# 数学の三相[1]

三宅克哉[2]（東京都立大学理学研究科）

## 1．序

ここで言う「数学の三相」は，「数学的実在」，「数学的事実」，及び，「数学的表現」である．筆者は自身の研究分野，特に「類体論の生成過程」についての興味から，Fermat 以来の代数的数論の歴史を調べてきた．また教育上の興味から，行き当たるままに数学史のそこここを覗いてきた．最も興味を持ってきたことは，「数学的アイデアの連鎖」であり，自身の専門分野における先達のアイデアの源泉を探ることであった．数学史をこのような視点から見る過程でこれらの三相を明確に意識するようになり，また，数学史の原資料に臨む場合にこれらを意識することが肝要であると実感するようになった．今後の自らの指針としてもこれらを整理して明示化する必要を感じ，この機会をそれに当てることにした．

この三相を最初に言明したのは，１９９８年４月の日仏会館での「フェルマ・コロキウム」でのことであった（[Mi-1999]）．このときは，A. Weil の "Number Theory -- An Approach through History" を基本的な指針とし，近代数論の始祖ともいえる Fermat について，彼の数論における仕事の幾つかを取り上げて紹介することが目的であった．数論に関しては，彼はほとんど系統だった著述を残していない．しかし，彼を「天才」とか「異才・奇才」として片づけるのではなく，彼が見つめようとした「数学的実在」とそれに向かい合う過程で展開していった「数学的事実」，さらに彼にとっての「数学的実在」への認識の変化・深化を見ることが目的ではあった．彼が「新しい科学」と呼んだ数の世界での発見物については，それを明瞭に記述する表現様式は当時はまだまったく整っていなかったし，手本といえるようなものも欠如していた．Viète，Harriot，Wallis，Descartes 等等によって代数的な記号法が種々試みられ，ようやく整ってきた時期であった．しかし，伝統的な幾何学的記述様式も，新しい代数的な記述様式も，Fermat が直ちに数論に利用できる形で用意されていたわけではない．むしろ自身の必然性に応じて有効な記述様式を創造しなければならない時代であった．例えば，素数を一般に $p$ で表すことなど思いもよらないことであったし，2 項係数の表示についても「Pascal の三角形」による記述が歴史的に特筆される時代であった．すでにこの時代にはそれなりの数学的な教養であった「数学的帰納法」についても，命題を記号で表して「自然数 $n$」で「パラメトライズする」などは，はるかに時代を下らなければならない「高等手段」である．このような状況の下で，我々は彼が残した断片的とも言える「数学的表現」を手がかりにし，歴史物語ではなく数学史を営み，幾つかの誤りも犯したに違いない血の通った探究者としての Fermat を見ようという立場にあった．

ここでは「数学の三相」を意識したうえで，

---

[1] 津田塾大学 数学・計算機科学研究所での「第 14 回数学史シンポジウム」（２００３年１０月）における講演に際してまとめられた．

[2] この研究については日本学術振興会 科学研究補助金・基盤研究（C）(2) No.14540037 の支援を受けている．

・有限体の取り扱いに関する Gauss と Galois
・代数体の因子論における Kummer，Kronecker，Dedekind
・代数学の基本定理に関する Euler - de Foncenex と Gauss
・負の数と複素数
・量の比

について，幾つかの指摘を行う．

## 2．プラトン主義と人間主義

先ず始めに，「数学的実在」と「数学的事実」についての誤解を避けるために筆者の数学に対する立場を述べる．筆者はいわゆる「プラトン主義」的な立場は採らない．ここでいう「プラトン主義」的な立場とは，例えば，「真理の世界」とか「絶対調和の世界」の存在を前提とするもの，といった程度で了解されたい．

数学は，特に古代ギリシャのタレスに象徴される科学の根幹を支えるものであり，「証明」をその基本的な表現手法として取り込んだ．アリストテレスが整理したように，要素を切り出し，それに基づいて対象とするものを体系立てて（再）構築するといった「科学の方法」，analysis と synthesis，を数学は最も端的に具現している．恐らくは彼の影響下の時代精神のもとでまとめられたユークリッドの『原論』に見られるように，数学は「証明」に基づく独特の「表現様式」を自身に課した．陶冶された知性のみがそれへの触覚の役割を果たすことが出来る．これは例えば「瞑想」とは対極に位置するものである．数学を表現しようとするとき，人は人間を越えた何らかの「大いなるもの」に身をゆだね，それと融合し，一体化することを目指すといったような「分かり方」を意図するものではない．数学はまったくの人間の営みであり，その表現様式は本来的に人間のためのものとして育まれて来たものある．（ただし，これは決して数学が「人にやさしい」ものであり，あるべきであるといっているのではない．）こういった意味で，筆者は人間主義をその立場とする．

従って，ここでいう「数学的実在」は「真理の世界」とか「絶対調和の世界」に属するものではなく，逆にまったく個的なものである．各数学者の数学へののっぴきならない個的な必然性を支えるとともに，その数学者が目にし，手で触れようとして引きずりこまれてしまうものである．その数学者とのかかわりに応じて共に変容して姿を変えて見せる，本性として「未限定（pre-definite）」であり続けるものである．また「数学的事実」は，数学者が何らかの形で「数学的表現」を与え，数学者が自身から切り離して送りだそうとするものを指す．これは，「数学的実在」が個的であるのに対し，何らかの社会的なものである．しかしこれは，「真理」といった普遍的なものとして捉えるべきものではないし，また，数学史の原資料でもない．時を越えて数学史の原資料となるものは「数学的表現」である．「数学的表現」は，知性をそれへの触覚として要請し，論理的整合性を旨として整えられる簡潔・明快な「証明」を中心に置く．従って，「数学的事実」は本来的に「数学的表現」から乖離する．筆者の数学史へのかかわりは，この「数学的表現」を提示した数学者にとっての「数学的実在」を推理し，それに盛ろうとした「数学的事実」を納得すること，さらに，その「数学的表現」を時を経て受けた

別の数学者がそれに盛られたと了解する「数学的事実」に時を経て現れる変容を見，その変容を生み出す受け手の数学者の「数学的実在」を推理しようとすることである．人間の多様な表現の中でも「数学的表現」が特に際立っている特性は，一般にはそれが，最も厳密な意味での論理的整合性をその存在の規範として内蔵しており，人間の知性をまずそれへの触覚として要請していることである．

## ３．有限体の取り扱いに関する Gauss と Galois

ここでは有限体，すなわち，有現素体の有限次代数拡大体についての Gauss [G-1801*] と Galois [Gal-1846] の対比を試みる．もともと Gauss と Galois の数学的表現には対極的な差がある．前者はまず，表現しようとするものの在り方の総体を，それに続くべきものへの影響までを含めて十分に見極める．そのうえで，その構築物の構築過程を一切払拭し，足場を完全に取り払ったあとで提示する．これに対して後者は，十分な時間を費やす暇もなく，彼自身が目前にしている数学的実体を手早く生き生きとスケッチしたかのように提示している．

Galois はまず素数 $p$ を定め，「Gauss [G-1801] の $p$ を法とする合同記号を用いる代りに単に等号を用いる」と断り，$p$ を法とした代数方程式とその根を考える．そしてその根の存在性とか実体とかはまったく問題にせず，それをある種の思考上の記号（comme des espèces de symboles imaginaires）として導入し，虚数単位 $\sqrt{-1}$ と同様の $i$ で表す．そして $i$ を根に持つ既約多項式の次数を $\nu$ として，$i$ で生成される素体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$ の $\nu$ 次拡大 $\mathbb{F}_{p^\nu}$ の要素を端的に記述し，Fermat の定理のそこへの拡張を与える．ここでは Galois はまさに有限体そのものを彼の数学的実体として目のあたりにし，それを端的にスケッチしているかのようである．

一方 Gauss においては，整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ において，素数 $p$ を法とした多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ での除法を展開し，ユークリッドの互除法を再現する．そしてさらに素な（既約な）多項式 $P$ を法とした合同関係を導入して Fermat の定理の拡張を与える，等々．ここでは何であれ $p$ を法とした $P$ の「仮想的な」根は現れない．あくまでも合同関係に基づいて現象を記述している．しかし Gauss が有限体そのもを彼の数学的実体として目のあたりにしていたことは間違いない．有限素体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z}$ については，遥かに遡って Descartes や Fermat の頃には十分に認識されていたものと思われる．しかし，その有限次拡大体に関しては，恐らくは Gauss に至るまで数学的実体として認識されたことはなかったろう．

この Gauss の断片は彼の『数論研究』[G-1801] の一部として準備された．これについて G. Frei [Fre-2001] は，平方剰余の相互法則のいま一つの証明と高次羃剰余への展開を目指して用意したものであり，出版された『数論研究』の最後の章の円分論はこれへの導入部分として意識されていたとしている．しかしこの断片部分は，『数論研究』のペイジ数をおさえるためにか出版されずに置かれ，Gauss の死後，全集に組み込まれて 1863 年に初めて世に出た．従って，当然，Galois はこれを目にしたことはない．

因に，Dedekind は Gauss の全集を編集した際にこの [G-1801*] に出会い，刺激を受けて [De-1857] を著した．彼はこの序文で整数環 $\mathbb{Z}$ と有限素体上の多項式環 $\mathbb{F}_p[x]$ とのア

ナロジーを指摘し，後者の因子論を展開した．後にこの影響下で H. Kornblum は $\mathbb{F}_p[x]$ 上で Dirichlet の算術数列に関する素数定理のアナロジーを取り扱い，さらに E. Artin は平方剰余の相互法則を意識して有理関数体 $\mathbb{F}_p(x)$ の２次拡大（$\mathbb{F}_p$ 上での楕円曲線，超楕円曲線の有理関数体）の合同ゼータ関数を導入した．（詳しくは，例えば [Mi-2002] を参照．）

## ４．Kummer，Kronecker，Dedekind

前節の Gauss と Galois の対比と同様なものが代数体の因子論をめぐって生じている．

まず，Kummer は理想数（ideale complexen Zahlen）を導入した（[Ku-1846, 47a, b]；このとき見過ごされてしまっていたギャップが遅れて [Ku-1856] で対処された）．代数体では，一般には「素数が不足」し，もはや算術の基本定理が成り立たない．そこで Kummer は理想数を導入してそれを補おうとした．彼にはまったく別のところ（最終的には高次冪剰余の相互法則）に問題意識があったが，ともかくも先ず円分体の因子論を展開する必要があった．このとき実際に彼が必要としたのは "eine complex ideale Modul"（仮想的な法）に関する合同関係であった．これに対するために彼は「素数」を補うものとして「仮想的な数（ideale complexen Zahlen）」を導入したのであった．これにより代数的数体における数論の整合性が些かでも損なわれるなどは，彼は微塵も疑いはしなかった．一方 Kronecker は，このように数学的に重要なものに対しては歴とした数学的な表現が当てられるべきであると主張した．そして前節の Gauss [G-1801*] に引き続いて展開され，次節に触れる Gauss [G-1815] に見られる手法を手本とし，多くの変数を導入することによってそれを実現させた（[Kr-1882]；高木貞治 [Ta-1948] の附録（三）に概略がある）．一方，Dedekind は合同関係を支える "Modul" を代数体に導入し，イデアル論を展開することになる（[De-1871], [De-1879]）．この "Modul" については恐らくは楕円関数の虚数乗法が虚２次体にもたらす構造を参考にして導入したものと思われる．

Gauss がまず『数論研究』の冒頭で「$a$ に関して合同（*secundum a congrui*）」という意味を定め，さらに「$a$ 自身を『法』と呼ぶ（ipsum *a modulum* appellamus）」ことによって始めた．次いで Kummer が円分体において "eine complex ideale Modul" による合同関係を展開し，終に Dedekind が合同関係を支える "Modul" として一般の代数体に有限生成 $\mathbb{Z}$-加群を導入したわけである．

## ５．代数学の基本定理への Gauss の第２証明

1799 年に Gauss は代数学の基本定理の「新証明」を発表した（[G-1799]）．これは彼の学位論文であった．この中では先達 d'Alembert，Euler，de Foncenex，Lagrange 等の仕事を解説するとともに，それらに見られる不十分さを指摘している；[G-1815'] では端的に彼の批判的な姿勢が書き残されており，Euler とその de Foncenex による改良についてはLaplace の解説を含めて "petitio principii"（論点先取）と断定されている．さて，実数係数の多項式は，奇数次なら必ず実根を持つ．そこで実根を持たない実数係数の多項式が与えられれば，これは偶数次である．偶数次の実数係数の多項式 $P(X)$ に対して，d'Alembert は，変数 $X$ に $X=x+y\sqrt{-1}$ を代入して実数部分と虚数部分に分ける；$P(X)=$

$V(x, y) + W(x, y)\sqrt{-1}$．このとき，$V(x, y) = 0$ と $W(x, y) = 0$ とは共に $(x, y)$ 平面上の代数曲線を定義する．そこでこれら２本の曲線の交点を取れば $P(X) = 0$ の複素数の根が得られる．これに対して Gauss はこのアイデアと方針を評価したが，複素解析的な証明に曖昧なところがあるとした．また Euler のアイデアは次のようである．実根を持たない実数係数の多項式が与えられたとし，その次数の 2 の羃数に関する数学的帰納法を用いる．そのために，与えられた偶数次の多項式に仮想的な根を用意し，それを利用してこの多項式が二つの同じ次数の実数係数の多項式の積に分解されることを示そうとする．また de Foncenex の改良版は，もとの多項式の仮想的な根のすべてを利用し，さらに実数のパラメータを用いて大きい次数の多項式を作る；ただしその次数の 2 の羃数はもとのものより 1 だけ小さくなっている．従って数学的帰納法の仮定から，その根はすべて複素数になる．そこで実数パラメータの異なる値をとり，それらからもとの多項式の複素数根を構成する．詳しくは，例えば，足立恒雄 [Ad-2003] を参照されたい．

Gauss はこの「仮想的な根を前提しない」ですべてを独立した変数で置き換える．そして $\mathbb{Z}$ 係数の多変数の多項式環において「対称式はすべて基本対称式の多項式として表される」ことを厳密に証明し，これに基づいて粗方次のように対処する．独立な変数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して $P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n)$ は次数 $n$ の多項式である．これを展開して $P(X) = X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n$ とすると，$s_1, s_2, \ldots, s_n$ は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の基本対称式である．そこで新たな変数 $u$ を取り，$n(n-1)/2$ 個の $(a_i + a_j)u - a_i{\cdot}a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, を根とする多項式を $Q(X, u)$ とする；すなわち，$Q(X, u)$ は $(X - (a_i + a_j)u + a_i{\cdot}a_j)$ の積である．このとき，２変数 $X, u$ の多項式としての $Q(X, u)$ の係数はすべて $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の対称式であり，それらはすべて $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の多項式である．しかも $Q(X^2, X)$ は $P(X)$ で割りきれ，例えば $X - a_1$ の $Q(X^2, X)$ における重複度は $n - 1$ である．よって等式 $Q(X^2, X) = P(X)^{n-1}$ が得られる．さて $Q(X, u)$ の $X$ の多項式としての次数は $n(n-1)/2$ である．よって $n = 2^k{\cdot}m$, $k > 0$, で $m$ が奇数であれば，$n(n-1)/2 = 2^{k-1}{\cdot}m'$ で $m'$ は奇数である．ここに $k$ についての数学的帰納法が適用される設定が整う．Gauss は変数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ から始め，上述のように２変数 $X, u$ の多項式 $Q(X, u)$ の係数が基本対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の多項式として表されることを確認する．そこで，与えられた実数係数の多項式 $P_0(X)$ に対応して $s_1, s_2, \ldots, s_n$ に実数を代入する．このとき得られる $Q_0(X, u)$ は実数係数であり，等式 $Q_0(X^2, X) = P_0(X)^{n-1}$ が成り立つ．従って，数学的帰納法の仮定から，変数 $u$ にどのような実数 $u_0$ を代入しても実数係数の $X$ の多項式 $Q_0(X, u_0)$ のすべての根が複素数によって与えられる．そこで $Q_0(X, u)$ の $X$ の多項式としての判別式が 0 と異なるように $u$ に実数値 $u_0$ を与え，$Q_0(X, u_0) = 0$ の複素数根 $\alpha(u_0)$ を定める．次いで，多項式 $Q_0(X, u)$ の $(X, u) = (\alpha(u_0), u_0)$ における $X, u$ に関する偏導関数の値 $(\alpha'(u_0), u'_0)$ を用い，２次方程式の根の公式によって最終的に $Q_0(X^2, X) = P_0(X)^{n-1}$ の根を得る．

しかし Gauss の「仮想的な根」についての批判は，現在の数学環境から見れば必ずしも正鵠を得ているとはいえない．ここで必要なのは与えられた多項式の最小分解体であり，これは現在では，係数体と多項式が与えられれば，多項式環の既約多項式による剰余体を積み重ねて必ず与えられる；まさに Gauss に倣って合同関係によって記述しきれることではある．当時は抽象的な体の概念はなかったが，このように見れば，彼の指摘

の本質は無定義的に「仮想的な根」を導入するかわりに，それに明確な数学的表現を与えるべきである，という点にあるといえるだろう．このようにℤ係数の多変数の多項式に基づいて「数学的表現」を与えようとした彼の姿勢は，前節での Kronecker が「理想数」に明確な数学的表現を与える場合の確たる手本になったに相違ない．そればかりか，現在でもときに耳にする「ℤ上有限生成の数学」という標語についても Kronecker にとどまらず，Gauss にまでさかのぼりたくなる．また，Gauss は彼の二つの論文 [G-1799] と [G-1815] の題名には "Demonstratis Nova" と "Demonstratis Nova Altera" のようにして "Nova" という語を付けている．この辺りを [G-1815'] の強い調子と合わせ見た場合に，何を推論すべきであろうか？

なお Laplace [La-1795] では，まず「算術的な」四則演算，代数的な冪乗，冪根，等を導入する．さらに2次方程式の根の公式を示す．そして，一般の次数の実数係数の方程式で実数の根を持たないものには複素数の根 "$m \pm n\sqrt{-1}$" があること，また従って，これが実数係数の2次の因子を持つことを述べ，d'Alembert が始めてこれを厳密に証明したとし，最終的には de Foncenex の流儀によってこれを概説している．この 1795 年の講義録は遅れて 1812 年に出版された．Laplace は出版に際して，この間に得られた Gauss の結果についても二箇所に脚注を書き入れている．しかし彼は代数学の基本定理に関する Gauss の論文 [G-1799] には全く言及していない．また Gauss のほうも，[G-1815'] では Laplace の名前が出ているものの，[G-1815] では [La-1795] について言及していない．

このように厳密性を要求した Gauss であったが，彼は「実数係数の多項式で奇数次のものは必ず実根を持つ」ことについて，これが「実数の連続性」に依拠せざるを得ないという事実はまったく意識していない．「実数の連続性」に関しては，Bolzano がまず嚆矢を放つが，ようやく 19 世紀の後半半ばを過ぎて明確に認識されることになる．この半世紀を越えて隔たった二つの時代における「数学的事実」の展開も興味深い．ついでながら，ユークリッド幾何学の「完全な公理系」にとっても「実数の連続性」を導く何ものか，少なくとも「実数の完備性」が必要とされる．（いわゆるアルキメデスの公理はすでにエウドクソスによって見通され，「二つの量が比を有する」ことの「定義」として盛り込まれている．）これが明確な「数学的事実」として認識されるようになるのも，Hilbert が『幾何学の基礎』（1902 年）をまとめる頃のことであった．

## 6．負の数と複素数

複素数は3次方程式の解法をめぐって初めて数学の舞台に姿を現した．1545 年のことである．この年に Girolamo Cardano は著書《Ars Magna》（[Ca-1545]）を出版し，その中で3次方程式の解法を詳しく論じた．彼は Tartaglia 譲りの解法から出発したのであったが，彼が譲り受けたものはまず最初に Scipione del Ferro が発見したものであった．当時の数学はもっぱらユークリッド以来の幾何学的な記述法に拠っていたので，3次方程式は幾つかの場合に分類されていた．Tartaglia は，彼自身が得たものとは別に，「数学コンテスト」に備えて del Ferro が扱った場合についても独自に再発見したのであった．

ところが不思議なことに，その公式には，3次方程式が3実根を持つときに必ず複素数が現れるようになっている．知恵の女神はどうやらいたずらがお好きであるらしい．

Cardano はその著書でもこの種の例を多く取り扱っているが，公式を適用して直接に複素数を用いることは避けている．それらの３次式は一見して見つけられる一つの根を持っており，たちまち２次方程式に帰着される．しかし，彼はこの公式に複素数が入り込む事情をよく知っていたものと思われる．特に第３７章では２次方程式に基づいて複素数を取り扱い，たとえば，$5+\sqrt{-15}$ と $5-\sqrt{-15}$ の積を計算するに当たって，「精神的な悩みが生じるけれども，それはさて置いて」などと述べている．

ただし必ずしもこれをもって複素数の誕生と言うわけにはゆくまい．ここでは，複素数が数として，何らかの数学的実体として認知されたわけではなく，あくまでも実根を取り出すための便宜的な存在，ないしは，計算のプロセスでしかなかったろう．因に，この第３７章の題名は

"On the Rule of Postulating a Negative"（負数の存在を要請することについての規則）

である．Cardano は，あたかも，一度負数の存在を認めれば当然その平方根は自動的に認めるべきものであると考えているように見受けられる．

B. L. van der Waerden は彼の著書《Science Awakening I》で，ほぼ 3600 年は遡ることができるバビロニアの粘土板 'AO8862' の書き出しを引用している：

> 長さ，幅．その長さと幅を掛け合わせてその面積を得た．そしてその面積に，その長さが幅を超過する分を加えた：その結果 183 を得た．一方，その長さと幅を加えて 27 を得た．これらの長さ，幅，および面積を求めよ．

現代の流儀で長さと幅をそれぞれ $x$ と $y$ で表す．すると，問題は連立方程式

$$xy+(x-y)=183, \qquad x+y=27$$

の解を見つけることになる．答として $x=15$, $y=12$ が与えられている．その解答の途中で $\frac{1}{4}$ の平方根をとる必要が生じるが，この粘土板では単に $\frac{1}{2}$ をとっており，負の平方根 $-\frac{1}{2}$ は考慮していない．したがって，もう一組の解 $x=14$, $y=13$ はまったく見失われている．この例から見ても判るように，方程式に対して，たとえ正の解を求めるに当っても，「完全な解答」を得るためには負の数に正当な市民権を与える必要がある．

小杉肇 [Ko-1973] によると，２次方程式の負の根を初めて認めたのはインドのバースカラ（1150 年）であり，彼は方程式 $x^2-45x=250$ の根として $x=50$ と $x=-5$ を得たという．インドでは，すでに７世紀頃にブラハマグプタが２次方程式の根の公式を得ていたようであり，その後，0 と負の数を含む数の取り扱いの規則が習熟されてゆく．しかし，正の数の平方根に正と負の２つがあることについては，ようやくバースカラによって認められるところとなる．彼はまた，負の数の平方根は不可能であると考えていた．

Cardano は方程式の負の根を直ちに捨て去りはしなかったが，それを「仮の根」と呼んでいる．（ただし Fibonacci とか Cardano は，問題を解くにあたって，その解が「負債」として明確な意味を持つ場合には，負の解を認めていたようである．）負の数が数学的に認められるのが随分と遅れたのは，代数的な表記法が十分に発達していなかったことにも因るであろう．古代ギリシャからの伝統では，代数的なものを取り扱うにあたっても，もっぱら幾何学的な表現様式がとられていた．この場合「負の量」を記述する術はない．

因に，算籌を用いた中国では，３世紀の後半に入って著されたものと思われる劉徽による『九章算術』の注釈書の「方程」の章の注のひとつに，「赤い算籌で正の数を表し，黒い算籌で負の数を表す．さもなくば，正しく並べた算籌で正数を，邪(なな)めに並べた算籌で負数を表示する」とある．また，この中国の数学がインドに影響を与えた可能性を中国の数学史家達が指摘している．（Qian Baocong [Qi-1964] 参照．）

ヨーロッパでは 1600 年頃に Thomas Harriot が初めて負の数を数として取り扱ったようであるが，これを有効に，自在に扱うようになったのは，解析幾何学の創立者（の一人）である Descartes に始まるのであろう．

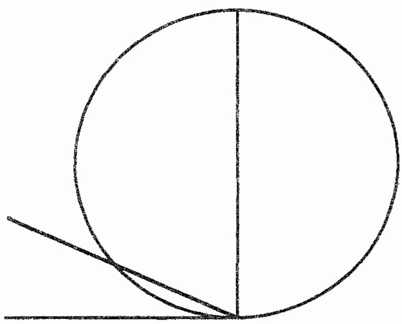
一方，Cardano の弟子の Bombelli は 1570 年の著書《L'Algebra》で，複素数の計算規則を完全な形で与えている．「数学コンテスト」を勝ち抜くための不可欠な技術として，その取り扱いがたちまちにして整備されたものであろうか．また Harriot は虚数を認めなかったが，虚数の代数的な計算を躊躇せず行っており，それが代数方程式の解の公式の一部をなすことを認めていた．さらに踏み込んで，複素数の根を方程式の正当な根として認めた最初の人は Girard であろう．彼は 1637 年に《Invention nouvelle en l'algebre》を出版しており，$n$ 次方程式は複素根を含めて $n$ 個の根をもつと断言した．もちろん証明が与えられたわけではないし，明確な説明も見あたらない．しかしともかくも，「代数学の基本定理」が明言されたのは，恐らくはこれが初めてであろう．

現在用いられている「複素数（complex numbers）」という呼び名を定めたのは Gauss であった．しかし彼も，表だった複素数の取り扱いについては実に慎重であった．

## ７．量の比

ユークリッドが彼の『原論』（[E-1971] 参照）をまとめた頃以降，紀元前３世紀には天文学的な考察がアリスタルコスやエラトステネスによって行われた．太陽と月の相対的な距離，地球の直径と月の直径との比，あるいは，地球の外周などが計算された．紀元前２世紀にはニカイアのヒッパルコスがこの方面で活躍し，数学においては三角法を基礎づけた．彼は角度 $\theta$ に対して，それが円から切り出す弦の長さと円の半径との比を対応させ，関数 $\mathrm{chord}(\theta)$ の数値表を作った．現代流に表せば $\mathrm{chord}(\theta) = 2\sin(\theta/2)$ である．当時では，角も長さの比についても，数値での表示にはバビロニア流の 60 進法を用いた．従って数としては，角度も長さの比も同一の数値表現がなされていた．西暦紀元２世紀に天文学を集大成して『アルマゲスト』を表したアレクサンドリアのプトレマイオスも同様であったが，彼は 60 進法の各位の数を表す際にギリシャ文字による 10 進表示を行った．（また彼は 60 進法の位に対して小さな円によってゼロを表した．）

さて，ユークリッドの『原論』の第３巻の命題１６として次が与えられている（[E-1971] による）：



**命題**：円の直径にその端から直角に引かれた

直線は円の外部におちるであろう．そしてこの直線と弧の間に他の直線はひかれないであろう．また半円の角はすべての鋭角の直線角より大きく，残りの角はすべての鋭角より小さい．

そこでこの「残りの角」，すなわち，図の接線と左側の円弧が接点で作る「角状の角」をθとしよう．これが0ではないとすると，直線角を表示するどのように小さい「長さの比」 $r>0$ に対しても不等式 $0<\theta<r$ が成り立つ．特に，$r=1/n,\ n\in\mathbb{N}$, の場合を考えれば，このθは「無限小」であることになる．また，$\theta<1/n,\ n\in\mathbb{N}$, であり，$\theta\neq 0$ とすれば $1/\theta>n,\ n\in\mathbb{N}$, すなわち，$1/\theta$ はどのような自然数よりも大きい「無限大」ということになる．

ユークリッドの『原論』の第5巻と第6巻にある「量の比の理論」を打ち立てたとされるエウドクソスは「無限小」とか「無限大」には全く言及していない．しかし，「二つの量が比を有する」という**定義によって**，量の比としては有理数でいくらでも精密に近似できるものだけを一括し，「無限小」とか「無限大」を「数のシステム」から排除した．しかし，彼らは「数学的事実」として無限小の存在を認識していたのではなかろうか．プラトンのアカデメイアで無限小が論議されていたと推測してみれば，何か当時の数学者達が生き生きと見えてくるような気がする．

この量の比の理論を完全に理解し，そこから自身の「数の概念」を紡ぎだした二人の数学者ウマル・ハイヤーミとDedekindははたして無限小の可能性を見ていたろうか？

Dedekindが彼の実数論（[De-1872]，[De-1888]）を展開した主たる動機は，あくまでも解析学の基礎にある実数の見えざる本性を明らかにすることにあったと思われる．たとえ彼が実無限である無限集合を "Modul" とか "Ideal"，あるいは，「有理数の切断」として躊躇わずに導入したとしても，「数」としての無限小の存在にまで踏み込んでいたようには思われない．

また，Kolman and Yushkevich [KY-1961, II, pp.431--435] によれば，ウマル・ハイヤーミー（Omar Khayyam; 1048 - 1092）は『原論』の第5巻の量の比の定義を，正しいが「真」ではないとした；比の本当の意味は，ある量を他の量で測る過程に含まれるべきであるからと理由づけている．さらに彼は，通約可能でない二つの量の比についてはユークリッドの互除法に基づいた他の定義を与えている：

$A/B=C/D$ を，それぞれの比を連分数展開したときの部分商 $q_1, q_2, \cdots$，$q'_1, q'_2, \cdots$ について，すべての $n$ に対して $q_n=q'_n$ が成り立つこと，とする．

そして

ウマル・ハイヤーミーの連続性の原理：量 $A, B, C$ に対して $A/B=C/D$ となる量 $D$ が必ず存在する．

を立て，これを基にして自分の比の理論がユークリッドの第5巻のものと同値であることを示した．また，量の世界と数の世界を対比し，比はすべて数で表されると見た．従って，彼においては，上の「角状の角」と「直線角」の比などは全く論外であったものと

思われる．しかし彼は，一般には無限に続くプロセスである連分数展開を，完結した「実無限」と認識していたと判断される．彼もまた，エウドクソス，アリストテレス，ユークリッドの時代とは些かは異なった「数学的事実」が息づく時空にあった．

## 参考文献


[Ad-2003] 足立恒雄．ガロア理論講義［増補版］，日本評論社，２００３．

[dA-1746] J. le Rond d'Alembert. Recherches sur le Calcul intégral, I$^{re}$ partie, Hist. de l Acad. Royal des Sciences de Berlin, année 1746.

[Ca-1545] Girolamo Cardano. Artis Magnæ Sive de Regulis Algebraicis. Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPUS PERFECTUM inscripsit, est in ordine Decimus, 1545.

[Ca-1968] _____. The Great Art or The Rules of Algebra, trasl. and ed. by T. Richard Witmer, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1968.

[De-1857] R. Dedekind. Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, Jour. reine angew. Math., Bd.54 (1857), 1-26; Werke I, 40-66.

[De-1871] _____. Supplement X. Über die Komposition der binären quadratischen Formen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (2. Auflage), 423-462, (1871); Werke III, 223-261.

[De-1872] _____. Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872; Aufl. 2., 1892; Aufl.3., 1905.

[De-1879] _____. Supplement XI. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet (3. Auflage), 515-530, (1879); Werke III, 297-313.

[De-1888] _____. Was sind und was sollen die Zahlen ?, Braunschweig, 1888; Aufl.2., 1893; Aufl.3., 1911.

[E-1971] Eucleides. ユークリッド原論，中村幸四郎等共訳・解説，共立出版，１９７１．

[Eu-1749] L. Euler. Recherches sur les racines imaginaires des équations, Hist. de l'Acad. Royal des Sciences de Berlin, année 1749.

[Fre-2001] _____. Gauss' unpublished Section Eight of the Disquisitiones arithmeticae: The Beginning of the Theory of Function Fields over a Finite Field, Lecture held in Oberwolfach on June 21, 2001; Preprint, 24th of June, 2001; to appear in "The shaping of arithmetic two hundred years of number theory after C.F.Gauss's Disquisitiones Arithmeticae", edit. by C.Goldstein, N.Schappacher and J.Schwermer, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[Gal-1846] E. Galois. Sur la théorie des nombres, Jour. Math. pures appl. 11 (1846), 398-407; Écrite et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois, par R. Bourgne et J.-P. Azra, Gauthier-Villars, Paris, 1962, 113-127.

[G-1799] C. F. Gauss. Demonstratis Nova Theorematis Omnem Functionem Algebraicam

Rationalem Integram Unius Variabilis in Factores Reales Primi vel Secondi Gradus Resolvi Posse (1799), Gauss Werke III, Göttingen, 1866, 1-30.
[G-1801] C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, Leibzig, 1801; Gauss Werke I, Göttingen, 1863.
[G-1801*] _____. Disquisitiones Generales de Congruentiis. Analysis Residuorum Caput Octavum, Gauss Werke II, Göttingen, 1863, 212-242.
[G-1815] _____. Demonstratis Nova Altera Theorematis Omnem Functionem Algebraicam Rationalem Integram Unius Variabilis in Factores Reales Primi vel Secondi Gradus Resolvi Posse (1815), Gauss Werke III, Göttingen, 1866, 33-56.
[G-1815'] _____. Göttingische gelehrte Anzeigen. 1815 December 23. Gauss Werke III, Göttingen, 1866, 105-106.
[Ko-1973] 小杉 肇. 数学史（数と方程式），槙書店，１９７３.
[KY-1961] E. Kolman and A.-A. P. Yushkevich. 数学史 I, II, （山内一次・井関清志共訳），東京図書，１９７０，１９７１.
[Kr-1882] L. Kronecker. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Jour. reine angew. Math. 92 (1882), 1-122; Werke II, 237-388.
[Ku-1846] Ernst Eduard Kummer. Vervollständigung der Theorie der complexen Zahlen, Monatsber. König. Preuss. Wiss. Berlin (1846), 87-96.
[Ku-1847a] _____. Zur Theorie der complexen Zahlen (Republ. of [Ku-1846]), Jour. reine angew. Math. 35 (1847), 319-326; Collected Papers I, 203-210.
[Ku-1847b] _____. Beweis des Fermat'schen Satzes der Unmöklivhkeit von $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ für eine unendliche Anzahl Primzahlen $\lambda$, Monatsber. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1847, 132-141, 305-319; Collected Pares I, 274-283, 283-297.
[Ku-1856] _____. Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine Zusammengesetzte Zahl ist, Math. Abhandl. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1856), 1-47; Collected Papers I, 583-629.
[La-1795] P. S. Laplace. Leçons de Mathématiques données a l'École Normale en 1795, Jour. l'École Polytechnique, VII$^e$ et VIII$^e$ Cahiers, 1812; Œvres complètes de Laplace XIV, 10--177, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
[Mi-1999] K. Miyake. Did Fermat See These Structures ?, Historia Scientiarum Vol.9 (1999), pp.37-47, The History Sci. Soc. Japan.
[Mi-2002] _____. Some Aspects of Interactions between Algebraic Number Theory and Analytic Number Theory, in Number Theoretic Methods -- Future Trends, ed. by Chaohua Jia and Shigeru Kanemitsu, DEVM Series No. 8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London.
[Qi-1964] Qian Baocong (edit.). 中国数学史（川原秀城訳），みすず書房，１９９０.
[Ta-1948] 高木貞治. 代數的整數論，岩波書店，１９４８.
[Wa-1975] B. L. van der Waerden. Science Awakening I, (translated by Arnold Dresden), Kluwer, Dordrecht, 1975.