クラインとポアンカレの往復書簡について
—保型関数論の源流[1]

東京農工大学工学部
関口次郎
sekiguti@cc.tuat.ac.jp

1 序文

筆者はかつて有理2重点，クライン特異点などと呼ばれている特異点と単純リー環との間の深い結びつきについてのブリースコルン (E. Brieskorn) による考察に大変興味を抱き，この理論の源泉ともいえるクライン (F. Klein) 著 "Vorlesungen über das Ikosaeder" を幾度となく眺める機会があった．そういうこともあった関係でこの古典を翻訳した．それが [3] である．翻訳の過程で，グレイ (J.J.Gray) 著"Linear Differential Equations and Group Theory"(Birkhäuser 刊) をしばしば参照した．それでまたこれを室政和氏 (岐阜大学) と共に翻訳した ([6]).

グレイ [6] には，クラインとポアンカレの往復書簡について解説した部分があるが，その内容について津田塾大学のシンポジウムで発表した．この報告では，前半ではシュワルツとクラインの仕事について検討し，後半で往復書簡の紹介をする．前半では，シュワルツの論文 [30] の内容を斉藤 [4] を参考にしながら追っていき，それからクラインの著書 [2] に関連する話題を取り上げた．見方によってはシュワルツ [30] が新しい保型関数を発見した最初の論文である．したがって流れとしてはこのように議論を進めて後半の往復書簡へと向かえばいいのであるが，残念ながら肝心の往復書簡については，ドイツ語とフランス語で書かれている原文を筆者を読み込むことだけの能力がないので，グレイの著書 [6] にあること以上の論考を展開できなかった．

文献 [1], [2], [3], [4], [5] はグレイ [6] の翻訳にあたって参考にした．この報告のまとめるにあたってもかなり参考にしており，原文をそのまま引用している部分もある．また，高橋礼司先生には，[6] の翻訳過程でご相談に乗っていただき，かなり教えていただいたことがあった．そのときにお伺いしたことなども逸話としてこの報告に入れようとしたが，まとめる時間の都合もあってできなかった．英語もフランス語もドイツ語も堪能な高橋先生に教えていただいて，往復書簡の内容全般を検討することが理想であろうが，そうする余裕もないので実現するのは難しいだろう．

グレイの数学史に対する姿勢は，つねに原著論文や著作にまで戻って検討した上で論考を重ねているようである．どうしても二次資料や「定説」をそのまま信じていると，虚構だけになってしまう可能性がある．ガウスについての記述などでも，寡作というイメージがついて回るが，実際には天文台の仕事でかなりの報告を書いており，多作だという見解をグレイは示している．通俗的な数学者の伝記物を読むと感じる違和感は二次資料や俗説をそのまま採用していることが多いためだろうか．グレイのような姿勢には共鳴させら

[1] 第14回数学史シンポジウム，2003年10月25，26日，津田塾大学

れる．しかしながら，実際に数学史という視点で報告するとなると，どうしても「定説」「俗説」または引用の丸写しになってしまう部分も多くなってしまう．この報告をまとめるにあたっても，他の文献の丸写しかほぼそのままという部分が大部分であるが，自分なりに原著論文に当たって検討を加えた部分がないわけではない．こういうことを積み重ねることによって，クラインやポアンカレの研究内容や評価が少しでも「定説」以上に深まっていくことを期待する．

2 シュワルツとクラインの対比

本節では，シュワルツの論文 [30] の内容の紹介とクラインの視点について [2] をもとに検討する．シュワルツの理論が保型関数の出発点である．

2.1 シュワルツの理論

この節を書くにあたっては，[30] の他に [4], [3] を参考にしている．この節の内容はそれほど目新しいことを含んでいない．

シュワルツ (H. A. Schwarz,1843-1921) は有名な論文 [30] において，ガウスの超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ はいつ第 4 変数 x に関して代数的な関数になるか，という問題に対する解答を報告した．

複素変数 x の関数 y の微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0$$

がガウスの超幾何微分方程式である．シュワルツは，次の 2 つの場合を考えた．方程式がただ 1 つの代数的な解を持つ場合と 2 つの線型独立な代数的な解を持つ場合とである．

方程式がただ 1 つの代数的な解を持つ場合は保型関数の理論とあまり関係がないので省略する．以下では，2 つの線型独立な代数的な解を持つ場合を扱う．

この場合，解の分岐点はすべて代数分岐点でなければならないことから，パラメータ α,β,γ はすべて有理数になる．また，方程式 (1) の線形独立な解 y_1,y_2 に対して，y_1,y_2 がともに代数関数になるためには，それらの比 y_1/y_2 が代数関数になることが必要十分条件である．

一般の 2 階線形微分方程式

$$(2) \qquad \frac{d^y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

を考える．y_1,y_2 はこの方程式の 2 つの線型独立な解とする．このとき，一般の 2 つの線型独立な解は $C_1y_1+C_2y_2$, $C_3y_1+C_4y_2$ （ここで $C_1,\dots,C_4$ は $C_1C4-C_2C_3\neq 0$ である定数）と表せるが，商 $s=\frac{C_1y_1+C_2y_2}{C_3y_1+C_4y_2}$ を一般解にもつ微分方程式を求める．微分を繰り返

して，比 $C_1 : C_2 : C_3 : C_4$ を消去することによって次が得られる：

$$(3)\quad \frac{2\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^3s}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} = 2p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}(= F(x))$$

この方程式は $C_1C4 - C_2C_3 \neq 0$ である任意の定数 $C_1, \ldots, C_4$ によらずに成り立つ．つまり，微分式

$$(4)\quad \psi(s,x) = \frac{s's''' - 3s''^2}{2s'^2}$$

は1次分数変換 $s \to \frac{C_1s+C_2}{C_3s+C_4}$ によって不変である．$\psi(s,x)$ のことをケーリー(A. Cayley, 1821-1895)はシュワルツ微分と呼び，この名称は今日では定着している．また，記号としては $\{s,x\}$ を使用するようである．(ところで，クライン[3]，81ページにおいては，シュワルツ微分はすでにラグランジュ(Lagrange)の

Sur la construction des cartes géographiques, Nouveaux Mémoires de l'Academie de Berlin, 1779

に見いだされる，とある．) ガウスの超幾何微分方程式の場合，

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} \\ q &= -\tfrac{\alpha\beta}{x(1-x)} \end{aligned}$$

だから，

$$(5)\quad F(x) = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)}$$

となる．ただし，$\lambda\ \mu\ \nu$ は

$$\lambda = |1-\gamma|, \mu = |\alpha-\beta|, \nu = |\gamma-\alpha-\beta|$$

で定義する．したがって，

$$(6)\quad \psi(s,x) = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)}$$

が導かれる．この微分方程式の解をシュワルツの s 関数という．s_1, s_2 がともに s 関数ならば，

$$s_2 = \frac{as_1+b}{cs_1+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbf{C},\ ad-bc \neq 0)$$

が成り立つ．ところで，x を $z = \frac{c_1x+c_2}{c_3x+c_4}$ で置き換えたとき，

$$\psi(s,x) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \psi(s,z)$$

が成り立つので，x を $1-x$，あるいは $\frac{1}{x}$，あるいはその組合せで置き換えたときに (3) の解がどのように変化するかはただちにわかる．もし $s(\lambda,\mu,\nu,x)$ を解の 1 つとすると

$$\begin{aligned}
s(\lambda,\mu,\nu,z) &= s(\lambda,\mu,\nu,x) \quad \text{ただし} \quad z=x,\\
&= s(\nu,\mu,\lambda,x) \quad \text{ただし} \quad z=1-x,\\
&= s(\mu,\lambda,\nu,x) \quad \text{ただし} \quad z=1/x,\\
&= s(\nu,\lambda,\mu,x) \quad \text{ただし} \quad z=1/(1-x),\\
&= s(\lambda,\nu,\mu,x) \quad \text{ただし} \quad z=x/(1-x),\\
&= s(\mu,\nu,\lambda,x) \quad \text{ただし} \quad z=(x-1)/x
\end{aligned}$$

がわかる．シュワルツは特異点 $x=0,1,\infty$ の近傍で (5) の解を考察した．彼は次の定理を証明することができた．

定理 1 微分方程式 *(6)* のある特別な積分 s によって，複素上半 x-平面 E は円弧三角形の内部に *1* 対 *1* 等角に写像される．さらに，点 $0,1,\infty$ に対応する頂点における角は，それぞれ，$\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ となる．ただし，$0<\lambda<2, 0<\mu<2, 0<\nu<2$ は仮定する．

鏡像の原理を適用すれば，s によって領域 $\Pi=\mathbf{C}-((-\infty,0]\cup[1,\infty))$ が円弧四角形の内部に 1 対 1 等角に写像されることもわかる．

ここでシュワルツは視点を変えて，シュワルツ関数 $s=s(x)$ そのものでなく，その逆関数 $x(s)$ を扱う．代数関数であることは逆関数をとっても同じなので，$x(s)$ が代数関数になる条件を求めれば，初期の目的は達せられる．議論を簡単にするため，当面 $x(s)$ は 1 価関数となる仮定する．1 価代数関数は有理関数なので，$x(s)$ が有理関数になる場合を扱うことになる．

$x=0,1,\infty$ の近くでの解の挙動を調べることで，$x(s)$ が有理関数になるための条件は，正整数 m,n,p が存在して

$$\lambda=\frac{1}{m},\quad \mu=\frac{1}{n},\quad \nu=\frac{1}{p}$$

となることがわかる．

$S=\mathbf{C}-\{0,1\}$ とおいて，$x_0\in S$ をとって，基本群 $\pi(S,x_0)$ を考える．y_1,y_2 を $x=x_0$ の近傍でのもとの超幾何微分方程式の 1 次独立な解とする．$\tilde{c}\in\pi(S,x_0)$ に対して，y_1,y_2 を基底として得られる $\tilde{c}$ に対応するモノドロミー行列を $M(\tilde{c})$ とする．$s(x)=y_1(x)/y_2(x)$ とおけば，$M(\tilde{c})$ に対して，$s(x)$ が $\dfrac{m_{11}(\tilde{c})s(x)+m_{21}(\tilde{c})}{m_{12}(\tilde{c})s(x)+m_{22}(\tilde{c})}$ に変換される．そこで，

$$T(\tilde{c})s=\frac{m_{11}(\tilde{c})s+m_{21}(\tilde{c})}{m_{12}(\tilde{c})s+m_{22}(\tilde{c})}$$

とおく．$\tilde{c},\tilde{c}'$ に対して $T(\tilde{c}\tilde{c}')=T(\tilde{c})T(\tilde{c}')$ が成り立ち，したがって $T(\tilde{c})\,(\tilde{c}\in\pi(S,x_0))$ は群になる．これを G で表す．Π で 1 価である $s(x)$ の分枝を 1 つとって固定する．このとき，任意の分枝は $Ts\,(\exists T\in G)$ と表せる．$x(s)$ は 1 価になる場合に制限しているので，$T\in G$ が単位元でない限り，$s(\Pi)$ と $Ts(\Pi)$ が重なることはない．したがって，$\cup_{T\in G}Ts(\Pi)$ は

s 平面のある領域になるだろう．ここまでの考察をまとめると次のことがわかったことになる．

s 関数の逆関数 $x(s)$ が s の 1 価関数になるための条件は，適当な自然数 m, n, p が存在して，

$$\lambda = \frac{1}{m}, \quad \mu = \frac{1}{n}, \quad \nu = \frac{1}{p}$$

が成り立つことである．さらに，$T \in G$ が単位元でなければ，$Ts(\Pi) \cap s(\Pi) = \emptyset$ であり，s 平面の領域 D で次が成り立つものが存在する．

$$D = \cup_{T \in G} \overline{Ts(\Pi)}$$

また，s の関数 $x(s)$ は $Ts(\Pi)$ において $S = \mathbf{C} - ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ の値を 1 度づつとり，

$$(7) \quad x(Ts) = x(s) \quad (\forall T \in G)$$

が成り立つ．

さて，D がどのような領域であり，G はどのような群であるか，などはこの時点では不明である．しかしながら，(7) が G に関する保型性を表していることはわかる．

シュワルツがどの程度，群の概念やここで現れた群 G の重要性を把握していたのかは筆者にはわからない．少なくともリーマンとシュワルツにおいては，超幾何微分方程式が代数関数解をもつ場合と球面幾何学とさらには正多面体との関連は十分に認識されていたことは推測できる．それを少し検討する．

λ, μ, ν から円弧三角形を構成できるのだが，

(i) $\lambda + \mu + \nu > 1$

(ii) $\lambda + \mu + \nu = 1$

(iii) $\lambda + \mu + \nu < 1$

に対応して，球面三角形，平面三角形，非ユークリッド的三角形が生じることから球面幾何学，ユークリッド幾何学，ロバチェフスキーの幾何学との関連が出てくることの意味を認識していたのかもわからない．グレイ [6] の 98 ページには「それは，シュワルツによれば，x と s によるリーマン面が有限な葉を持つ閉曲面になってからである．この問題は，リーマンによって，彼の死の直後に出版された論文 [29] で，ある程度まですでに議論されいたことをシュワルツは観察している．リーマンは，その論文において，§12 で $\frac{du}{d\log\eta}$ が η の代数関数となる場合を考え，§18 で正多面体 (regular solid) が球面の上に等角に表現されることを暗にほのめかしている.」とある．現代的な視点からみると，リーマンの写像定理によって，単連結なリーマン面は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathbf{C}$，$H_+ = \{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Im} z > 0\}$ のいずれかになるので，それが (i), (ii), (iii) に対応することになる．こういってしまえば身もふたをない．その後に，ポアンカレによって導入されたポアンカレ計量の意味を軽視することになる．

シュワルツの論文 [30] はさらに続く．シュワルツは §5 において，まず (iii) の場合を考察している．特に $\lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = \frac{1}{2}$ の場合に D と $Ts(\Pi)$ $(T \in G)$ との関係を示した図を提示している．それから，$\lambda + \mu + \nu = 0$ である極端な場合と (ii) の場合へと進んで

いる．$\lambda+\mu+\nu=0$ の場合，$\lambda=\mu=\nu=0$ となり，s 関数は

$$s=\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}$$

と表される．ただし，

$$K=\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-x\xi^2)}},\quad K'=\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-x)\xi^2)}}$$

である．これはよく知られている完全楕円積分である．シュワルツはヤコビ (C. G. J. Jacobi) の論文 [15] を引用している．さて，(ii) $\lambda+\mu+\nu=1$ の場合だが，$\lambda\geq\mu\geq\nu>0$，すなわち，$1<m\leq n\leq p$ となるように選ぶと，

$$(m,n,p)=(3,3,3),\ (2,4,4),\ (2,3,6)$$

の 3 通りしか可能性はない．これらの場合には三角形 $Ts(\Pi)$ $(T\in G)$ が平面をモザイク状に埋め尽くす．

シュワルツは §6 において，(i) の場合を考察している．$1<m\leq n\leq p$ でしかも

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}>1$$

を満たす整数の三つ組 (m,n,p) が

$$(2,2,k)\ (k>1:\text{整数}),\ (2,3,3),\ (2,3,4),\ (2,3,5)$$

しかないことは簡単な計算で示せる．これが正 2 面体，正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体に対応する球面の三角形分割に対応している．シュワルツはそれぞれの場合に s と x の関係を与えている．

$(m,n,p)=(2,2,k)\ (k>1:\text{整数})$ の場合

$$1-\gamma=\frac{1}{2},\ \alpha-\beta=\frac{1}{2},\ \gamma-\alpha-\beta=\frac{1}{k}$$

を解いて，

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right),\quad \beta=-\frac{1}{2k},\quad \gamma=\frac{1}{2}$$

を得る．ガウスの公式

$$F\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right),-\frac{1}{2k},\frac{1}{2},x\right)=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{x})^{1/k}+(1-\sqrt{x})^{1/k}\}$$

をここで引用している．もうひとつの独立解は

$$x^{1/2}F\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right),\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k}\right),\frac{1}{2},x\right)=\frac{k}{2}\{(1+\sqrt{x})^{1/k}-(1-\sqrt{x})^{1/k}\}$$

である．以上から，s 関数として

$$(8) \quad s = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{1/k}$$

を取れる．このとき，

$$(9) \quad x = \left(\frac{s^k-1}{s^k+1}\right)^2$$

となる．

$(m,n,p)=(2,3,3)$ の場合

$Ts(\Pi)$ $(T\in G)$ は正 4 面体を球面に投影して得られる円弧三角形である．すなわち，正 4 面体に外接する球面を考える．この球面の中心から正 4 面体のそれぞれの稜を球面に投影して，それを含む大円を考える．すると，これらの大円によって，内角が $\pi/2, \pi/3, \pi/3$ でたがいに合同な 24 個の三角形に球面が分割されるが，それらが，$Ts(\Pi)$ $(T\in G)$ 全体と一致する．この場合，s と x の関係は

$$(10) \quad x = \left(\frac{1-2\sqrt{3}s^2-s^4}{1+2\sqrt{3}s^2-s^4}\right)^3$$

である．シュワルツの論文には s を x の関数として書いた式もある．$\delta=e^{\pi i/12}$, $\varepsilon=\delta^8=e^{2\pi i/3}$ とおけば，

$$(11) \quad s = -\sqrt{-i}\sqrt{\frac{\delta\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}}-\delta^{-1}\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}{\delta\sqrt{1-\varepsilon\sqrt[3]{x}}+\delta^{-1}\sqrt{1-\varepsilon^2\sqrt[3]{x}}}}$$

である．

$(m,n,p)=(2,3,4)$ の場合

この場合，正 8 面体に外接する球面を考える．球面の中心からこの正 8 面体の 12 本の稜を球面に投影すると，3 つの大円が得られる．また正 8 面体のひとつの面は三角形であるがごその頂点は球面上にあるが，三角形の中心を球面上に投影した点とこの頂点を結んで得られる大円は全部で 6 本ある．このようにして得られた 9 個の大円によって，内角が $\pi/2, \pi/3, \pi/4$ の合同な円弧三角形が 48 個できる．これらの円弧三角形が $Ts(\Pi)$ $(T\in G)$ 全体になる．s と x の関係は

$$(12) \quad x = \frac{(1+14s^4+s^8)^3}{4\cdot 27s^4(1-s^4)^4}$$

である．

$(m,n,p)=(2,3,5)$ の場合

この場合，正 20 面体に外接する球面を考える．頂点，稜などを結んでできる大円が 15 個あり，内角が $\pi/2, \pi/3, \pi/5$ の合同な円弧三角形が 120 個できる．これらの円弧三角形が $Ts(\Pi)$ $(T\in G)$ 全体になる．

$$(13) \quad \begin{cases} \varphi_{12}(s) &=& s(1-11s^5-s^{10}) \\ \varphi_{20}(s) &=& 1+228s^5+494s^{10}-228s^{15}+s^{20} \\ \varphi_{30}(s) &=& 1-522s^5-10005s^{10}-10005s^{20}+522s^{25}+s^{30} \end{cases}$$

とおけば,

(14) $\varphi_{20}(s)^3 - 4^4 \cdot 3^3 \varphi_{12}(s)^5 = \varphi_{30}(s)^2$

が成り立つ. s と x の関係は

(15) $x = \dfrac{\varphi_{20}(s)^3}{4^3 \cdot 3^3 \varphi_{12}(s)^5}$

この場合, 逆を求めると,

(16) $s = \dfrac{F(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{x})}{\sqrt[5]{1728}F(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{x})}$

になる.

いままでは, $x(s)$ が 1 価関数になる場合に議論を限定していたが, シュワルツはこの条件を必ずしも満たさない場合も議論をしている. 問題は, 球面の有限被覆を与えるような円弧三角形をすべて見つけることである. そして, 関数 s が代数的になるような 15 の場合からなる表を得た. それが表 1 である. ただし, ここではパラメータ λ, μ, ν の順序を変えることによる重複は避けている. (琉球大学の加藤満生氏は有限被覆の場合の計算をしていることに注意しておく.) このほかのすべての場合 ($\lambda + \mu + \nu \leq 1$ であるか,

No.	λ''	μ''	ν''	area π	
I.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	ν	ν	2 面体
II.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} = A$	正 4 面体
III.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} = 2A$	
IV.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12} = B$	立方体あるいは正 8 面体
V.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} = 2B$	
VI.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30} = C$	正 12 面体あるいは正 20 面体
VII.	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15} = 2C$	
VIII.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15} = 2C$	
IX.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10} = 3C$	
X.	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15} = 4C$	
XI.	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} = 6C$	
XII.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} = 6C$	
XIII.	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} = 6C$	
XIV.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{30} = 7C$	
XV.	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} = 10C$	

表 1: シュワルツの分類した 15 の場合

$\lambda + \mu + \nu > 1$ であるが λ, μ, ν は表にあげたものではないものである場合) には, s は超越的 (代数的ではない) になった.

以上がシュワルツの論文 [30] の概要である．シュワルツは何故ガウスの超幾何微分方程式の解が代数関数になるための条件を調べることを問題にしたのだろうか．リーマンの研究に示唆されていることは確かなようだ．シュワルツはガウスの超幾何微分方程式の 2 つの独立解の比の逆関数が重要であることに気づいた．楕円積分の逆関数の重要性に気づいたことがガウスによる楕円関数の発見の大きな契機になっているそうだが，これらをあわせると，逆関数のもつ不思議さは数学の豊かさ，奥行きの深さを物語るものであろう．シュワルツの研究していた当時は，すでに航海などで必要であり，またユークリッド幾何学との関連で球面幾何学の研究は盛んであっただろう．したがって，代数関数解と正多面体との関連を示したこのシュワルツの研究は大変興味深い話題として数学者の世界に受け入れられたと思われる．しかしながら，非ユークリッド幾何学との結びつきを明確にするにはまだ思い至らず，ただ「超越関数」と表現しているだけようである．一方では，群論的な考え方についてはほとんど考慮の外といっていいのかもしれない．

2.2 クラインの「正 20 面体と 5 次方程式」

クラインの正多面体群の不変式論的考察に言及する．主にクラインの著書「正 20 面体と 5 次方程式」([3]) に依拠した記述にする．

正多面体が 5 種類しかないという分類はプラトンによるといわれている．その体系的な証明はユークリッドの「幾何学原論」にある．有名な話だが，ケプラーは当時知られていた太陽系の惑星：水星，金星，地球，火星，木星，土星の軌道と 5 種類の正多面体との関係付けで惑星の軌道を理解しようとしたそうである．歴史的にもこのように正多面体にまつわる話題はつきないが，それでは正多面体を数学者が考えたらどうなるか．クラインの著書はそれに対するひとつの答えと見なせる．

グロタンディーク (A. Grothendieck) 著「数学者の孤独な冒険」(辻雄一訳，現代数学社刊) 49 ページにかねてから気になっている記述がある．「(2) 実際のところ、伝統的には、幾何学者の注意の中心にあったのは、「連続的」な側面でした。「離散的」な諸性質、とくに数えあげる、または組み合わせ的な諸性質は黙って見過ごされるか、ぞんざいに扱われてきました。十年ほど前に、二十面体の組み合わせ理論の豊かさを発見して感嘆しました。このテーマは、二十面体についてのクラインの古典的な著作の中では触れられてさえいない（おそらく気づかれてもいない）ものです。⋯⋯」このグロタンディークの「発見」とは何なのか大変気になるところだが，それはさておき，クラインの著書 [3] は「クラインの古典的な著作」として引用されるほどの名著である．

さて，クラインが，正 20 面体，より正確には正 20 面体群というべきかもしれないが，に関心をもったひとつの理由は，正 20 面体群はアーベル群でないもっとも位数の小さい有限単純群だからである．また，クラインはまだ確立されてからそれほどの時間のたっていないリーマンの関数論とガロアの群論とを統合することを試みていたことも理由の一つである．さらには，5 次代数方程式が代数的に解けないとはいってもそれではどういう関数を使って解を記述できるか，という問題も当時はきわめて熱をおびていた話題だったことも理由にあげていいのかもしれない．

クライン [3] の 73 ページには次のようなことが書かれている．

「 ……….

このようにして得られた結果に関しては，だいたいにおいてすでに言及しているシュワルツの仕事に含まれている．すなわち，単に，シュワルツの論文では主題の順序がちょうどここで述べるのと逆になっているだけである．超幾何級数の微分方程式から出発して，シュワルツはこの微分方程式の二つの特殊解 z_1, z_2 の商 z が依存する 3 階の微分方程式をまず構成する．彼はさらに独立変数 Z の二つの半平面から，z が描く等角写像を調べて，z が Z の代数関数であるという条件によっていま考察している z-関数と，それが定義する基本方程式へと進む．それとは反対に，ここではこれらの方程式から始めて，それらから等角写像を構成し，そして z の満たす 3 階微分方程式をの存在を推定して，最後にこれから P-関数の，あるいは本質的には同じことだが，超幾何級数の 2 階微分方程式へと移行する．その際，z_1, z_2 に依存する式である $X(z_1, z_2)$ を Z によって直接表すことによって，最終段階で，すでに引用している論文でフックスが導入したあるアイデアを利用することをここで言及しておく.」

しかしながら，実際には必ずしもシュワルツの結果を知らないうちに研究を開始していたことが推察される．事実，序文に次のようなことが書かれている．「私はそのときまでに（シュワルツ教授の先にやっている仕事をその時には知らないままに）自分のために正 20 面体の研究をはじめていたが，これを，問題に本格的に取り組む前の準備訓練のようなものと考えていた.」

クラインは 1874 年頃にその頃まだ一般的でなかったリーマン流の関数論と難解だったガロアの群論とを結びつけることを目的として研究を開始した．クラインは 1849 年生まれ (− 1925)，25 歳のときに，line geometry，3 次および 4 次の曲面，非ユークリッド幾何，リーマン面と代数曲線の関連などに関してすでに 30 以上の論文を出版していた．2 次元球面 S^2 を複素射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ と同一視する．これはリーマンの考え方である．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の 1 次分数変換から生成される有限群を考える．これはガロアのアイデアである．このような有限群は巡回群，正 2 面体群，あるいは正多面体群のいずれかになる．このようにして自然に正多面体が登場する．

クラインはまず $SO(3)$ が S^2 に回転群として作用しているが，その有限部分群を調べて正多面体の合同群である正多面体群の研究へと議論を進めていく．正確には，$SL(2, \mathbf{C})$ の有限部分群は n 次巡回群，正 2 面体群および正 4 面体群，正 8 面体群，正 20 面体群のいずれかに群同型になることを示している．(立方体の合同群は正 8 面体群に同型，正 12 面体の合同群は正 20 面体群に同型である．) 次にクラインは 2 次元球面 S^2 と複素射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を同一視させる．正多面体 M のすべての頂点が S^2 にあるようにする．そして，M の面の中心と稜の中点を S^2 に中心から投影する．すると S^2 と $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の同一視によって，$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上に M の面の中心に対応する点 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，稜の中点に対応する点 $b_1, b_2, \cdots, b_q$，頂点に対応する点 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ を得る．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の斉次座標を $z_1 : z_2$ とすれば，$f_M = \prod_{j=1}^{p}(z_1 - a_j z_2)$，$e_M = \prod_{j=1}^{q}(z_1 - b_j z_2)$，$v_M = \prod_{j=1}^{r}(z_1 - c_j z_2)$ は G_M の (相対) 不変式になる．$G_M (\subset SO(3))$ を M の合同変換群とする．すると G_M は $S^2 \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の 1 次分数変換からなる群と見なせるが，自然に $SU(2)$ の部分群 $\tilde{G}_M$ に持ち上げられる．v_M, e_M, f_M は z_1, z_2 の多項式なので，これらの間にはひとつの代数関係式 $F(v_M, e_M, f_M) = 0$ が存在

する．クラインは $z=z_1/z_2$ から $x=v_M/e_M$ などを考えることにより $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ から $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への有限被覆写像を構成できる．有限被覆であることより，z を x の関数とみると代数関数になる．このことをより詳しく解析することで，z_1, z_2 も x の代数関数とみなせる．さらにはガウスの超幾何関数でより明示的に表示される．どの時点でかはよく知らないが，1874年秋頃に，すでにシュワルツが1872年に出版された論文でまったく逆の議論をしていたことを親交のあったゴルダン (P. Gordan) から聞き知ったのである．

数学史の研究会の報告だから，ここでP. スロードウィ(P.Slodowy) から聞いた逸話を紹介する．クラインはエルランゲンに1872年から75年まで勤務して，75年にミュンヘンに転勤している．ゴルダンは74年にゲッチンゲンに赴任してきた．両者が同僚であった時期はわずかである．しかしながら，ミュンヘンに転勤した後も，クラインとゴルダンは毎週日曜日に両者の住まいの中間にある街のカフェで数学談義に花を咲かせたそうである．このことについて，クラインがどこかに書いているそうであるが，全集を見てもどこにあるのか発見できないでいる．グレイの著書[6] の111ページには，クラインが「ゴルダンと過ごした学期のことをいつも熱心に語っていた.」とある．このことは上の逸話とも関係するに違いない．

さて，軌道修正する．M が正20面体の場合を例にとる．この場合，$p=20, q=30, r=12$ であり，

$$
(17)\quad \begin{aligned}
f_M &= -(z_1^{20}+z_2^{20})+228(z_1^{15}z_2^5-z_1^5z_2^{15})-494z_1^{10}z_2^{10},\\
e_M &= z_1^{30}+z_2^{30}+522(z_1^{25}z_2^5-z_1^5z_2^{25})-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20}),\\
v_M &= z_1z_2(z_1^{10}+11z_1^5z_2^5-z_2^{10})
\end{aligned}
$$

クラインは f_M, e_M, v_M をそれぞれ H, T, f と記している．H, T, f の間には関係式

$$
(18)\quad T^2+H^3-1728f^5=0
$$

が成り立つ．(18) は今日では，クライン特異点，有理2重点などといわれるものの中でももっとも難しい特異点を表す式としても有名である．この式で与えられる特異点は E_8 型特異点というが，E_8 型複素単純リー環のベキ零多様体の特異点と関係しているとはクラインとリー (S. Lie) が親交がありたがいに影響しあった仲ということがあったとしても，クラインとて想像もできなかった事実に違いない．しかしながら，実際にはすでにシュワルツの研究において出現していた．式(14) がその式である．(このあたりのことに関心を持つ読者はブリースコルン[8] を参照されたい．)

次にクラインは $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ から $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への有理写像

$$
(19)\quad Z=\frac{H^3}{1728f^5}
$$

を考えた．ただし $z=z_1/z_2$ が変数である．シュワルツの研究との関係を見るならば，$z_1=1, z_2=-s$ とおけば f, H, T はそれぞれ $-\varphi_{12}(s), -\varphi_{20}(s), \varphi_{30}(s)$ に一致する．

さて，(19) は Z をパラメータにもつ z の60次代数方程式と見なせるが，クラインはこれを「正20面体方程式」と呼んだ．この方程式を5次代数方程式の解法に応用することが[3] の後半の主要なテーマである．5次代数方程式の解法にクラインが関心を持った理

由の１つに，エルミート (C. Hermite) の５次方程式の解法についての研究があると思われる．エルミートは楕円関数の変換論において，ヤコビとゾーンケ (Sohnke) が導きだした，いわゆるモジュラー方程式のひとつに注目した．それは

(20) $u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0$

である．この式で，$u = \sqrt{2} \cdot q^{1/2} \cdot \frac{\sum q^{2m^2+m}}{\sum q^{m^2}}$ とおけば，v は q のベキで表せる．これを u をパラメータにもつ v の方程式と見る．そしてこれの分解方程式を求めると

(21) $t^5 - t - A = 0$

を得る．ここで，$A = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \cdot \frac{1+u^8}{u^2(1-u^8)^{1/2}}$ である．ところで，一般の５次方程式

(22) $x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$

はいわゆるチルンハウス (Tschirnhaus) 変換によって，(21) に変換されることをブリング (E.S.Bring) が示していた．特に (21) の形の５次方程式はブリング方程式と呼ばれている．クライン [3]，163 ページによれば「このようにして，ブリング方程式の解法はエルミートの公式によって与えられ，それで間接的に楕円関数による一般の５次方程式の解法の得られる.」クラインの時代では，まだこのエルミートの解法の意味が十分には理解されていなかったと思われ，大変不可思議なことと見なされていたようである．

クラインは論文 [16] で５次方程式の解法について研究している．その §I で，楕円関数についての観察を寄せ集めた[2]．楕円積分

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \ f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

は２つの不変式をもつ．それらを彼は

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \quad \text{および} \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

として定義した．g_2 と g_3 の判別式を $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$ で表した．絶対不変式としては，普通に使われている g_2^3/g_3^2 よりもむしろ g_2^3/Δ を選んで，それを J で表した．J は $f(x)$ の４根を適当に並べた複比 σ によって書ける．クラインは，等式

$$J = \frac{4}{27}\left(\frac{(1 - \sigma + \sigma^2)^3}{\sigma^2(1 - \sigma)^2}\right)$$

が成り立つのとを示した．そして，複比のどの値を代入しても J は不変であることを観察した．

[2] このあたりの議論は [6]，174 ページ-175 ページに基づいている．

クラインはまた楕円積分 I の周期 ω_1, ω_2 の比 ω による g_2, g_3, Δ, J に対する表示式を与えた．特に $q = e^{\pi i \omega}$ とおくと，

$$\omega_2 \sqrt[12]{\Delta} = 2\pi q^{1/6} \prod_{\nu} (1 - q^{2\nu})^2$$

であり，クラインは $q^{1/6} \prod_{\nu} (1 - q^{2\nu})^2$ がデーデキント (R. Dedekind) の関数 $\eta(\omega)$ の自乗であることを観察した.「数学公式 III」(岩波書店，岩波全書, 第 3 章) にあわせて，$\tau = \omega$ とおいて τ は上半平面上を動く変数とみれば，さらに

$$g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi} \right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}}$$

であることと，q が 0 に向かうとき，J は

$$(23) \quad \frac{1}{1728} \left[\frac{1}{q^2} + 744 + 196884 q^2 + O(q^4) \right] \quad (\tau \to +i\infty)$$

のように振舞うことを示した．

τ の関数 $J(\tau)$ を導入したのは，クラインが正 20 面体方程式の議論を続けるのに必要であったからである．クラインは正 20 面体方程式 (19) でパラメータ Z を $Z = J(\tau)$ とおいたらどうなるか，という問題を考察した[3]．より一般には，正多面体方程式も扱っている．これは式 (9)，(10)，(12)，(15) で $x = J(\tau)$ として得られる s の方程式のことである．さらに複比の場合として

$$(24) \quad J(\tau) = \frac{4(w^2 - w + 1)^3}{27 w^2 (w-1)^2}$$

も扱っている．この式の右辺は $w \to 1 - w$ $w \to 1/w$ で不変である．この場合,「数学公式 III」にもあるように，

$$\lambda(\tau) = 16 q \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^{2n}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8$$

とおけば，

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)^2}$$

が成り立つ．これは，$w = \lambda(\tau)$ が (24) の解になることを意味している．

J と τ の関係は超幾何微分方程式

$$(25) \quad J(1-J) y'' + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} J \right) y' - \frac{1}{144} y = 0$$

で結ばれている．この微分方程式の基本解 $y_1(J), y_2(J)$ を適当にとれば，$\tau = y_1(J)/y_2(J)$ になる．[16]，Ab. I, §9 には，$y_1(J), y_2(J)$ が

$$\begin{cases} y_1 &= \frac{i}{2\pi \sqrt[12]{J}} \left[(\log J + \log 1728) \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J} \right) - \frac{\partial}{\partial t} F\left(\frac{1}{12} + t, \frac{5}{12} + t, 1 + 2t, \frac{1}{J} \right)_{|t=0} \right] \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt[12]{J}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J} \right) \end{cases}$$

[3] [3]，第 I 部 §5.7 参照.

であることが示されている．

ここで，グールサ (E. Goursat) の学位論文 [12] に言及する．グールサの学位論文では次の問題を研究している．すなわち，$R(w)$ を w の有理式とするとき，超幾何微分方程式 (1) に対して，$x=R(w)$ という変数変換を施すとどのような w の微分方程式が得られるか？特に，このようにして得られた微分方程式が超幾何微分方程式になるのはどのような場合か？後者の問題がグールサの学位論文の主要テーマである．ガウスは公式

$$(1+w)^{\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\gamma,w)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\gamma,\frac{4w}{(1+w)^2}\right)$$

を求めているが，この場合，$R(w)=\frac{4w}{(1+w)^2}$ である．もちろん，パラメータ α,β,γ の間にはある種の関係式が成り立たない等式である．さらにクンマーもいくつか公式を求めている．グールサの得た公式をいくつかあげる．

$$F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},w\right)=(1-w)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{2}{3},\frac{w(w+8)^3}{64(w-1)^3}\right) \tag{26}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,w\right)=(1+14w+w^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{-108w(1-w)^4}{(1+14w+w^2)^3}\right) \tag{27}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,w\right)=(1-w+w^2)^{-1/4}F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,\frac{27w^2(1-w)^2}{4(1-w+w^2)^3}\right) \tag{28}$$

グールサの学位論文ではその他にもいくつかの公式を求めているのだが，[12]，140 ページ以降にある公式 (126)-(137) は実は上記の公式において，

$$R(w),\ \frac{1}{R(w)},\ 1-R(w),\ \frac{1}{1-R(w)},\ \frac{R(w)-1}{R(w)},\ \frac{R(w)}{R(w)-1}$$

のいずれかを代入した式になっている．

グールサの学位論文はシュワルツやクラインの正多面体に関する研究とは無関係にようにみえるが，実際にはおおいに関連がある．例えば，式 (27) の場合の $R(w)$ は正 8 面体の場合のシュワルツの式 (12) の右辺の式を見比べると，$w=s^4$ とすることで同じ式になることがわかる．つまり，グールサはシュワルツの成果を別の方向から向かったといえる．

グールサの学位論文についてはマッカイ (J. McKay) に教えていただいた．マッカイについていうならば，きわめて古典的な公式 (23) の q^2 の係数 196884 をにらんでいわゆる Monster 群の既約表現との結びつきを示唆して，Monster 群と $J(\tau)$ との深い結びつきに気づいた最初の数学者として有名である．

式 (26)，(27) はシュワルツの解決した問題の別の方向からの接近法であったが，正 20 面体の場合にはそれがうまくはいかない．しかしながら，クラインは次のような結果を得ている．[3] 第 I 部 §5.7 によれば，

$$\Lambda(\tau)=q^{2/5}\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{5k^2-3k}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{5k^2-k}}$$

とおくとき，$w = \Lambda(\tau)^5$ は

$$J(\tau) = \frac{(-(w^4+1) + 228(w^3 - w) - 494w^2)^3}{1728w(w^2 + w - 1)^5}$$

を満たす．これは [16] で示した式である．これで正 20 面体方程式において，$Z = J(\tau)$ とした場合の解が具体的に求められたことになる．

2.3　フックスの問題

シュワルツが解いた問題は大変な反響を呼んだようである．この問題は，超幾何方程式に付随する新しい超越関数のクラス，つまり保型関数の発見につながった．一方では，どのようなときに線型微分方程式のすべての解が代数的になるか，という問題が 1870 年代に大問題となった．[6] によれば，このような一般的な問題に初めて取り組んだフックス (I. L. Fuchs,1833-1902) に因んでフックスの問題と呼ばれたようである．フックスが一般の 2 階の線型微分方程式に対してこの問題を解決した．ゴルダンは，のちにこの不変式論の問題を直接的な方法で解決した．クラインは，すでに紹介したように正多面体の議論で中心的な役割を果たしている幾何的な方法と群論的な方法をあわせて用いることにより，これを簡略化した．同じ頃，ジョルダン (C.Jordan,1838-1922) は，2×2 の複素数成分の行列で行列式が 1 であるものよりなるすべての有限モノドロミー群を探索する問題にフックスの問題を帰着することによって，この問題を純群論的に解く方法を明らかにした．彼は，3 階や 4 階の方程式に対してもフックスの問題が解くことができ，さらに n 階の方程式の場合にこれを解くための一般有限性定理（ジョルダンの有限性定理）を証明することができた．のちに，フックスとアルファン (G. H. Halphan, 1844-1889) は，これらの場合のいくつかを不変式論的な方法で取り扱うことに成功した．

このようなことは [6] の第 3 章の序文に書いてあり，本文で詳細に検討されている．それ以上の検討内容を展開する能力を持ち合わせているわけでもないし，時間もないので [6] を読んでいただくことにする．

3　クラインとポアンカレの往復書簡について

本節では，クラインの 4 次曲線についての論文 [17] に関連して筆者が興味を抱いたことについて説明し，それからクラインとポアンカレの往復書簡についての雑感を述べる．それから，クライン自身とポアンカレ自身が 1881 年頃の保型関数論が創造されたの後年の回顧談などに言及する．

3.1　クライン

1878 年にクラインは，以前の研究を 5 次より高次の方程式と変換に一般化する一連の論文を発表した．これらの研究はリーマン面の理論のかなりの発展を記したことになり，

そしてモジュラー関数の体系的研究の始まりであり，クラインの最も重要な数学上の貢献である．それらは，今まで示唆していたように，ガロア理論の発展の新たな段階を形成した．それは代数曲線上の有理関数体に関する部分の起源である．クラインは彼の論文において，関数論的なものと研究が先行していた純代数的なものとを区別した．クラインは主に前者に研究を集中させていたが，それはやがて調和のとれたものになる．

関数論的な側面のものの中で最も重要な論文は [17] である[4]．

論文 [17] についてグレイ [6] は詳細に検討している．グレイ [6] には取り上げられていないが少しばかり興味を持ったことを書いておく．クラインは今日ではクラインの 4 次曲線と呼ばれている $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ の曲線

(29) $x^3y + y^3z + z^3x = 0$

の射影変換群を調べている．元来，一般的な平面 4 次曲線 C には 28 本の双接線が存在する．このことについては [6]，194 ページあたりに関連事項の記述がある．この 28 本の双接線の群が現在では E_7 型ワイル群と言われるものになるのだが，この 28 本の群として認識された方が歴史は古い．クラインの 4 次曲線 (29) は特異点を持ち，28 本の双接線は存在しない．しかしながら，この曲線の射影変換群は位数 168 の単純群になる．それを G_{168} と書くことにする．ジョルダンは有限単純群の表を作るためそれまで知られていたいろいろな有限群を調べていたが，そのリストにこの群が含まれていないことをクラインに指摘されたという[5]．

単純群 G_{168} は実は $SL(2, \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ と同型である．クラインがこの群に関心を持った一つの理由は 5 次交代群の次に位数の小さい単純群であったことである．

クラインは [17]，§9 で 4 次曲線 (29) をパラメトライズしている．次がそれである：

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= q^{4/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h}q^{21h^2+h}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h}q^{21h^2+13h+2}},\\
\frac{y}{z} &= q^{2/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+19h+4}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h}q^{21h^2+37h+16}},\\
\frac{z}{x} &= q^{1/7}\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+7h}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h}q^{21h^2+25h+7}+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{h+1}q^{21h^2+31h+11}}.
\end{aligned}
$$

その近くの脚註において，「方程式 (29) はまた 3 階微分方程式によっても可解になるに違いない．どのようにして，それを構成できるだろうか？」とある．さらに全集ではそれがアルファン [13] とフルヴィッツ (A. Hurwitz)[14] によって解決された，と編集したクライン自身が注釈を与えている．アルファン [13] には具体的な微分方程式は与えられていないが，フルヴィッツ [14] にはある．

このことについて，[6] の 400 ページに註釈がある．3 個の線形独立ないたるところ有限である積分 J_1, J_2, J_3 で

$$dJ_1 : dJ_2 : dJ_3 = x : y : z$$

[4] 最近この論文をテーマにした論文集 [9] が出版されている．J.J.Gray が論文 [17] の英訳を掲載している．

[5] [6]128 ページ参照

となるものをとる．すると $y_i = \dfrac{dJ_i}{dJ}$ $1 \le i \le 3$ とおけば，y_1, y_2, y_3 は

$$\frac{d^3y}{dJ^3} + \frac{aJ+b}{J(J-1)}\frac{d^2y}{dJ^2} + \frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2(J-1)^2}\frac{dy}{dJ} + \frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3(J-1)^3}y = 0$$

の形の方程式の解になることがわかる．というのは，分岐点になりうる点は $J = 0, 1, \infty$ のみだから．クラインはすでに，$J = \infty$ で 7 重に分岐し，$J = 0$ では 3 重，$J = 1$ では 2 重であることを証明していた．したがって，指数の和に対するフックスの関係式より，$a, b, \ldots, d''$ のほとんどの値がわかる．$J = 1$ での指数の差は整数なので，解の中に対数項が現れる可能性があるが，実際にはそうならないので，微分方程式は明示的に書き下せる．実際それは

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} & J^2(J-1)^2\frac{d^3y}{dJ^3} + (7J-4)J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2} + \left[\frac{72}{7}J(J-1) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4}J\right]\frac{dy}{dJ} \\ & \qquad\qquad + \left[\frac{72.11}{7^3}(J-1) + \frac{5}{8} + \frac{2}{63}\right]y = 0 \end{aligned} \right.$$

になる．これでグレイの注釈は終了している．フルヴィッツの議論は見事なものである．リーマンの P-関数の理論での議論をみているようである．

趣味的になるが，さらに計算を続けてみる．(31) で $y = (x-1)^{-1/2}z$，$\vartheta = J\frac{d}{dJ}$ とおけば，

$$(32)\quad \left[\vartheta\left(\vartheta+\frac{1}{3}\right)\left(\vartheta+\frac{2}{3}\right) - J\left(\vartheta+\frac{9}{14}\right)\left(\vartheta+\frac{11}{14}\right)\left(\vartheta+\frac{15}{14}\right)\right]z = 0$$

したがって，

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= (1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(\frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{15}{14}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; J\right) \\ y &= J^{-1/3}(1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(\frac{13}{42}, \frac{19}{42}, \frac{31}{42}; 1, \frac{4}{3}; J\right) \\ z &= J^{-2/3}(1-J)^{-1/2}{}_3F_2\left(-\frac{1}{42}, \frac{5}{42}, \frac{17}{42}; \frac{2}{3}, 1; J\right) \end{aligned} \right.$$

とおけばよいことがわかる．フルヴィッツの論文にはもう 1 つの場合も扱っており，微分方程式が出てくる．それも ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x)$ で表されるのだが，何から導かれてくるものなのか解読できない．

このような議論は他の場合にもある．[7] の 437 ページをみると，ジョルダンはもう一つの三元一次変換群として実現できる有限単純群を見落としていた，とある．それは位数 360 のヴァレンチナー (Valentiner) 群である[6]．それを G_{360} と書くことにする．クラインはもちろん，この群に対しても研究はしている．筆者がここで注目しているのはクラインの 4 次曲線 (29) と微分方程式 (31) に対応するものであるが，これらについての研究はラホチン (L. Lachtin)([21]) がしている．それによれば，(29) に対応する曲線は

$$(34)\quad x_3^6 + 15x_1x_2x_3^4 - 15x_1^2x_2^2x_3^2 - 10x_1^3x_2^3 - 3\sqrt{3}x_3(x_1^5 - x_2^5) = 0$$

[6] クライン [17] の注釈には Valentiner-Wiman の群とある．

であり，微分方程式は

$$
\begin{aligned}
&J^2(J-1)^2\frac{d^3v}{dJ^3}+(6J-3)J(J-1)\frac{d^2v}{dJ^2} \\
&+\left(\frac{518}{75}J^2-\frac{8513}{1200}J+\frac{15}{16}\right)\frac{dv}{dJ}+\left(\frac{616}{675}J-\frac{4389}{4320}\right)v=0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

とある．この微分方程式を一般超幾何微分方程式に変換しようとするとうまくいかない．恐らく $\frac{4389}{4320}$ の分子が 2389 のミスではないか，と推測する．2389 だとして計算すると，$v=(x-1)^{-1/2}w$ とおくことで，

$$
\left[\vartheta\left(\vartheta-\frac{1}{4}\right)\left(\vartheta+\frac{1}{4}\right)-J\left(\vartheta+\frac{5}{6}\right)\left(\vartheta+\frac{7}{30}\right)\left(\vartheta+\frac{13}{30}\right)\right]w=0
\tag{36}
$$

これの解のひとつは

$$
{}_3F_2\left(\frac{7}{30},\frac{13}{30},\frac{5}{6};\frac{3}{4},\frac{5}{4};J\right)
\tag{37}
$$

である．このような有限群と微分方程式の関係に注目しているのは筆者だけだろうか．

クラインは [17] を発表した 1 年後に，“Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen” という題名の論文 [18] でこの進展を報告している．この仕事で，彼はモジュラー方程式で出会った異なる形をとっているものがいかにして単純な一般的原理のとても特別な場合であるか，ということを示すことを課題にした．$PSL(2;\mathbf{Z})$ の有限指数の部分群を扱う対象として，対応するリーマン面の関数論も考慮すべきであるとした．

以上が 1881 年のポアンカレの論文が発表されるまでのクラインの到達点である．

4 ポアンカレ

ポアンカレについては，正直のところ筆者はそれほど語るべき内容を持ち合わせていない．斉藤 [4] とグレイ [6] から学んだことぐらいである．最近も，3 次元球面についてのポアンカレ予想が解決したとかしないとかという話題を遠巻きに眺めているようなレベルであり，保型関数論へのポアンカレの貢献がどの程度なのかという判断材料を正直のところないといっていい．

少しばかりポアンカレが 1880 年頃にはどういう立場だったのかをグレイを参考にして触れておこう．ポアンカレは 1854 年 4 月 29 日にナンシーに生まれた．彼の父はナンシー大学医学部教授だった．高校の終了時には彼の天才は明らかになって，彼がエコール・ポリテクニックに入学したときはクラスのトップであった．彼は製図ができないことが理由で，次席でエコール・ポリテクニックを卒業した．そして 1875 年に鉱山学校に進学した．1878 年に彼は偏微分方程式を主題にした学位論文をパリ大学に提出した．その学位論文は多くのいい論題について十分なアイデアを含んでいるが，いくつかの点で訂正したりより厳密にする必要があるとダルブー (J. G. Darboux, 1842-1917) は述べているそうである．この生産力と不正確さがポアンカレの特徴である．すなわち，アイデアはまさしくガウスのように素早くほとばしるが，自らの発見を見直して洗練させて仕上げるために時

間を費やすことはしなかったようである．1879 年 12 月 1 日にカーンの鉱山学校に就職し，理学部の解析教程の講義を担当した．

いかなる理由でポアンカレは鉱山学校に進学したのだろうか．また，カーンというのはフランスのどこに位置するかは地図を見ればわかることだが，カーンの鉱山学校とは偉大な数学者ポアンカレにふさわしい職場だったのかどうか．こういうことについてはすでに定説があると思われるので深入りしない．

1881 年の時点で 27 歳である．まだ新進気鋭の数学者という段階だった．

5 1881 年，1882 年の往復書簡

1880 年にフランス科学アカデミーが懸賞論文を募った．ポアンカレは応募した．この論文がポアンカレの保型関数論の発端であった．

斎藤 [4] によれば，応募した論文は 6 編とある．大賞を得た論文の著者はアルファンである．そして優秀論文のひとつに選ばれたのがポアンカレの論文だった．

ポアンカレはフックスの論文 [11] を読んで刺激を受け保型関数の理論を建設したという．そしてポアンカレにとっては，この論文が唯一の参考文献のようである．後は独力で建設へとひたすら突き進んだ．

第 1 論文 [22] において，ポアンカレは楕円関数の一般化で代数関数係数の微分方程式の解になる関数の広いクラスを発見したことを報告した．「フックス氏の仕事がこれらの研究においてわたしには大変役に立ったので，フックス氏に敬意を表して」それをフックス関数と名づけることを提案した．これらの関数は群 $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ の基本「円板」を不変にする不連続群で不変である．ここでの「不連続」の意味は，どの z も任意の変換による自らの写った先と限りなく近くはならないということである．

いわば次の週の分といえる論文 [23] は，同じフックス群に対応するふたつのテータフックス関数の商がフックス関数になることを指摘することで始まっている．ポアンカレはそのとき，同じフックス群に対応するふたつのテータフックス関数の間には代数的関係が存在することを観察しているが，証明を与えなかった．そしてすべてのフックス関数 F は代数関数係数の線形微分方程式の解になることも観察した．

第 3 論文 [24] においては，同じ群に対応するフックス関数 $x(z), y(z)$ とアーベル積分 $u(x, y)$ の間の関連を示唆している．u を z の関数とみて，与えられている群の変換を z に作用させて (x, y) が円周をまわるようにすることによって，ポアンカレは群の生成元の個数 $2p+2$ をアーベル積分の周期に関係させることへと導かれ，したがって，x と y を結びつける代数方程式の種数に対する上限 p を得た．

微分方程式の研究で有名なフックスが何故整数論とも関係深い分野に「フックス群」という名前を残しているのか不思議なことだったが，ポアンカレが命名者であったことをグレイの著書で初めて知った．しかしながら，この名称は後にクラインとの間で摩擦を起こす原因になる．

クラインが初めてポアンカレに注目したのは，彼が *Comptes Rendus* の 3 つのノート [22],[23],[24] を読んだときだった．そして，クラインはポアンカレに手紙を出す．これが

二人の数学者の交流の始まりである．かたやドイツ数学界に君臨する大御所然たるクラインであり，かたやフランスのまだ新進気鋭の数学者という段階のポアンカレである．とはいっても，1849 年生まれのクラインはその時点では 32 歳になる．ポアンカレは 27 歳である．それほど年齢差を感じないのは筆者だけだろうか．またクラインは大御所というには若いように感じる．

クラインは 1881 年 6 月 11 日にこれらのノートを読んで，翌日にポアンカレに手紙を書いた．彼は以下のように述べている．これらの話題をその時期に考察していた．そして楕円モジュラー関数についていくつかの論文に書いていた．それらは「自然にあなたによって考えられている従属関係式の特別の場合にすぎないが，しかし詳しく比較すればわたしがとても一般的な視点をもっていたことをあなたにはわかることでしょう.」これらの仕事を表にして，アルファンとシュワルツの関連する仕事を引用した後に，クラインは，現代解析学の課題は，楕円モジュラー関数のように，有限群としかるべき無限群で不変なものが例になるような，線形変換で不変な関数をすべて発見することだと続けて述べた．これらの問題について他の数学者に話していた．けれどもいかなる決定的な結果にもいたらなかった．そして今，彼はポアンカレあるいはピカールにもっとはやく相談すべきでなかったと考えるにいたった．彼はこの手紙で文通が始まることを希望していた．彼はその時点では他の義務があるので，その問題の研究に従事できなかったが，しかしすぐにそれに戻れるだろうと打ち明けた．というのも，彼は冬に微分方程式について講義するはずだったからである．

クライン全集第 3 巻にはクラインとポアンカレの間の往復書簡が収められている．もちろん，クラインの手紙はドイツ語で書かれている．それはクライン全集に収蔵されているので，原文を目にすることは可能である．しかしながら，筆者にはドイツ語を解読するのは荷が重いので，上記はグレイ [6] からの引用である．これへの返事は 3 日後に出されている．ポアンカレはフランス語で書いている．もちろん，フランス語も荷が重い．グレイはこの往復書簡をかなり詳しく検討している．[6] からそれらをすべて拾い上げて引用するのも可能だが，あまりに能がないことであり，しかも著作権も絡んでくるといけないので，それはしないことにする．それ以降の二人の往復書簡に興味のある方はグレイ [6] を参照されることをお勧めする．第 1 信だけを取り出したのは映画の予告編のようなものである．いうまでもなく，クライン全集にもポアンカレ全集にも往復書簡は収用されているから，直接それを読んでいただくことも可能だろう．

さて，素朴な印象だが，お互いに母国語でやりとりして，それが通じるとはうらやましい限りである．また，このような手紙がどのような形で保管されていたのかも気になるところである．お互いに自分の書いた手紙のコピーを残しておいたのか，クラインはポアンカレの手紙を，ポアンカレはクラインの手紙を保管していたのだろうか．すべての手紙が散逸しなかったのだろうか．こういう瑣末な疑問をさらに続けるが，1881 年当時の郵便事情はどうだったのかということを投函日付をみて感じた．1881 年 7 月のやり取りが間隔は 3 日程度で交信されている．相手の数学的な内容の説明や質問にすばやく対処して質問に答えてさらに相手に次の段階の質問をしている．こういう手紙を書くだけで 1 日や 2 日はかかるだろうし，それを郵便で出すとしても数日後に相手に届くものだろうか．クライン個人かライプチッヒ大学が飛脚のような者を雇って，クラインが手紙をそういう者に

ポアンカレまで持参させ，さらに返事を受け取ってまた持ち帰る．翻訳する過程で，こういうことでもしなければ物理的に不可能ではないか，と想像したこともある．日本では明治初期ににあたるこの時代でも，フランスとドイツの郵便事情は現代あるいはそれ以上に効率がよかった，というのが実情のようである．

1881年から1882年のクラインとポアンカレの往復書簡 (クライン全集第3巻参照)

		投函場所	日付	J.J. グレイ [6]
1.	From Klein to Poincaré	Leipzig	12. Juni 1881	p.256に解説あり
2.	From Poincaré to Klein	Caen	15 Juin 1881	p.257に解説あり
3.	From Klein to Poincaré	Leipzig	19, Juni 1881	p.257に解説あり
4.	From Poincaré to Klein	Caen	22 Juin 1881	p.258に解説あり
5.	From Klein to Poincaré	Leipzig	25. Juni 1881	p.258に解説あり
6.	From Poincaré to Klein	Caen	27 Juin 1881	p.258に解説あり
7.	From Klein to Poincaré	Leipzig	2, Juli 1881	p.259に解説あり
8.	From Poincaré to Klein	Caen	5 Juillet 1881	p.260に解説あり
9.	From Klein to Poincaré	Leipzig	9. Juli 1881	p.261に解説あり
10.	From Klein to Poincaré	Leipzig	4, Dez. 1881	p.264に解説あり
11.	From Poincaré to Klein	Paris	8 Décembre 1881	
12.	From Klein to Poincaré	Leipzig	10, Dezember 1881	
13.	From Poincaré to Klein	Paris	17 Décembre 1881	
14.	From Klein to Poincaré	Leipzig	13. Januar 1882	p.266に解説あり
15.	From Poincaré to Klein			(日付なし)
16.	From Poincaré to Klein	Paris	28 Mars 1882	
17.	From Klein to Poincaré	Düsseldorf	3. April 1882	p.267に解説あり
18.	From Poincaré to Klein	Paris	4 Avril 1882	p.268に解説あり
19.	From Poincaré to Klein	Paris	7 Avril 1882	
20.	From Klein to Poincaré	Leipzig	7. Mai 1882	p.277に解説あり
21.	From Poincaré to Klein	Paris	12 Mai 1882	p.278に解説あり
22.	From Klein to Poincaré	Leipzig	14. Mai 1882	p.278に解説あり
23.	From Poincaré to Klein	Paris	18 Mai 1882	p.278に解説あり
24.	From Klein to Poincaré	Leipzig	19. Sept. 1882	
25.	From Poincaré to Klein	Nancy	22 Septembre 1882	

(注)Düsseldorfはクラインの生家のある都市．Nancyはポアンカレの出身地

往復書簡で興味を引くのは，下世話な話だが,「フックス群」や「フックス関数」についてのやりとりである．このきわめて個人的な内容のやりとりを読んでいて感じたのだが，日本の作家同士の往復書簡に見られるようなお互いの見解の相違についての言い合いのように見えたことである．こういうことが全集で読めるということは何だろうか．ドイツやフランスにおいては数学は文化である，という感じを強く持った．ポアンカレは「フッ

クス群」や「フックス関数」とした理由は，フックスの論文から刺激されて研究を始めたことであり，フックスとの往復書簡でフックスの論文についていくつか質問したりして，「フックス群」や「フックス関数」という名称を使用したい，とフックスに直接許可を求めた経緯があった．ところが，クラインから見れば，リーマンやシュワルツの研究があるのにどうしてフックスなのか，と気に入らないのも当然だろう．クライン [2]，385 ページには,「フックス関数」「クライン関数」についてのクライン自身の考えが表明されている．ドイツ国内では，個人名をつけず,「境界円をもつ保型関数」「無限個の境界点をもつ保型関数」という用語を採用するようクラインが提案し，次第に大方の賛同を得るに至ったとある．ポアンカレはフックス以外の論文を知らなかったようで，クラインの指摘にただただ聞き入るだけだった．それを知っていたならば,「フックス関数」とはしなかっただろうが，いまとなってはフックスに対する信義があるので変更できない，と反論した．斉藤 [4] を読んだ限りでは，ポアンカレは研究を始めたかなり早い時期にすでに紹介したシュワルツの論文 [30] の水準に独力で到達していたようである．ポアンカレにとって，シュワルツの研究は自らの研究の通過点に過ぎなかったのだろうか．ポアンカレからクラインへの第 15 信には，ポアンカレは手短ではあるがフックスとシュワルツとクラインの視点の違いを評している．フックスは微分方程式に着目し，シュワルツはあまり不連続群に注目しておらず，クラインは楕円関数に重きを置いている．ポアンカレは微分方程式に着目したフックスを評価しているようである．実際のところ，ポアンカレは「保型関数」にどれほど関心を持っていたのか．ポアンカレにとって微分方程式の一意化に重点があって，それが保型関数につながるというのはクラインやポアンカレ後の数学者の評価のように思えるが，こういう見方は誤解だろうか．フックス関数について執拗なクラインの反論も 1882 年になって終止符を打つことになる．クラインの方が「フックス関数」についての名称問題をやめることを提案しポアンカレはすぐに同意した．もともとポアンカレには論争する気持ちはなかったようである．1882 年 4 月 4 日のポアンカレからクラインへの手紙には，ポアンカレは論争を始めたのでもなく延長したくもなかったとある．彼は名称についての論争を終わりにしたいとして結んだ．“*Name ist Schall und Rauch*”（「名前は雑音であり煙のようなものである.」）と彼はドイツ語で書いた．これはゲーテの「ファウスト」からの引用である．

一般には当然であるが，数学者にとっても名称問題は時には深刻な事態を引き起こす．「名前は雑音であり煙のようなものである.」といって涼しい顔をしていられればいいのだが，なかなかそうもいってはいられない．日本においては藤原鎌足の末裔が「藤原」でなく住居のあった地名をとって「三条」「九条」などと俗称を名乗っているように，あまり人名にこだわらないのが日本の習慣のように思えるが，ヨーロッパやアメリカなどでは人名を地名にするのが一般的なようで，これにはいささか奇異に感じることがある．数学の定理や公式には人名のつくものが常識的であるが，よく調べてみると実際に定理を証明したり公式を発見した者とそれらについた人名とが一致していない場合がかなりある．それはさておき，“*Name ist Schall und Rauch*” は「ファウスト」を見れば該当する文章を発見することはできるが，かといってどういう理由でポアンカレが引用したのか，となるとそう単純ではない．神の存在をマルゲリータに問われたファウストが，司教でも哲学者でもその存在を断言できないと言い訳がましく遠まわしに返答して，最後に述べた言葉の一

節である．スロードウィのよると，現代でも教養あるドイツ人が好んで使用する言葉だそうである．スロードウィ自身もよく使うそうである．大学の数学の授業で，群とか環とか体とかの概念を教えたときに，学生が「うーん，わからない」と質問に来たら，“*Name ist Schall und Rauch*” と答えるのだという．(スロードウィはそのように言っていたように思うのだが，本当だろうか？)

この二人のやりとりはフックスも知るところとなる．フックスにとってかなり耳障りの悪い内容なので，自分の正当性について主張している．詳しい事情はグレイ [6]，267 ページで言及されている．

5.1　1882 年のクラインとポアンカレ

春から夏へと季節は変わり，二人はそれぞれの研究を自由に拡張した形で書き上げた．ポアンカレはミッタク・レフラーから彼が創刊する *Acta Mathematica* 第 1 巻に彼の仕事を発表するように依頼された．そしてクラインは *Mathematische Annalen* にそれを発表した．彼らの文通から彼らがそれぞれ都合のいい頂点に到達して，新しい数学の地平を見渡せ，遠くの頂点をほのめかしている視点を提供したことは明らかである．結局，両者は互いに攻撃を加えるよりは彼らの発見を語ることを選んだ．

ポアンカレの 2 つの論文はクラインの論文に立ちはだかった．フックス群についての第 1 の論文 [26] は 7 月に書き終わり，9 月に印刷された．フックス関数についての第 2 の論文 [27] は 10 月下旬に書き終わり，1882 年 11 月下旬に出版された．これらの論文は *Annalen* に出版された梗概 [25] 以来の理論の詳細な解説を初めて与えた．

6　クラインとポアンカレの著作から

6.1　クラインの心境

次の進展はクライン自身によって，1916 年の講演で生き生きと記述されている．著作 [2]，390 ページに彼は書いている．それをグレイ [6]，273 ページから引用すると，「1882 年のイースターに北海に，実際ノルデルナイに健康回復のために旅行した．リーマンについてのノートの第 2 部を落ち着いて書いて，新しい形で与えられたリーマン面上の代数関数の存在証明を成し遂げたかった．しかし，ひどい嵐で外出もできず，深刻な喘息になったので，生活は悲惨すぎたから，わたしは 8 日間だけ滞在した．わたしはデュッセルドルフの家にただちに帰ることを決心した．3 月 22 日から 23 日までの最後の晩，喘息のためソファに座っていなければならなかったが，突然「境界円定理」がわたしの目の前に出現した．だいたい深夜の 2 時 30 分のことだった．それはすでに *Mathematische Annalen* の第 14 巻の 14 角形の図に正確に予示されていた．翌朝，当時ノルデンからエムデンへ向かうのに使われていた郵便馬車の中で，わたしは用心深く詳細にもう 1 度わたしが発見したことを検討していた．わたしは自分が重要な定理を得たことに気づいた．デュッセルドルフに到着するとただちにそのすべてをまとめて，3 月 27 日の日付をつけてそれをトイプ

ナー社に送った．校正刷りの写しをポアンカレとシュワルツに，そして例えばフルヴィッツにも送らせた．そういうわけで，クラインもまた着想を得たことで不眠の夜を過ごしていた．」

彼の苦労の産物は長い論文「リーマンの関数論への新しい寄与」[19] として出版された．ライプチッヒで 1882 年・1883 年の *Mathematische Annalen* 第 21 巻に出版された．まもなくそれはミッタク・レフラーの 1882 年に刊行された *Acta Mathematica* 第 I 巻のポアンカレの 2 つの長編論文 [26], [27] と比較されることになる．

さらにクライン自身の告白といえるもの続く.「もっとも私が自分の研究に支払わねばならなかった代価は途方もなく高いものについた；それは私の健康が完全に損なわれたということである．翌年私は繰り返し長期の休暇をもらい，あらゆる創造的活動を断念せざるを得なくなった．ようやく 1884 年秋になって回復したが，もはや創造が以前の水準に達することはなかった．… (中略) … 私がその後保型関数にはごく稀にしか触れなくなったことに納得されるであろう．理論数学の分野における私本来の創造的活動は 1882 年で終息したのである．それ以後のものは，旧作の校訂に関するものでないかぎり，すべて枝葉末節にすぎない.」(クライン [2]，391 ページ参照) 彼の人格の中の競争心は彼を厳しすぎるほど掻き立てたようで，ふたりの数学者の間の「競争」を作った．

それに続くべきクラインの思いはクライン [3] の冒頭にある.「正 20 面体の理論は最近数年の間に現代解析学のほとんどすべての分野で重要な地位をしめているので，体系的な解説書を出版することは意義がある．これが受け入れられるならば，同じ方向で継続して，同じような方法で楕円モジュラ関数と，最近現われた 1 次分数変換に伴う 1 価関数の一般論を主題として同じような意味で取り扱うことを提案したい.」ここで言及している著書がフリッケ (R. Fricke) との共著 [10], [20] であろう．公約を実行したことになる．

ところで，先に引用した文章の末尾には「それ以後のものは，旧作の校訂に関するものでないかぎり，すべて枝葉末節にすぎない.」とある．本当の気持ちを述べているのかどうか大変気になる部分である．

6.2　ポアンカレの著作からの抜粋部分

ポアンカレ自身が数学上の発見のもっとも著名な記述の 1 つを残していた．それはフックス関数論についての正確な彼の発見の道筋に関している．それはよく知られているけれども，通常の資料からでは，フックスとの往復書簡といかにしてそしていつ関連しているのかは明らかではない．手紙のやりとりのあったその年である 1880 年でさえ，言明されないままである．ポアンカレはこの解説を 1908 年のパリでの心理学学会での講演で与えた．そしてその内容は彼の著作「科学と方法」[28] の第 3 エッセーとして出版された．

「2 週間の間，後にフックス関数と名づけることにした関数と類似のものが存在しないことを私は証明しようとした．その頃，私はまったく無知だった．毎日，私は自分の机に向かって座って，1，2 時間過ごした．私は数多くの可能性を試みたが，決していかなる結論にも到達しなかった．ある晩，習慣に反して，私は 1 杯のコーヒーを飲んだ．私は寝付かれず，アイデアが数多く押し寄せて，それらがたがいにぶつかり合うのを感じて，そ

の中の2つがたがいにつかみ合って，いわば安定した可能性を形成した．翌朝，わたしはフックス関数のある類の存在を確立した．それらは超幾何級数から導かれるものである．私は結果を書き上げるだけで，それには数時間しかかからなかった．」([28], p. 50)

「わたしはそれから，この関数を2つの級数の商として表そうと思った．このアイデアは完全に意識的で反省を経たものだった．わたしは楕円関数との類推をもとにして議論を展開した．わたしは，もし存在すればこれらの級数の性質は何であるべきかを自問して，困難なくテータフックス級数と名づけることになった級数を構成できた．」([28], p. 51))

「その頃，わたしはそれまで住んでいたカーンを離れて，鉱山学校によって組織された地質探査に加わった．旅行という状況では数学上の研究は忘れさせられた．クータンスに到着して，何の旅行かは忘れたが乗合馬車に乗車した．昇降階段に足をかけたちょうどそのときにアイデアが浮かんだ．わたしがフックス関数を定義するのに利用した変換は，非ユークリッド幾何学の変換と同じであることが，まったく事前に準備していたわけでもなく，思いもよらずにいたにもかかわらず，脳裏をかすめた．わたしは検証しなかったし，その時間もなかった．というのも，わたしが馬車に乗って座ると，すでに始まっていた会話を再び続けたので．しかしわたしはたちどころに完全に確信した．カーンに戻ると，わたしは結果を証明して，やっと気持ちを落ち着けたのだった．」([28], pp.51-52))

「わたしは次に，ある数論の問題の研究に着手した．それほど大きな成果も得られず，これが以前の研究と少しでも関連すると考えてもいなかった．うまくいかないことに嫌気がさして，数日海岸で過ごして，まったく別のことを考えていた．ある日，崖に沿って歩いていたとき，アイデアが浮かんできた．いつもと同じ性質の瞬時に，突然，確信をもって，3元不定値2次形式の数論的変換が非ユークリッド幾何学の変換と同一視された．」

「カーンに帰るやいなや，わたしはこの結果を熟考して，その帰結を引き出した．すなわち，2次形式の例によって，超幾何級数に対応するもの以外にフックス群が存在することが示された．それらをテータフックス級数論に適用でき，結果として，そのときはわたしが知っていたただ1つのものであった超幾何級数から導かれるもの以外に，フックス関数が存在することがわかった．わたしは自然にこれらの関数すべてを構成することを企てた．すなわち，わたしは組織的に包囲して，始められた仕事のすべてを次から次へと成し遂げた．しかしながら，いまだに寄せ付けぬ難関がひとつあった．初めはどれほど努力してみても，その困難がますますわかるだけだった．この仕事のすべてがまったくもって意識的だった．」([28], pp.52-53)

ここで引用したのはだいたいグレイ [6] の第6章だが，いくつかの文献に引用されている有名な文章である．斉藤 [4]，158ページから162ページにも同じような挿話がある．

クラインとポアンカレがともに1881年前後のことを回顧談として述べているのを引用した．クラインはそのときの自らの心情を実直に述べており，まさに心臓の鼓動を聞き入るような気持ちになる．一方のポアンカレは，心理学会での講演のためか，理論の成立過程においてどういう精神状態であったかを細かく分析して見せている．1881年といえば，日本では明治維新の頃であるが，ヨーロッパにおいては数学の最先端をいく二人の数学者が保型関数論について議論しあっていたのである．クラインは長生きして回顧談のような内容が [2] にまとめられたが，ポアンカレは50歳代に突然の病気で病死する．現代の医療の水準では死に至るような病いではなかったのかもしれない．時代を超えた天才ポアンカ

レによって切り開かれたのが保型関数論であるが，時代を超えた天才といえども生物学的には当時の医療水準から逃げ出すことはできなかったようである．

参考文献

[1] C. ウーゼル著 :「楕円関数と Abel 積分」(デュドネ編 (浪川幸彦他訳) :「数学史 1700-1900 II」第 VII 章) 岩波書店

[2] F. クライン著 (弥永昌吉監修，足立恒雄他監訳) :「19 世紀の数学」共立出版

[3] F. クライン著 (関口次郎訳) :「正 20 面体と 5 次方程式」シュプリンガーフェアラーク東京

[4] 斎藤利弥著 :「線形微分方程式とフックス関数 I, II, III」河合文化教育研究所

[5] U. ボタチーニ著 (好田順治訳) :「解析学の歴史」現代数学社

[6] J.J. グレイ著 (関口次郎，室政和 共訳) :「リーマンからポアンカレにいたる線形微分方程式と群論」(シュプリンガーフェアラーク東京刊)

[7] 藤原松三郎著 :「代数学」第二巻，内田老鶴圃刊

[8] Brieskorn, E: Singular elements of semisimple algebraic groups, Actes, Congrès intern. Math., 17970. Tome 2, 279-284.

[9] *The Eightfold Way, The Beauty of Klein's Quartic Curve* (edited by S. Levy). Mathematical Sciences Research Institute Publications, 35, Cambridge University Press.

[10] Fricke, R. and Klein, C. F.: *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen*, 2 vols, 1897, 1912, Teubner, Leipzig and Berlin

[11] Fuchs, L.: Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variablen, welche durch die Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen, J. für reine und angew. Math., 89(1880), 151-169.

[12] Goursat, E.: Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la serie hypergéométrique, Ann. Sci. École Normale Supérieure, X suppl. (1881), 1-142

[13] Halphen, G. H.: Sur une équation différentielle linéaires du troisième ordre, *Math. Ann.*, **21**(1884), 461, in *Oeuvres*, IV, 112–115

[14] Hurwitz, A.: Über einige besondere homogene linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **26**(1886), 117–126, in *Math. Werke*, I (no. 9) 153–162

[15] Jacobi, C G. J.: Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum, (1829) in *Ges. Werke*, I, (2nd ed.) 49–239

[16] Klein, C. F.: Über die Transformationen der elliptischen Funktionen und die Auflosung der Gleichungen Fünften Grade, *Math. Ann.*, **14**, 1878, in *Ges. Math. Abh.*, III (no. LXXXII) 13–75

[17] Klein, C. F.: Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Ann., 14(1879), 428-471.

[18] Klein, C. F.: Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, *M. Ann.*, **17**(1880/1881), in *Ges. Math. Abh.*, III (no. LXXXVII) 169–178

[19] Klein, C. F.,: Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **21**(1883), in *Ges. Math. Abh.*, III (no. CIII) 630–710

[20] Klein, C. F. and Fricke, R.: *Vorlesungen über die Theorie der Elliptische Modulfunktionen*, 2 vols, 1890, Teubner, Leipzig and Berlin

[21] Lachtin, L.: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleiching 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ster} Ordnung. Math. Ann. 51(1898), 463-472.

[22] Poincaré, H.: Sur les fonctions fuchsiennes, *C. R.*, **92**(1881), 333–335, in *Oeuvres* II, 1–4

[23] Poincaré, H.: Sur les fonctions fuchsiennes, *C. R.*, **92**(1881), 395–398, in *Oeuvres*, II, 5–7

[24] Poincaré, H.: Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes, *C. R.*, **92**(1881), 859–861, in *Oeuvres*, V, 8–10

[25] Poincaré, H.: Sur les fonctions uniformes qui se réproduisent par des substitutions linéaires, *Math. Ann.*, **19**(1882), 553–564, in *Oeuvres* II, 92–105

[26] Poincaré H.: Théorie des Groupes Fuchsiens, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 1–62, in *Oeuvres*, II, 108–168

[27] Poincaré H.: Sur les Fonctions fuchsiennes, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 193–294, in *Oeuvres*, II, 169–257

[28] Poincaré, H.: *Science et méthode*, 1909, Paris

[29] Riemann, B.: Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, K. Ges. Wiss. Göttingen, **13**(1867), 21–57, in *Werke*, 301–337

[30] Schwarz, H. A.: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reiche eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. J. für reine und angew. Math., **75**(1872), 292-335.