ガウスの数学日記について

高瀬正仁（福岡県福岡市）

I．　ガウスの数学日記

ガウスの数学日記というのはガウスの生前の備忘録“Notizen-journal”のことで，1898年，ガウスの孫にあたるカール・ガウス（1849～1927）が保管していたのを，パウル・シュテッケル（1862～1919）が発見した．現在，入手可能なテキストは二種類ある．一つはガウス全集で，巻X1，483-574頁に収録されている．もう一つは叢書オストワルトクラシカーの第256巻である．1976年に初版が出たが，版を重ね，2版（1979年），3版（1981年），4版（1985年）まで刊行された．それと，2003年11月には5版が出るとの予告を見たことがあるが，実物はまだ入手していない．オストワルトクラシカーのテキストにはドイツ語訳が附されている．

ガウスの数学日記の記事は1796年3月30日から1814年7月9日までにわたり，総計146個の項目が並んでいるが，大半は初めの二年間に集中している．1796年は49項目（1～49，33.6パーセント），1797年は33項目（50～82，22.6パーセント）で，これだけで56パーセントを占める．三年目の1798年には12個の項目（83～95，8.2パーセント）が見られるが，以後は年に数項目ずつになり，まったく記述のない年もある．最終年の1814年は最終項目（第146項目）があるのみである．著作『整数論』の刊行が1801年であることを想起すると，数学日記を『整数論』の形成過程を明らかにする覚書集と見る視点も考えられると思う．実際，『整数論』の成立のためには多くの数学的発見が積み重ねられなければならなかったが，数学日記を通じて，個々の発見の日にちや，『整数論』の個々のテーマの研究を開始した日時などが相当に特定されるのである．

ダニングトンの著作『ガウスの生涯』の巻末の年譜によれば，『整数論』が刊行されたのは1801年9月29日ということである．

著作『整数論』は数学日記から生まれた大きな果実だが，ガウスの数学思想に影響を与え，数学日記の成立を可能にした有力な先人も存在する．それはオイラーである．数学日記には，ガウスに及ぼされたオイラーの痕跡の数々が具体的にみいだされる．数学日記を解明するうえでオイラーは不可欠であり，逆にオイラーをもってガウスを注釈しようと試みるのが，ガウスをもっともよく理解する道と思われる．

数学日記は『整数論』が刊行された後も記述が続いている．それらは『整数論』の成立以降のガウスの数学の諸相を観察するうえで重要だが，なかでも際立っているのは，３次と４次の相互法則のように『整数論』の直接の継続と見るべき諸項目である．

［参考文献］

○　ライステ（Leiste）

ライステの算術の教科書にはさまれている白紙を雑記帳の代わりにして，ガウスが数学に関する記事を書き込んだ．1798年まで．

○　スケーダ（Scheda）

ガウスの記録帳．ガウス全集では記号「A」を用いて分類整理されている．ガウス全集III所収．

Ⅱ．　『整数論』への道

数学日記の中から『整数論』に直結する項目を拾いたいと思う．『整数論』の中核をなすテーマは平方剰余相互法則（ガウスの用語では「平方剰余の理論における基本定理」）である．

１．　［円周等分］（1796年3月30日）

円周の分割が依拠する諸原理，わけても円周の17個の部分への幾何学的分割が可能であることを・・・

ブラウンシュヴァイク，［1796年］3月30日

○　これは『整数論』第7章の成立を可能にした発見である．

２．　［平方剰余相互法則の第一証明］（1796年4月8日）

素数の平方剰余は自分自身以下のあらゆる数ではありえないことを，証明を通じて確認した．

同じ場所で［ブラウンシュヴァイク］，［1796年］4月8日

○　第130条の言葉「我々は，$4n+1$ という形の任意の素数は，正に取っても負に取っても，それよりも小さなある素数の非剰余になるという事実を厳密に証明した」（ガウス全集Ｉ，98～99頁）に対するガウスの手書きの書き込み．

「この証明は1796年4月8日に発見した」

ここに出ている日付は数学日記の日付と一致する．しかしこの書き込みの記述は数学日記No.2とは一致しない．一致するのは『整数論』第96条の命題（ガウス全集I，74頁）で，それは第130条の命題よりずっとやさしい．そこで，二通りの可能性が考えられる．一つの可能性は，ガウスは1796年4月8日に「二つの定理」を発見したということだが，もう一つの可能性として，ガウスの書き間違いが考えられる．後者の場合，本当は「素数は，自分自身以下のあらゆる数の・・・ではない」とするべきであることになる．ガウスの「書き間違い」と見るほうが有力である．なぜなら，ガウスが基本定理を帰納的に発見したとき（1795年3月），数学日記No.2の命題はすでに知っていたと見なければならないが，『整数論』第130条の命題の証明ははるかにむずかしく，ガウス自身が伝えているように（ガウス全集II，4頁，1808年），成功するまでに1795年3月から1796年4月まで丸1年をかけて集中的な努力を重ねなければならなかったからである．【ガウス全集X1のクラインとバッハマンの註記】

○　ガウス『整数論』第131条に附されたガウスの手書きの書き込み

「1795年3月，帰納的な道筋をたどって基本定理を発見した．1796年4月，この章で報告されている第一証明が見つかった」

○　「基本定理」は平方剰余相互法則を指す．項目「2」にまつわる諸事情により，『整数論』第4章の成立が可能になった時期が判明する．

3．　［円周等分］（1796年4月12日）

円周の角の余弦に対する公式は，・・・

同じ場所で［ブラウンシュヴァイク］，［1796年］4月12日

○　この項目は『整数論』第7章に所属する．

4．　［平方剰余相互法則の一般化］（1796年4月29日）

剰余の法則の，不可分とは限らない剰余と量への拡張．

ゲッチンゲン，［1796年］4月29日

○　この項目は『整数論』第4章に所属する．

15.　［二元二次形式］（1796年6月22日）

（二次形式の「約数の形式」における）結合乗法の考察を始めた．

ゲッチンゲン，［1796年］6月22日

○　『整数論』第5章の標題「二次形式と二次不定方程式」に対するガウスの手書きのメモ　→「1796年6月22日より」

○　項目「15」には，『整数論』第5章「二次形式と二次不定方程式」の出発点が明示されている．ただし文意はよくわからない．主旨としては，二次形式の合成について考察を始めたということと思われる．

16.　［平方剰余相互法則の第二証明］（1796年6月27日）

黄金定理の新しい証明は以前のものとはまったく異なっているが，決して美しさが足りないということはない．

1796年6月27日

○　「黄金定理」というのは「平方剰余の理論の基本定理」すなわち平方剰余相互法則を指す．項目「16」により，『整数論』第5章の核心が得られた時期が明らかになる．

○　『整数論』第262条の言葉

「この原理から，基本定理のみならず，剰余 -1，$+2$，-2 に関する前章の他の諸定理の証明をも与える新しい方法が取り出される」

に対するガウスの手書きのメモは次の通り．

「この方法の原理は1796年7月27日に初めてその姿を現したが，洗練されて現在の形になったのは1800年の春のことである」

このメモに記入されている「1796年7月27日」という日付のうち，「7月」は「6月」の誤記である．

23.　［平方剰余，の第三，四証明］（1796年8月13日）

黄金定理の根拠を求めてどれほど深く歩を進めていかなければならない．わたしは見抜いた．前に二次方程式から出る・・・

ゲッチンゲン，1796年8月13日

30.　［平方剰余相互法則の第三，四証明］（1796年9月2日）

ある種のちょっとしたことを識別したところ，私はついに目的地に到達した．もう少し詳しくいうと，もし

$$p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$$

なら，そのとき $x^\pi - 1$ は，次数 n を越えないいくつかの因子で作られる．そうしてこの事実に基づいて，条件方程式が解けるのである．私はここから黄金定理の二通りの

証明を導き出した.

ゲッチンゲン，［1796年］9月2日

○　平方剰余相互法則の第二証明が得られてから二ヶ月もたたないうちに，第三証明と第四証明の見通しがたち（項目「23」），それからまた一ヶ月もすぎないうちに証明に成功した（項目「30」）.

39.　［円周等分方程式の3次分解式］（1796年10月1日）

40.　［素次数円周等分方程式の既約性］（1796年10月9日）

55.　［正多角形の作図］（1797年1月19日）

○　この3項目「39」「40」「55」は『整数論』第7章に通じている.

56.　［-1, ∓ 2 の剰余指標．平方剰余相互法則の補充法則］（1797年2月4日）

剰余 -1, ∓ 2 に関する諸定理が，他の諸定理と類似の方法で証明された.

ゲッチンゲン，［1797年］2月4日

○　ガウス『整数論』第145条の言葉「さらにその場合には，我々は $+2$ と -2 に関する諸定理をあらかじめ仮定しておかなければならない．ところが上記の我々の証明はそのような定理なしに遂行されたのであるから，そこから，これらの定理を証明する新しい方法が得られるのである」に対するガウスの手書きのメモ
→「1797年2月4日」

○　平方剰余相互法則の二つの補充法則の証明に成功したことが報告された（『整数論』第4章）.

66.　［円周等分方程式の代数的解法］（1797年7月）

二通りの方法で，純粋方程式を解きさえすればよいことを示すことができた.

［1797年7月］

○　『整数論』第7章の主題の一つが確立された.

84.　［二元二次形式の目と類］（1798年4月）

各々の目（もく）の中にいくつかの類が与えられる．これより，数の三つの平方数への分解の可能性は，確固とした理論に帰着される.

ブラウンシュヴァイク，［1798年］4月

○ ガウス全集1，476頁，『整数論』第287条，IIIへの註記

「1798年の4月に初めて，証明が与えられて確認された」

○ 『整数論』第5章

114. ［二次形式の類数公式］（1800年11月30日）

115. ［二次形式の類数公式］（1800年12月3日）

○ 『整数論』第5章

116. ［円周等分方程式］（1801年4月6日）

円周等分を，我々の理論が明示しているものよりも低い次数の諸方程式に還元するのは不可能であることを証明した.

ブラウンシュヴァイク，［1801年］4月6日

○ 『整数論』第7章，第365条の言葉

そうして我々は，これらの高次方程式はどのようにしても回避できないこと，また，より低次の方程式に帰着させるのも不可能であることを完全に厳密に証明することができる.

○ この「還元が不可能であること」が確立されて，『整数論』第7章「円周等分の理論」が完成した.『整数論』が出版される直前のことであった.

III. オイラー積分

オイラー積分とその逆関数の考察も非常に早い時期から始まっている.

32. ［オイラー積分の逆関数］（1796年9月9日）

もし $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ が $\Pi : x = z$ および $x = \Phi : z$ と定められるならば，

$$\Phi : z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3}{1792 \cdot 52} z^{18} - \frac{3 \cdot 185}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} z^{16}$$

のようになる.

［1796年］9月9日

33. ［オイラー積分の逆関数］（1796年9月14日）

もし

$$\phi : \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = x$$

なら,

$$\phi : z = z - \frac{1 \cdot z^n}{2 \cdot n+1} A + \frac{n-1 \cdot z^n}{4 \cdot 2n+1} B - \frac{nn-n-1\left[z^n\right]}{2 \cdot n+1 \cdot 3n+1} C \cdot \cdot \cdot$$

となる.

［1796年］9月14日

○　1796年9月9日，早くもオイラー積分の考察が書き留められた（項目「32」）．項目「32」から項目「33」へと一般化の道が模索されている.

50.　［オイラー積分］（1797年1月7日）

$$\int \sqrt{\sin x}\, \partial x = 2 \int \frac{yy\, \partial y}{\sqrt{1-y^4}}$$

$$\int \sqrt{\tan x}\, \partial x = 2 \int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{1-y^4}} \qquad yy = \frac{\sin}{\cos} x$$

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\, \partial x = 2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^4}}$$

1797年1月7日

○　第二の積分は日記［53］の特別の場合（$n=4$）である．［53］の積分において変数変換 $z^n = \dfrac{1-x^n}{x^n}$ を行うと，方程式

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = -\int \frac{z^{n-2}\, dz}{1+z^n}$$

が得られるが，この式の右辺の積分は日記［54］の積分の特別の場合である.

○　レムニスケート積分が現れている.

51.　［レムニスケート曲線］（1797年1月8日）

レムニスケート曲線を調べ始めた．この曲線は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

に依存する.

［1797年］1月8日

○　レムニスケート曲線の弧長積分として，レムニスケート積分が認識された.

○　シュレジンガーの註記（ガウス全集X1）

日記「51」はスケーダ（Scheda）Acに出ている記事

「レムニスケート関数の考察を始めた　1797年1月8日」

と一致する．この時期より前に，ガウスはレムニスケート積分の逆関数の級数展開を実行した．ガウスの遺稿「数学演習」，第6条；ガウス全集X1，141頁参照．しかしそれは日記「51」と矛盾するわけではない．1797年1月8日より前には，ガウスにとってレムニスケート積分は，より一般的な積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

の一つの個別的な場合（$n=4$ の場合）にすぎなかった．ところが1797年1月8日に至り，レムニスケート積分の意義を認識し，この積分に固有の研究に目を向け始めた．

ガウスがレムニスケート積分の意義を認識する契機として作用したのは，オイラーの加法定理である．

52.　[オイラー積分]（1797年1月10日）

オイラーの基準の論拠を自力で発見した．

[1797年] 1月10日

○　シュレジンガーの註記（ガウス全集X1）

ここで話題にされているのは，二項積分と言われる積分 $\int x^{m-1}\left(a+bx^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$ の可能性に関する「オイラーの判定基準」（「ニュートンの判定基準」というほうが適切である）である．オイラー『積分計算教程』巻，§104（オイラー全集，シリーズ1，巻11，62頁）．

53.　[オイラー積分]（1797年1月12日）

完全積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

が円の求積に帰着されることを考量した．

[1797年] 1月12日

○　オイラー『積分計算教程』巻1，§352（オイラー全集，シリーズ1，巻11，226頁）に，完全積分の数値が出ている．

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

§353には $n=2,3,4,6$ の場合の数値が算出されている．

○　に出ているシュレジンガーの註記（ガウス全集X1）

ガウスが言いたいのは，この積分の超越性はπのみに依存するということであろう．なぜなら，$n \sin \frac{\pi}{n}$は整係数方程式の根として認識されるから．

54.　［オイラー積分］（1797年1月）

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

を決定するための簡単な方法．

［1797年1月］

○　ラインとシュレジンガーの註記（ガウス全集X1）

「ライステ」の27，91，92頁に，関連する公式や計算が出ている．それらの基礎をなす方法はすべて，オイラーがこの積分を取り扱った方法である．オイラー『積分計算教程』巻Ｉ，1768年，第77条；オイラー全集，第一系列，巻11，41頁．また，オイラーの論文「一個の変化量を含む微分式を積分する方法」ペテルブルク学士院紀要14（1744/6），1751年，3頁；オイラー全集，第一系列，巻17，70頁，特に第44～59条参照．

59.　［オイラー積分］（1797年3月2日）

$\int e^{-t^\alpha}dt$ および $\int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$ という形の積分表示式の間に，私はある比較を試みた．

［1797年］3月2日

○　ガウス全集X1のシュレジンガーの註記

積分区間は0から$+\infty$までと見てよいと思う．二つの積分の各々において，それぞれ変数変換

$$t^\alpha = x, \quad u^\gamma = \frac{x}{1-x}$$

を行うと，

(1)
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt$$

(2)
$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1}(1-x)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1}\,dx$$

となる．すなわち，積分$\int e^{-t^\alpha}dt$はガンマ関数であり，積分$\int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$はベータ関数である．今日の記号で表記すると，

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),\qquad \int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}=\frac{1}{\gamma}B\left(\frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

というふうになる．ガウス日記「59」で語られている「積分の比較」というのは，ガンマ関数とベータ関数の間の周知の関係式

$$B(p\,,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を指すと考えられる．

オイラー積分の初出はオイラーの次の論文である．

「値 $x=0$ から $x=1$ までにわたって積分して得られる積分表示式 $\int x^{f-1}\,dx\,(l\,x)^{\frac{m}{n}}$ の展開」ペテルブルク学士院新紀要16（1771），1772，91頁．オイラー全集，第一系列，巻17，316頁．特に§25，330頁と「補遺」354頁参照．

60.　［レムニスケート曲線の等分］（1797年3月19日）

レムニスケート曲線を n 個の部分に分けると，なぜ次数 n^2 の方程式し導かれるのだろうか．

1797年3月19日

○　高木貞治『近世数学史談』32頁より

ガウスは円周等分の拡張としてレムニスケートの等分を狙っていたのであろう．Leiste87-101頁に五等分の計算が記されている．

$s(5\,u)=0$ は $s(u)$ に関して25次の方程式で，五つの実根の外に二十の虚根を有する．それらの虚根は何を意味するか．二十年後にアーベルも同様の疑問から楕円函数発見の端緒を得たのである．この問題を解決する為に，ガウスは $s(u)$，$c(u)$ を複素変数の函数として考察する決心をしたのであろう．函数論の芽生である！

○　シュレジンガーの註記（ガウス全集X1）より

ガウス日記の最終頁に，

Quantitates imaginariae

Quaeritur criterium generale, secundum quod functiones plurium variabilium complexae ab incomplexis dignosci possint

（虚量．多変数の複素関数を非複素関数から識別することを可能にしてくれる一般的な判定基準を求めること）

というメモが出ている．しかも，ぼやけてはいるがはっきりとした文字で「1797年4月15日」という日付が記入されている．この日付により，上記のメモは，日記「60」から「63」に至る発見に続く時期に書かれたことがわかる．すなわち，ガウスはレムニスケートの等分理論における発見に触発されて，複素変数の関数の

考察へと向かっていったのである．

○ オストワルトクラシカー256のテキスト「ガウス日記」の冒頭に，日記のオリジナルのファクシミリが出ている．最終頁は第20頁目になり，そこに上記のメモが見られるが，「1797年4月15日」という日付は見あたらない

61.　［レムニスケート積分］（1797年3月）

$$\sum\left(\frac{mm+6mn+nn}{(mm+nn)^4}\right)^k$$

は，積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

の冪に依拠する．

［1797年3月］

62.　［レムニスケート曲線］（1797年3月21日）

レムニスケート［曲線］は幾何学的に五つの部分に分けられる

1797年3月21日

○ ガウスによるレムニスケートの五等分の計算は「ライステ」102頁以下に出ている．ガウス全集X1，161頁．高木貞治『近世数学史談』36〜37頁参照．

○ レムニスケート曲線の幾何学的等分理論はオイラーには見られない．ここにはファニャノの影響が現れていると思われる．

63.　［レムニスケート関数］（1797年3月29日）

レムニスケート曲線に関連する他の多くの事柄の中で，私は次に挙げる事柄に注目した．

［a)］　二倍弧の［レムニスケート］正弦を［分数の形に分母と分子に］分けて表示するとき，その分子は，単弧の［レムニスケート］正弦の分子・分母×［レムニスケート］余弦の分子・分母の2倍に等しい．

［b)］　分母＝(分子)^4＋(分母)^4

［c)］　ここで弧π'に対応するこの分母をθと置くと，弧$k\pi'$の［レムニスケート］正弦の分母はθ^{kk}に等しい．

［d)］　ところで，

$$\theta=4.810480$$

である．

［e)］　この数の双曲線対数は

$$= 1.570796, \quad \text{すなわち} \quad = \frac{1}{2}\pi$$

である．これは実に特別に言及するだけの値打ちのある事柄である．この事態の証明は解析学において非常に重要な進歩を約束する．

［1797年］3月29日

91 a.　　［レムニスケート関数］（1798年7月）

$$1 + \frac{1}{9}\,\frac{1\cdot 3}{4\cdot 4} + \frac{1}{81}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8} + \frac{1}{729}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12} = 1.02220\cdots$$

$$\frac{1.8110\cdots}{3.1415\cdots}\sqrt{6} = \frac{\varpi}{2}\,\frac{1}{\pi}\sqrt{6}$$

［1798年］7月

91 b.　　［レムニスケート関数］（1798年7月）

$$\text{arc. sin lemn. sin } \varphi - \text{arc. sin lemn. cos } \varphi = \varpi - \frac{2\,\varphi\,\varpi}{\pi}$$

$$\begin{aligned}\text{sin lemnisc. }[a] = {}& 0.95500598 \sin[a] \\ & - 0.0430495 \;\; \sin 3[a] \\ & + 0.0018605 \;\; \sin 5[a] \\ & - 0.0000803 \;\; \sin 7[a]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \text{lemn. }[a] = 0.4569472 = \frac{\pi}{\varpi\,\varpi} \\ -[0.4569472]\cos 2[a]\cdots\end{aligned}$$

$$\text{arc. sin lemn. sin } \varphi = \frac{\varpi}{\pi}\varphi + \left(\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\,\varphi + \left(\frac{11}{2}\,\frac{\varpi}{\pi} - \frac{12}{\varpi}\right)\sin 4\,\varphi + \cdots$$

$$\begin{aligned}\sin^5[\varphi] = {}& 0.4775031 \sin[\varphi] \\ & + 0.03 \;\cdots\cdots [\sin 3\,\varphi] \\ & \cdots\cdots\end{aligned}$$

92.　　［レムニスケートについて］（1798年7月）

レムニスケートに関して，すべての期待を越えたもっとも優美なるものをわれわれは獲得した．たしかにこれらの方法により，それはわれわれに新しい分野を切り開いてくれるであろう．

ゲッチンゲン，［1798年］7月

98.　　［算術幾何平均］（1799年5月30日）

1 と $\sqrt{2}$ の間の算術幾何平均の値は $\frac{\pi}{\varpi}$ と等しいことを，小数 11 位まで確認した．このことの証明を通じて，解析におけるまったく新しい分野がまちがいなく切り開かれるであろう．

ブラウンシュヴァイク，［1799年］5月30日

102.　[算術平均と幾何平均]（1799年12月23日）

算術・幾何平均それ自体は積分量である．このことが証明された．

［1799年］12月23日

105.　[楕円積分の理論]（1800年5月6日）

超越的な量

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\alpha x^2\right)\left(1-\beta x^2\right)}}$$

の理論をきわめて一般性のある地点まで押し進めた．

ブラウンシュヴァイク，［1800年］5月6日

108.　[楕円関数論．レムニスケート関数について]（1800年5月末，6月2，3日）

（最も一般的に採った）レムニスケート正弦曲線の分子と分母を積分量に帰着させることに成功した．それと同時に，あらゆるレムニスケート関数（ここで念頭に置いているのはレムニスケート関数だけなのだが）の，自然な根拠に基づく無限級数への展開が導出された．

これに加えて・・・

［1800年］5月末，6月2，3日

109.　[算術平均と幾何平均]（1800年6月3日）

与えられた二つの数の間にはつねに，無限に多くの算術幾何平均と調和幾何平均が存在する．これらの相互関係を完全に認識することは，われわれに幸福をもたらした．

［1800年］6月3日

110.　[楕円積分]（1800年6月5日）

我々の理論を今や即座に楕円超越関数に適用した．

1800年6月5日

Ⅲ．　『整数論』以降

『整数論』の刊行以後も数論の究明は続き，平方剰余相互法則の別証明と，高次冪剰余相互法則の発見と証明が模索された．

118.　［平方剰余相互法則の第五証明．ガウスの和の符号決定問題］(1801年5月中旬)

基本定理を証明する第五の方法が，円の分割の理論のきわめて優美な一定理，すなわち

$$a \equiv \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad (\mathrm{mod}\,.\,4)$$

に応じて

$$\sum \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \frac{n\,n}{a} P = \begin{matrix} +\sqrt{a} & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ +\sqrt{a} & +\sqrt{a} & 0 & 0 \end{matrix}$$

となるという定理の支援を受けて立ち現れた．ここで n のところには 0 から $(a-1)$ までのあらゆる数をあてはめていく．

ブラウンシュヴァイク，［1801年］5月中旬

○　ここで語られているのは，いわゆる「ガウスの和」の符号決定を通じて平方剰余相互法則の証明が得られるという数学的事実の発見である．証明はむずかしく，『整数論』の刊行には間に合わなかったが，円周等分論を『整数論』という名の書物に収録したガウスの真意は，この命題の認識に基づいていると思う．1805年8月30日の日付をもつ日記「123」に至り，証明に成功したことが報告された．

123.　［平方剰余相互法則．ガウスの和の符号決定問題の解決］（1805年8月30日）

以前1801年5月に述べたことのあるきわめて美しい定理の証明．4年以上もかけて心魂を傾けて追い求めてきたが，ようやく完成した．最近の諸論文のうちのⅠ．

1805年8月30日

○　1801年5月半ばの日記「118」で提起された「ガウスの和の符号決定問題」の解決が報告された．この間，丸4年以上の歳月が流れている．

○　1805年9月3日のオルバース宛の書簡にも，証明の成功に至る経緯が報告されている．

○　この成果は論文「ある種の特異級数の和」において公にされたが，この論文がゲッチンゲン科学協会に提出されたのは，証明を獲得してからさらに3年後の1808年8月24日のことであった．

130.　［三次と四次の相互法則］（1807年2月15日）

三次および四次の剰余に関する理論が開始された．

1807年 2 月15日

131.　［三次と四次の相互法則］（1807年2月17日）

2月17日にはずっときれいに完成されて姿を現わした．証明はなお欠けている．

［1807年2月17日］

132.　［三次と四次の相互法則］（1807年2月22日）

今やこの理論の証明が，ある非常に優美な方法によってみいだされ，すっかり完成した．これ以上望むべきことは何も残されていない．かくして同時に，平方剰余と平方非剰余が著しく明瞭にされるのである．

1807年2月22日

133.　［三次と四次の相互法則］（1807年2月24日）

前述の理論にき非常に値打ちのある続きを付与する諸定理へと通じる道筋が，優美な証明により見つかった（すなわち，どんな原始根に対しても，・・・

$$aa+27bb=4p; \quad aa+4bb=p$$

［1807年］2月24日

134.　［平方剰余相互法則の第六証明］（1807年5月6日）

基本定理のまったく新しい証明が，完全に初等的な原理に基づいていることを明らかにした．

［1807年］5月6日

135.　［円周等分方程式］（1808年5月10日）

三つの周期に分ける理論（358条）が，格段に簡単な土台に帰着された．

1808年5月10日

137.　［三次形式］（1808年12月23日）

三次形式の理論と，方程式

$$x^3+ny^3+nnz^3-3nxyz=1$$

の解法に着手した．

［1808年］12月23日

144.　［四次剰余相互法則］（1813年10月23日）

四次剰余の一般理論の基礎を確立しようとして，およそ7年間にわたってこのうえない情熱を傾けて探究を続けたが，何も実を結ばずに終わるのが常であった．それを，

幸福なことに，わたしたちに息子が生れたのと同じ日についに明るみに出した.

1813年10月23日

146.　［四次剰余相互法則とレムニスケート関数の関係］（1814年7月9日）

帰納的に行なわれるあるきわめて重要な観察を通じ，四次剰余の理論はレムニスケート関数ときわめて優美に結び合わせられる．すなわち，$a+bi$ は素数とし，$a-1+bi$ は $2+2i$ で割り切れるとすると，合同式

$$1 \equiv x^2 + y^2 + x^2 y^2 \quad \mathrm{mod}.\, a+bi$$

のあらゆる解の個数は

$$(a-1)^2 + b^2$$

に等しい．ただし

$$x=\infty,\ y=\pm i;\ x=\pm i,\ y=\infty$$

も解に含めることにする.

1814年7月9日

［平成16年（2004年）2月1日（日）］