_1\lambda_1}a_{\kappa_2\lambda_2}\cdots a_{\kappa_n\lambda_n}, \quad \begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix} \text{ は } r\times r \text{ 行列,} \tag{4}$$

ここに，$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ は $\{1, 2, \ldots, m\}$ の数字の列．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の作用は，$\sigma(\kappa) := (\kappa_{\sigma^{-1}(1)}, \kappa_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, \kappa_{\sigma^{-1}(n)})$ であり，

$\begin{bmatrix}\sigma(\kappa)\\ \sigma(\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$．$\begin{pmatrix}\kappa_i\\ \lambda_i\end{pmatrix}$ の置換を考えて，$\begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}$ の個数は $\begin{pmatrix}m^2+n-1\\ n\end{pmatrix}$.

$X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ のとき，$T(X)$ を対角化しておく．単項式 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ に対応する行（Zeile）の集合を $Z_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$，列（Spalt）の集合を $S_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ とし，それらの個数を $r_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ とする．

(III-1) $A \sim \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$ のとき，die Charakteristik der Operation $T(A)$ は次になる：

$$\Phi(A) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} r_{n_1,n_2,\ldots,n_m}\omega_1^{n_1}\omega_2^{n_2}\cdots\omega_m^{n_m} \tag{5}$$

(III-2) $T(A)$ の行列要素は，$\sum_{(\kappa,\lambda)} C_\lambda^\kappa \boldsymbol{a}_{\kappa,\lambda}$，の形である．ここに，$C_\lambda^\kappa$ は非負整数であり，$\boldsymbol{a}_{\kappa,\lambda} := a_{\kappa_1\lambda_1}a_{\kappa_2\lambda_2}\cdots a_{\kappa_n\lambda_n}$.

(III-3) 関係式 $T(A)T(B) = T(AB)$ より，

$$\sum_{\kappa,\mu,\nu,\lambda} \begin{bmatrix}\kappa\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\\ \lambda\end{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\kappa,\mu}\boldsymbol{b}_{\nu,\lambda} = \sum_{\kappa,\mu,\lambda} \begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\kappa,\mu}\boldsymbol{b}_{\mu,\lambda}. \tag{6}$$

他方，$\boldsymbol{b}_{\sigma(\mu),\sigma(\lambda)} = \boldsymbol{b}_{\mu,\lambda}$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ であるから，上式の両辺を比較して次の関係式を得る：

$$\begin{bmatrix}\kappa\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\\ \lambda\end{bmatrix} = \sum_{\lambda'} C_{\nu,\lambda'}^{\kappa,\mu} \begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda'\end{bmatrix}, \tag{7}$$

ここに，$C_{\nu,\lambda'}^{\kappa,\mu}$ は非負実数であり，$(\nu, \lambda') = (\sigma(\mu), \sigma(\lambda))$ $(\exists\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ 以外の場合は，$C_{\nu,\lambda'}^{\kappa,\mu} = 0$.

これ以後は，ずっと行列 $\begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}$ を取り扱う．従って，係数 $C_{\nu,\lambda'}^{\kappa,\mu}$ を取り扱う．ところが，この係数の複雑さは大変なものなので，ここで，この論文を支配する大前提として次の仮定をおく．

（主仮定） $n \le m$

この仮定は，$GL(m, \boldsymbol{C})$ のテンソル表現 $A \to \otimes^n A$ を考えるときに，テンソルを取る回数 n が m を超えない，ということを意味するから，非常な制限である．この仮定を満たさない $n > m$ の場合については，ようやく §§32–33（第 VII 章）において実質的なコメントがされ，方針が示される．しかし，それは普通の数学者にとっては,「次元公式・指標公式がこの場合にも成立する」という単なる宣言を出るものではない．

さて，$n \le m$ と仮定すると，関係式 (6) の一部として次の有用な等式が得られる．(6) において，$[\kappa] := \{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n\}$ とおくとき，$[\kappa] = [\lambda] = [\mu] = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \le m)$ の場合に見ると，(6) の両辺の対応する項では，

$$\begin{bmatrix}\kappa\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\ \lambda\end{bmatrix} = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}. \tag{8}$$

そこで，$\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換として，$\kappa_i \to \mu_i\,(1 \le i \le n)$ で決まるものを $\sigma(\kappa, \mu)$ と書き，r 次の正方行列 $n!\begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}$ を考えると，これは $\sigma(\kappa, \mu)$ によって決まるので，$\pi(\sigma(\kappa, \mu))$ とおく．すると，(8) は $\pi(\sigma)\pi(\sigma') = \pi(\sigma\sigma')$ $(\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n)$ を意味する．一般に $\pi(\sigma)$ は可逆ではないが，適当に零部分を取り去って可逆部分を残せば，$\mathfrak{S}_n$ の表現 π' が得られる．これを zu der invarianten Operation $T(A)$ gehörende Darstellung der symmetrischen Gruppe n-ten Grades と呼ぶ．

正方行列 $n!\begin{bmatrix}\kappa\\ \lambda\end{bmatrix}$ の Spur から（フロベニウスによる）π' の指標（Charakter）$\chi(\sigma) = \mathrm{Spur}\big(\pi'(\sigma)\big)$ を得る．これらや (7) に関する詳しい議論をして，$\Phi(A)$ の表示式 (5) における係数 $r_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ を $\chi(\sigma)$ を用いて書く．そして，(4) 式を用いて，$\chi(\sigma)$ による $T(A)$ の Charakteristik $\Phi(A) = \mathrm{Spur}\big(T(A)\big)$ の表示式を得る．次元 $\dim \pi'$ との関係も出る．

実際，簡単だが基本的な ν 次対称テンソル $P_\nu A$ の場合に，その Charakteristik p_ν の表示式は，$s_\nu = \omega_1^\nu + \omega_2^\nu + \cdots + \omega_m^\nu$ とおくと，関係式 $\nu p_\nu = s_1 p_{\nu-1} + s_2 p_{\nu-2} + \cdots + s_\nu p_0$ $(p_0 = 1)$ により，下の (9) となる：

$$p_\nu = \sum_{\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + \nu\mu_\nu = \nu} \frac{1}{\mu_1!\mu_2!\cdots\mu_\nu!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\mu_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\mu_2}\cdots\left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\mu_\nu}, \tag{9}$$

$$s_\nu = \nu \sum_{\mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + \nu\mu_\nu = \nu} (-1)^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu - 1}\frac{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu - 1)!}{\mu_1!\mu_2!\cdots\mu_\nu!} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_\nu^{\mu_\nu}.$$

これを用いて一般の‘**指標公式**’が（$n \le m$ の下に）得られる：

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} r_{n_1,n_2,\ldots,n_m}\omega_1^{n_1}\omega_2^{n_2}\cdots\omega_m^{n_m} \\ &= \sum_{\alpha}\frac{\chi(\sigma_\alpha)}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}. \qquad (10)\end{aligned}$$

ここに，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ は，非負整数の列で $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\dot{\alpha}_n = n$ を満たすものを動く．σ_α は，互いに素な，長さ 1 の cycle が α_1 個，長さ 2 の cycle が α_2 個，⋯，長さ n の cycle が α_n 個，に分解される置換を表す．

そして，本章と次章によって次の命題が示される．

命題：$T(A)$ と上の $\mathfrak{S}_n$ の表現 π' とは，1 対 1 に対応する．

この命題の前半部分「$T(A) \to \pi'$ の対応」は，本章 Satz VI (p.28) で示される，すなわち，「$T(A) \to \pi', T_1(A) \to \pi'_1$ とすると，$\pi \cong \pi'_1$（同値）となる必要十分条件は，$T(A), T_1(A)$ の Charakteristik が一致することである」．

(因みに，フロベニウスの「有限群の指標と表現」に関する研究は，全集の論文番号で，**53**(1896) から始まり，**75, 76**(1906) (Schur との共著) まで 13 編ある（[平井 2] 参照）.)

第 IV 章：上の命題の後半部分「$\mathfrak{S}_n$ の表現から出発する逆の対応」が，Satz VII (p.32), Satz VIII (p.89) で示される．

また，Satz IX (p.89) では，$T(A)$ の**完全可約性**を，$\mathfrak{S}_n$ の表現の完全可約性をもとにして示される．

第 V 章：既約な $T(A)$ の指標（die Charakteristik der irreduktiblen invarianten Operation）を具体的に求めて，指標公式を与える．

交代テンソル $C_{\kappa_i}A$ $(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\rho = n, \kappa_i > 0)$ のテンソル積

$$C(A) := C_{\kappa_1}A \otimes C_{\kappa_2}A \otimes \cdots \otimes C_{\kappa_\rho}A$$

の Charakteristik は $c_{\kappa_1}c_{\kappa_2}\cdots c_{\kappa_\rho}$ である．κ_i のうち，1 が α_1 個，2 が α_2 個，⋯，τ が α_τ 個，とし，

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots, \lambda_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots, \lambda_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots, \ldots,$$

とおく．$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\tau = n$, $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_\tau > 0$, である．各 c_{κ_i} に (2) 式を代入してみれば分かるように，(ガウスの）辞書式順序で最大の単項式 $\omega_1^{\lambda_1}\omega_2^{\lambda_2}\cdots\omega_m^{\lambda_m}$ がただ 1 つあって，その係数は 1 である．$C(A)$ を既約

成分に分けると，この最高の項を含むものがただ1個ある．これを $T_\lambda(A)$ と書き，その Charakteristik を $\Phi_\lambda(A)$ と書く．ここに，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\tau)$. そこで，$c_\nu$ 達と (3) 式の p_n 達との関係を付けるのに，表示式

$$c_\nu=\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+\nu\alpha_\nu=\nu}\frac{(-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\cdots}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\cdots}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu} \tag{11}$$

を用いる．この右辺は，(9) の p_ν の表示式において，s_μ に $(-1)^{\mu-1}s_\mu$ を代入したものと等しい．

$$Q_{ij}:=p_{\lambda_i-i+j}\qquad(1\le i,j\le\tau), \tag{12}$$

とおくと，Charakteristik $\Phi_\lambda(A)=\mathrm{Spur}\big(T_\lambda(A)\big)$ は次式で与えられる：

$$\Phi_\lambda(A)=\det(Q_{ij})_{1\le i,j\le\tau}=\left|p_{\lambda_i-i+j}\right|. \tag{13}$$

この**指標公式**は大前提 $n\le m$ の下で得られているが，その証明は単に簡単な具体例で説明しているに過ぎず，現代的批判には耐えられない．しかし，公式自体は，形式的には，$n>m$ の場合にも結果として成立する．こうしたことは，シュアーが真に天才であることの証左であろうか？

（**注**：ワイルによる指標公式の証明は成書 [HW] においても，コンパクト古典群 G 上の不変積分をカルタン部分群 H 上の積分と G/H 上の積分に（極座標）変換する積分公式の証明は，直観的なものであって，現代風な証明ではない.）

上の指標公式は，A の特性根 $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m$ を直接用いた行列式の（ワイルの分母による）商の形のいわゆる‘ワイルの**指標公式**’にも書き直されている．また，**次元公式**も（形式的には）一般な形で得られている．

第 VI 章以下は省略する．

謝辞： 津田塾大学 数学・計算機科学研究所における数学史シンポジュウム，第 12 回 (2001)，第 13 回 (2002)，および今回（第 14 回）において講演する機会を与えていただいた杉浦光夫先生に厚く感謝の意を表する．

[TH] Thomas Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups,* An Essay in the History of Mathmatics 1869–1926, Springer, 2000.

[平井 1] 平井 武，線形代数と群の表現，I, II, 朝倉書店，すうがくぶっくす **20, 21**, 2001.

[平井 2] 平井 武，対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第 13 回数学史シンポジュウム（2002），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**, pp.53-58, 2003.