１９世紀代数学史のHistriographyについて*

赤堀庸子†

1　序

１９世紀の代数学史は、いささか微妙な状況のもとにある。実際、数学と科学史という二つの分野の境界領域に位置している、という事情からか、情報の伝播があまり良好ではないような印象を受けるときがある。特に、歴史家ではあるが１９世紀の代数学の専門ではないとか、代数学（整数論）の専門家ではあるけれども歴史の専門ではないといった、いわば半専門家とでもいうべき人々の間での情報の伝播が、意外に良くないように見うけられる。

たとえば、多くの数学史書では、（数学者のものが中心だが、歴史家にもこの傾向がある。）ガロアを中心に１９世紀の代数学を語ろうとしている。確かにガロアは、"groupe"の語を提出したが、これは色々な意味で、現在我々が群として用いているものとは異なっている。それにもかかわらず、ガロアがよくとりあげられるのは、「よいものはひとりでに成長し、皆の共有財産になるはず」という漠然とした思い込みにのっとっているからであろう。

かたや歴史家の場合においては、現代数学への転換を、思想史の一環としてとらえるというアプローチが優勢なため、代数学の内部にたちいった研究は、中心的な存在とならないという傾向がある。こうした傾向においては、なぜイギリス記号代数学派は指導的立場にいたらなかったのか、などといった問題が残るように思われる。

要するに、１９世紀代数学史は、数学者のエトスと歴史化のエトスの狭間に落ち込んでしまっているといえよう。そのため、原典や二次資料に親しんでいるひとなら誰でもよく知っていることが、半専門家とでもいうべき人々になかなか伝わっていかない、といえよう。

このような状況を根本的に打開するのは、個人にとっては著しく困難なことではあるが、ここで少々整理を試みてみたい。その際、ポイントとしたいのは、代数学史は、数学全体の基礎の歴史と相互不可分である、ということである。問題は、基礎とはなにか、ということであるが、ここでは、集合論的思考、それも素朴な意味での集合論的思考に着目したい。そのことによって、１８世紀後半から現代代数学に至るまでの、さまざまな実際にあった葛藤を明らかにするのに役立つのではないかと考える。

---

*津田塾大学数学史シンポジウム．2003.10.

†erkym@mui.biglobe.ne.jp

2　集合論的思考

ここでいくつか、集合論的思考をめぐって、１９世紀の文献をみる際に、気づいたことをあげておきたい。

2.1　かたまりで理解することの困難

はじめに非常に素朴な話題から出発する。１９世紀の文献をみると、意外にも商群をうまく概念化しえていないのではないかと思えるものに出会うのである。詳細は拙稿（[6],[7]）にて述べたが、ここであらすじだけふりかえっておく。

１９世紀中葉の（つまりガロアの論文が理解されなかったといわれる時代の）群概念に相当するものに関する論考は、1844 年のコーシーの置換論と、1854 年のケイリーの抽象群論、1850 年代後半 (1856–58) のデデキントの（ゲッティンゲン大学における私講師の講義）代数学講義 ([1]) である。（このうち影響があったのはコーシーのもので、ケイリーのものは影響が少なく、デデキントのものは未出版であった。）このうち、コーシーのものは、置換を独立に把握し、さまざまな基本概念を確立していったという点が評価されるが、その一方でケイリーのまったく抽象的な群の定義は革新的であるとされている。（群表をあげ、位数の低い群の分類をやっている。）

筆者が不思議に思ったのは、このケイリーが晩年になって、ヘルダーの論考にある G/H なる記号法を拒否していること、のみならず、1854 年論文の続きでも、商群概念の理解についていちじるしく要領の悪いところをみせていることであった。それはコーシーにおけるコセット分解よりはるかに劣るといえるものである。（もちろん implicit には捉えられているのではあるが）

また、ジョルダンの論考 (1870)、ヘルダーの論文 (1889) においても、そのコセット分解の記述はコーシーのものと同じ図式にたよっており、我々の感覚とはまだへだたりがある。

これにひきかえデデキントの思考はもっとも現代的で、我々のものと違わない記号法を用いてコセット分解を記述している。そして、商群の概念理解を通じて、群（置換）の基本性質を公理的なものに昇華させているふしもみられる。

これらをみていて興味深いのは、どうも「かたまりでとらえる」ということそのものに意外な抵抗があるようにみえることである。幾何学的な一面があるからであろうか。後に述べるように、１９世紀には幾何学的直観を基礎から排除するという傾向もあったのだが、それ以前の素朴な抵抗があったようにも見受けられる。ここでもっとも現代的な感覚に近いデデキントが、幾何学的な思考を数学思想の基礎に用いたリーマンの影響を強くうけていることも興味深い。集合論的思考の普及には、意外に幾何学的思考（のようなもの）がネックになっていたのではないかと思える。

2.2　群と体、どちらがより基本的か

現代代数学の体系においては、体概念よりも群概念の方が、より基本的な存在である。こうした位階構造はあくまで論理的に規定されたものであって、実際の歴史の中で起こったこととは少しずれているといってよい。少々興味深いのは、群概念も体概念も普及してきたと思われる１９世紀末以降にも、体概念の方をより基本的なものと捉える傾向が見受

けられることである。Weber の “Lehrbuch der Algebra”(1890 年代) では、体の理論が群の理論よりもはじめの方におかれている。Bourbaki の “Elements” の草稿段階においてさえ、体の理論の方が先にきていたといわれている。(Beaulieu [2],p.247.)

こうした事柄、いわば体と群の逆転ということは、ある意味では分かりやすいものにみえるかもしれない。体というのは数に近い存在であるから、集合論が導入される以前の時代にそれがより基本的な存在であったということは、気軽に納得出来そうなことにも思える。しかしながら、歴史という観点からすると、ここは立ち止まるべきところではないかと思われる。１９世紀の、特にドイツには、数に関する考察（厳密には量—Grösse—に関する考察）が盛んであった。[1]我々は、集合論の導入以前には、数学の基礎に値するものはないに等しい（数学全体に及ぼす支配力という観点からみて）ものと考えがちであるが、それは早計であるといえる。強力さという点では集合論に劣るにしても、数学の基礎は真剣に考察されていたのであり、個別分野における新概念の形成を我々が追跡する際にも、当時の人々の接していた数学の基礎は、無視できないものであろう。

ここではひとつ、このことに関連して、Arithmetik という用語のところで立ち止まってみたい。（特徴づけの難しい用語であり、本当は気軽にコメントできるようなものではないのだが。）

Arithmetik

算術化、という言葉は、数学史上では、１９世紀の微積分学の基礎づけの傾向に関して用いられる。微積分学において、幾何学的直観を排除して数のみによった基礎づけを行おうという傾向が、１９世紀（特にドイツ）においては盛んになった。

こうしたことに関連してよく知られているのは、自然数還元主義である。デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind,1831–1916 ）の「数とは何か」(1888) の序文に、次のような一節がある。

> —遠く離れた代数学や高度の解析学のどの定理も、自然数に関する定理として述べられるということは、私がディリクレの口から何度も繰り返し聞いていた断定であるが、—

このように、ディリクレを中心として、自然数還元主義が普及していたらしいということがみてとれる。[2]

以上はよく知られたことであるが、実際文献にあたってみると、Arithmetik という用語のカバーする範囲は意外に広いのではないかと思われるときがある。付録にあげるのは Mathematische Annalen の 1–50 巻の総目次 (1898 年) における分類である。

ここにおける Arithmetik は、集合や群の上位概念として機能しているようにみえる。あるいは、数学の基礎の総称として機能しているようにもみえる。もちろんこうした目次が、必ずしも当時の学問分類と全く一致するという保証もないが、大きくかけはなれているということもないだろう。（同一の分類が “Encyklopädie der mathematischen

[1]Martin Ohm;Grassmann 兄弟,Schröder といった名前は、どちらかといえば歴史家の方に知られている。

[2]クロネッカー（Leopold Kronecker,1823–1891 ）のお題目（神は自然数をつくりたもうた。残りは人間の業である。）のめざすところも、デデキントの思想とは異なるものであるが、一応ディリクレの影響下にあるものとみることができる。

Wissenschaften"(1898–1935) でも使われている。おそらくこれはゲッティンゲン学派に共有されている分類と思ってよいのではないか。)

ここでみてとれるのは、数（量）の理論を中心とした数学の基礎づけが、当時の数学の根底にあるようだということである。少なくとも、たとえば、Mathematical Review の目次を想起し、比較すればわかるように、我々の感覚とは異なるものであるといってよいだろう。集合の概念や群の概念は、普及もし、その深遠な思想は認められてきたとはいえ、まだ個別の分野の中にあり、これらが数学の基礎として機能するのは次の段階であると考えるのが自然であるように思われる。

数学の基礎が本質的に変化した（歴史家の言葉でいうパラダイム転換があった）、ということは、やはり念頭におかれるべきことであろう。ここで、前述した体概念と群概念の逆転現象というものは、Arithmetik から集合論的思考への進展と関連付けてとらえるのがふさわしいのではないか。それはたとえばデデキントのような現代性を特徴とする数学者のものを読むときにも、注意されるべきことではないかと考える。

Dedekind の Körper について

体（Körper）が定義されたのは、デデキント『ディリクレ整数論講義付録（1871)』の第 159 節においてである。

> 体，というのは無限個の実または複素数の総体で，それ自身完結していて完全であるもの，すなわち任意の二数の加法，減法，乗法，除法から同じ総体の数を生じることをいう．

このことはよく知られているが、未発表の原稿の中に、別の Körper があったということは、それほど有名ではない。ひとつには、点集合論に関する考察で、ここでは開集合に対して「体」の語が使われている。[3]

もうひとつは、ガロア講義の中で、商群の概念を表すのに Substitutions-Körper の語を用いているものである。[4]

どちらのケースも大変興味深い。デデキントの Körper は、結局は数体として発表されたが、もとは数学全体の基礎に関する考察という性格をもっていたといってよい。

ここで Körper の語に関してなされた発言を若干みてみよう。

まずクロネッカーの発言である。クロネッカーは、1882 年の論考 "Grundzüge—" において自らの代数的整数論を発表したが、（着想は５０年代に得たものらしい）その中でデデキントの Körper に対する批判がなされている。

> —用語選択については，明らかに空間的な装いをもつものを避けるべきであると考える。使うのは，たとえば "Bereich" のような一般的な表現だけにするべきである．そうしたことばは，日常的にとても多様な使われ方をしている

[3]空間についての一般的諸定理

１．点 $p, p', \cdots$ たちの総体 (System)P が体（Körper）をなすとは，各々p に対して，δ が定まり，p からの距離が δ より小さいような全ての点たちがまた P に属す，ことをいう．点 $p, p', \cdots$ たちは P の内部にある。

２．P' が体で，その全ての点が P にあるとき，P' は P の部分者であるという．

３．定理．ある定点 P から，与えられた長さ δ より短い距離にあるすべての点は体をなす．(以下略) —[3],S.353.

[4][1]. なお、体概念に相当するものには、Gebiet の語があてられている。

ため，もとの空間的な意味を失っているからである．こうした考え方からすると，デデキントの用語 “Körper” は避けられるべきであり、私が以前から使っていた記号法を守るべきであると思った．ことに，(少なくとも本研究においては)，定量 $R', R'', R''', \cdots$ の有理関数の総括されたもの (Zusammenfassung)，について，新しい概念を作る必要はなく，「総括性」を示すには，“Rationalitäts-Bereich” (有理領域) という語が，それを簡素に無理なく表していると思われるからである．([4],p.250.)

実はデデキントはこのクロネッカーの著作について覚え書きを残している。(これは全集には収録されておらず、近年発表されたものである。) この中で、デデキントはクロネッカーの批判に次のように答えている。

私の命名，“Körper” につけられた “明らかに空間的装いをもった表現” という注は，あたっていない．まずこの言葉は，物理的な物体から抽象という過程を経て幾何学において採用されているものだ．そして、幾何学におけるより以上に，自然科学でも，人間社会の生活においても，System を記述するために，しばしば用いられているものである．System は完全性，完結性を有しており，それによって、全体は有機的に捉えられ、本来もっている単一性を理解することが出来る。そうした意味で私はこの名称を選んだのである．([5],p.54.)

これらの引用からみてとれるのは、両者とも、幾何学的直観を排除するという点では一致しているということだ。もちろんここからデデキントの現代性を読み取ることは出来るが、デデキントの思想を深く理解するためには、クロネッカーとの対立点ばかりでなく、共通した部分への理解が必要になってくるだろう。

3 結びにかえて

以上、メモ風に、集合論的思考について気のついたことを述べてみた。まず、かなり素朴な視点ではあるが、実は集合そのもの、つまり「かたまりで考えることそのもの」に対する抵抗感があったのではないか、それはある種、幾何学的な思考と代数的な思考との葛藤とよぶべきものではないか、ということを考えてみた。次に、群と体の代数学における位置付けの逆転現象が、実は Arithmetik から集合論的思考への進展にともなっているのではということを考えてみた。

(実はもうひとつ、注目したい点がある。短くいえば、群の定義は、まず部分群に相当するものの定義から始まっている、ということである。これらが現在の定義に至るまでには、集合論そのものや論理代数の発展、あるいは無限をとりこむことなどの、隣接分野との関わりが寄与しているように思われる。)

これらの主張は、まだ仮説にすぎないものである。このような考察にどれほどの意味があるのか、率直にいって筆者自身にもこころもとない。黙って一次文献を読むのが第一になすべきことであって、数学思想を言語化したり体系的に述べようと試みたりすることは、却って当時の数学者の思想を伝えるのに邪魔をするだけのことにしかならないのではないか、そんな疑問もある。

しかし、境界領域ということで、現に情報の伝播が悪いという状況が生じていることも事実である。たまには、整理を試みるということもあっていいのではないかと考える。

参考文献

[1] Richard Dedekind,“Eine Vorlesung über Algebra”, in:W.Scharlau,hrsg.,“ Richard Dedekind 1831–1981”, (Braunschweig/Wiesbaden,1981).S.59–100.

[2] Liliane Beaulieu,“Dispelling a Myth:Questions and Answers about Bourbaki’s Early Work,1934–1944”,in; Sasaki,Sugiura,Joseph W.Dauben eds.,“The Intersection of History and Mathematics”,(Birkhäuser,1994)pp.241–252.

[3] R.Dedekind,“Allgemeine Sätze über Räumen”, Gesammelte mathematische Werke II,S.353–355.

[4] L.Kronecker,“Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebrischen Grössen”, Crelle.J.,92 (1882):Mathematische WerkeII,S.239–387.

[5] H.M.Edwards,O.Neumann and W.Purkert,“Dedekinds Bunte Bemerkungen zu Kroneckers Grundzüge”, Archive for History of Exact Sciences 27(1982),pp.49–85.

[6] 赤堀庸子,『ケイリーとデデキント—１８５０年代の群概念』第10回数学史シンポジウム (1999)(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 20,2000)pp.27–43.

[7] 赤堀庸子,『いわゆる「ラグランジュの定理」について』第12回数学史シンポジウム (2001)(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 23,2002)pp.133–143.

Inhalt.

Eintheilung des Sachregisters.

I. Arithmetik und Algebra.

A. Arithmetik.

B. Algebra.