ガウスの Theorema elegantissimum

西和田　公正*

2003.10.26

1　序

ガウス全集VIII巻の98ページにTheorema elegantissimum*1という標題を持つ命題が収められている(Werke[5])。この直後にあるR. Frickeの解説によると、この命題は、ガウスが所蔵していたEuler; Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes ([11.2])の手書き写本の最後のページ(余白)にある書き込みとして見つかったものだそうである。

上のオイラーの本は、彼の変分法の研究書として名高く、Carathéodoryが「今までに書かれた数学の書物のなかで最も美しいもののひとつ」と評したほどである。この本と、上のガウスによる書き込みが内容的にどのように関係しているのか、筆者には不明である。しかし、ガウスがこのオイラーの名著を高く評価していたことは疑いのないことなので、たとえ余白と言えども、そこへ何かを書き込んだとすれば、ガウスにとって重要な意味を持つ結果であったことが想像される。

さてこのTheorema elegantissimumの内容は次のようになる。

定理 (TE)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^2 x^4+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2 x^6+\cdots, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^3+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^5+\cdots, \end{aligned}$$

とおくと、

$$\sin\varphi f(\sin\varphi)f'(\cos\varphi)+\cos\varphi f(\cos\varphi)f'(\sin\varphi)=\frac{2}{\pi\sin\varphi\cos\varphi},$$

* 京都大学大学院理学研究科

*1 the most elegant theorem

2　agM と確定特異点を持つ微分方程式の基本解

2 数 a, b の算術幾何平均 (agM と書く) とはアルゴリズム

$$(2.1)\qquad a_0 = a,\ \ b_0 = b,\ \ a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ \ b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2},\ \ n = 1, 2, \ldots.$$

によって定義される 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限値 $M(a,b)$ のことである。

前回の講演でもふれたが、ガウスはこのアルゴリズムを逆向きにたどることも考えた (西和田 [18, §3])。このとき、$\{a_n\}$, $\{b_n\}, n = 0, -1, -2, \cdots$ で $a_n \geqq b_n$ と仮定すると、$n \to \infty$ のとき $2^{-n}a_{-n}$ は $M(a,c)$ に収束する。ここで、$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ である。以後全集 X 巻の記号に合わせて、$k = b/a,\ k' = c/a$ とおくと、$M(a,b) = aM(1,k),\ M(a,c) = aM(1,k'),\ k^2 + {k'}^2 = 1$ が成立する。

agM の整級数展開の結果より、([18, §4])

$$\frac{1}{M(1,k')}\left(= \frac{1}{M(1+k, 1-k)}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \cdots,$$

が成立する。ガウスの超幾何級数の記号 $F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$ を用いると

$$\frac{1}{M(1,k')} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)$$

とも書ける。$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right)$ は超幾何微分方程式

$$(2.2)\qquad x(x-1)y'' + (2x-1)y' + \frac{1}{4}y = 0$$

をみたすので、独立変数の変換 $x = k^2$ を行うと、$M(1,k')^{-1} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)$ がみたす微分方程式として

$$(2.3)\qquad k(k^2-1)y'' + (3k^2-1)y' + ky = 0$$

が得られる。

また、方程式 (2.2) は変数変換 $x \to 1-x$ に関して不変であるので、$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-x\right)$ もまた同じ方程式 (2.2) の解になることが分かる。このことは $M(1,k)^{-1} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-k^2\right)$ も方程式 (2.3) の解であることを意味している。

が成立する。

このTheorema elegantissimumという標題をつけたのは、ガウス自身なのか、全集の編纂者なのかというのは興味深い点であるが、そのことについてFrickeの解説には何も書かれていない*2。しかし、編纂者がつけた標題は殆どドイツ語であり、また当該部分の数学的内容を簡潔、事務的に表したものが多いという点からすると、上のやや主観の入ったラテン語標題はガウス自身によると考えた方が自然である。このことはガウスが上の結果をいかに重要視していたかの一つの証左であろう。*3

ガウスが上の結果を重要視していたことを示すもう一つの事実がある。全集X巻の220ページに、上のTheorema elegantissimumと見かけは異なるが、内容的にはほとんど同一な命題が載っている(Werke[6.1, S.220])。これに対しては、やはりガウス自身がつけたと思われるドイツ語の Schöner Lehrsatz というタイトルがあてられている。この2つのタイトルはラテン語とドイツ語の違いはあっても意味はほとんど一緒であろう。このことからも、ガウスがこの結果の重要性をいかに強調したがっていたかが感じられる。Schöner Lehrsatzの内容は次の様になる。

定理 (SL) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\lambda = M(a, c)$, $\mu = M(a, b)$ とおくと、

$$\frac{\dfrac{2da}{a} - \dfrac{2db}{b}}{a^2 - b^2} = \frac{\dfrac{\pi d\lambda}{\lambda} - \dfrac{\pi d\mu}{\mu}}{\lambda\mu}.$$

本講演では次の3点を可能な限り明らかにすることを目標にする。

1. 上の(TE)と(SL)が同一の内容を述べていること。
2. ガウスは(TE)をどのようにして証明したか。
3. オイラーの研究との関連。

*2 編纂者にとっては自明なことなので、わざわざ書かなかったのであろう。

*3 本講演終了後、杉浦光夫先生から次のようなご指摘をいただいた。「ガウス全集第IV巻「曲面論」, Disquisitiones generales circa superficies curvas, にも, theorema ⋯ elegantissima ⋯, というような表現があり, egregium theorema とか gravissimum theorema というのもでてくる. ガウスは数学の諸結果を独特の審美観によって評価しているようである。」

$M(1,k')^{-1}$ は $k=0$ で正則だが、$M(1,k)^{-1}$ はどうであろうか。agM のアルゴリズムから導かれる不等式を使うと $M(1,k)\to 0$ $(k\to 0)$ がいえるので、$M(1,k)^{-1}\to\infty$ $(k\to 0)$ となり、$k=0$ は $M(1,k)^{-1}$ の特異点である。この性質は $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;x\right)$ の収束半径が 1 であることからも明らかであろう。以上から、2 つの解 $M(1,k)^{-1}$, $M(1,k')^{-1}$ は一次独立であることが分かり，方程式 (2.3) の基本解を構成していることがいえた。

agM がみたす微分方程式 (2.3) は、ガウスの 1800 年の遺稿（Werke[3, S.370]）に記されているが、実際にははるか以前から認識していたものと思われる。この方程式は特異点を 4 つもち $(0,\pm 1,\infty)$、いわゆる超幾何微分方程式の分類に入らないことに注意する。

ガウスは更に 2 つの解のうち原点を特異点にもつ $M(1,k)^{-1}$ の発散評価を与えた。

$$\lim_{x\to 0} M(1,x)\log\frac{4}{x}=\frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

上の式は一次近似であるが（正確には発散部分と定数項）、ガウスは Werke[5.1, S.186] において、上よりかはるかによい近似も与えている。また、この式は (TE) の証明と密接に関係している。

3 いくつかの同値な表現

最初に記号を整理する。まず、(TE) にでてくる整級数をもう一度書いてみる。

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^2 x^4+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2 x^6+\cdots, \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^3+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^5+\cdots. \end{aligned}$$

§2 で述べたことを踏まえて、

$$A(k)=\frac{1}{M(1,k)}=f(k'),\quad B(k)=\frac{1}{M(1,k')}=f(k) \tag{3.1}$$

とおくことにする。くどいようだが、A, B はともに k の関数として、f は整級数としての表示である。上の式が成立するのはもちろん f の収束円内, $|k|,|k'|<1$, においてである。

まず、次の式で, $k=\sin\varphi$, $k'=\cos\varphi$ とおけば、(TE) そのものであることに注意する。

$$\frac{2}{\pi kk'}=kf(k)f'(k')+k'f(k')f'(k). \tag{3.2}$$

この式をA, Bを用いて書き直すと:

$$\frac{2}{\pi} = kk'\left(kB\frac{dA}{dk'} + k'A\frac{dB}{dk}\right).$$

さらに、$d/dk' = -k'd/kdk$ より、

$$\frac{2}{\pi} = -kk'^2\left(B\frac{dA}{dk} - A\frac{dB}{dk}\right), \tag{3.3}$$

または、

$$\frac{2}{\pi} = k(k^2-1)\left(B(k)\frac{dA(k)}{dk} - A(k)\frac{dB(k)}{dk}\right). \tag{3.4}$$

最後の式(3.4)の特徴は変数がkのみで書かれていることである。この式はガウスの遺稿で(SL)を証明する箇所(Werke[6.1, S.220])にみられる。またSchlesingerもこの式を取りあげている(Werke[6.3, S.254])。

(3.3)を今度はagMを使って書き直すと:

$$\frac{2}{\pi} = -kk'^2\left(\frac{1}{M(1,k')}\frac{d}{dk}\frac{1}{M(1,k)} - \frac{1}{M(1,k)}\frac{d}{dk}\frac{1}{M(1,k')}\right),$$

または、微分形で書いた式として次が得られる。

$$\frac{2}{\pi}d\,\log k = \frac{k'^2}{M(1,k)^2}d\,\frac{M(1,k)}{M(1,k')}. \tag{3.5}$$

$k = b/a,\ k' = c/a$ を代入すると、

$$\frac{1}{c^2}d\,\log\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)^2}d\,\frac{M(a,b)}{M(a,c)}, \tag{3.6}$$

が成立する。ガウスがSchöner Lehrsatzと名づけた式は上の式のわずかな変形に他ならない。

$$\frac{2}{c^2}\left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right) = \frac{\pi}{M(a,b)M(a,c)}\left(\frac{dM(a,c)}{M(a,c)} - \frac{dM(a,b)}{M(a,b)}\right). \tag{3.7}$$

以上で式 (3.2)~(3.7) が簡単な式変形で互いに移り合うことを示した。従って、このうちの一つが証明できれば残りも成立することが分かる。我々の文脈では(3.4)が最も証明しやすい形をしているので、次節でその証明を行うことにする。

4　(3.4) の証明

ガウスによる (SL) の証明は全集X巻に収められた遺稿の中に見いだされるが (Werke[6.1, S.220–221])、これは余りにも短く、取っつきの悪いものになっている。同じ巻の後ほどに、Schlesinger による平易な表現で敷衍した記述があり (Weke[6.1, S.220–221])、以下に述べるのは大体その線に沿ったものであるが、記号などを若干変えたところもある。

A, B が共に微分方程式 (2.3) の解であることを使うと、

$$((3.4)\text{ の右辺})' = (3k^2-1)(BA'-AB') + (k^3-k)(BA''-AB'') = 0.$$

がいえるので、定数 C をもって、

$$k(k^2-1)\left(B(k)\frac{dA(k)}{dk} - A(k)\frac{dB(k)}{dk}\right) = C. \tag{4.1}$$

と書ける。

この定数 C を決定するためにガウスは Euler; Animadversiones in Rectificationem Ellipsis, にある手法を利用している (Euler[11.1])。

すなわち、長径が a, 短径が c である楕円の (1/4) 周長 q を離心率による級数展開で書くことから始める。

$x = a\cos\theta,\ y = c\sin\theta,\ k = b/a,\ k' = c/a$ とおくと、

$$(dx/d\theta)^2 + (dx/d\theta)^2 = a^2(1-(1-(c/a)^2)\cos^2\theta) = a^2(1-k^2\cos^2\theta)$$

などから、

$$q = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,d\theta, \tag{4.2}$$

$$= \frac{\pi a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots\right\}. \tag{4.3}$$

上の式は積分 (4.2) の記法を少し変えた点を除けば、Euler[11.1, S.125–128] に見られる。一方で、

$$B = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2k^4+\cdots,$$

より、$(1-k^2)(kB'+B)$ は (4.3) 右辺の $\{\ \}$ 部分に一致するので、

$$q = \frac{\pi a}{2}(1-k^2)(kB'+B).$$

ここで、$k' \to 0, (k \to 1,\ c \to 0,\ a:$ 一定$)$ としてみる。短径が0にいくとき、楕円の(1/4)周長は長径に収束する。すなわち、$q \to a$ より

$$(1-k^2)(kB'+B) \to \frac{2}{\pi}. \tag{4.4}$$

次に

$$\lim_{k\to 1}(1-k)B = 0. \tag{4.5}$$

を示す。これに関してはSchlesingerはただauf elementare Weiseとだけ書き、詳しいことは何も書いていない。ここでは、どのような証明が可能か考えてみたい。

$k=1$ の近くでの B の様相は、$k=0$ の近くでの A の様相と同じなので、後者を考えることにする。

A は方程式(2.3)の原点での特異解であるが、この方程式の $k=0$ における決定方程式は0を重複解として持つ。確定特異点型の方程式の一般論より、一般解は高々 $\log k$ のオーダーで発散することが分かる。(たとえば、島倉紀夫[20, 第4章])

しかし、このような一般論はFuchs以後の話であるので、ここでは「特殊論」にこだわりたい。

B は $k=0$ での正則解なので、$A = wB$ とおいて、方程式(2.3)に代入すると(定数変化法)、

$$Bw'' + \left(2B' + \frac{3k^2-1}{k(k^2-1)}B\right)w' = 0,$$

となるので、これを積分し

$$A = B(C'\log k + g(k)),\quad C':\text{定数},\ g: k=0\ \text{で正則},$$

がえられる。これより $\lim_{k\to 0} kA = 0$ となり、(4.5)がいえる。ちなみに $C' = -2/\pi$ であるが、g を完全に決定するのは難しい。

(4.4),(4.5)より、

$$\lim_{k\to 1} k(1-k^2)B' = \frac{2}{\pi}, \tag{4.6}$$

さらに、$\lim_{k\to 1} A = f(0) = 1,\ \lim_{k\to 1}\frac{dA}{dk} = -\frac{k}{k'}\frac{d}{dk'}f(k')|_{k'=0} = -\frac{1}{2}$ より、

$$C = k(k^2-1)\left(B(k)\frac{dA(k)}{dk} - A(k)\frac{dB(k)}{dk}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

となり、(3.4)が証明された。

5 Animadversiones etc. との関連

ガウスは前節でも示したように、Euler; Animadversiones etc. の方法論から強く影響を受けているが、この節ではガウスが $M(1,x)$ の漸近挙動 ($x \to 0$ or ∞) を調べる際、Animadversiones にある楕円の求長法をどのように利用したかを検討したい。

オイラーは、長径 $a=1$, 短径 p の楕円の (1/4) 周長 q を p の関数と考え、その性質を調べた。まず, q のみたす微分方程式を求めた (Euler[11.1, S.147])。

$$p(1-p^2)\frac{d^2q}{dp^2}-(1+p^2)\frac{dq}{dp}+pq=0.$$

q にとって $p=0$ は特異点であるが、オイラーはこの方程式を利用して、$p\to 0$ における漸近展開を導くのに成功した (同 S.155)。

$$q=1+Ap^2+Bp^4+\cdots-\left(\frac{1}{2}p^2+\beta p^4+\cdots\right)\log p.$$

更にオイラーは相当に面倒な計算の後、

$$A=\log 2-\frac{1}{4},$$

を示した。

ガウスは上のオイラーの成果を熟知した上で、自らの agM 理論への応用を計った。ここで前節で用いた記号との関係を整理すると、$p=c/a=k', k=\sqrt{1-p^2}$ であるので、

$$q=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1-p^2)\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$\frac{dq}{dp}=\int_0^{\pi/2}\frac{p\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}\,d\theta$$

従って、

$$\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp}+q=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{k^2\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}}+\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta \tag{5.1}$$

一方で agM と楕円積分の関係より (cf. 西和田 [18, §7]),

$$\frac{1}{M(a,c)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}}.$$

両辺にaをかけ、$p=c/a$を代入すると、

$$\frac{1}{M(1,p)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-p^2)\sin^2\theta}},$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}. \tag{5.2}$$

(5.1), (5.2) より

$$\frac{1}{M(1,p)} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp}+q\right). \tag{5.3}$$

オイラーの成果を利用すれば右辺の漸近展開を求めるのはたやすい。

$$q = 1 + (\log 2 - \frac{1}{4})p^2 - \frac{1}{2}p^2\log p + p^4\{\cdots\},$$

$$\frac{dq}{dp} = (2\log 2 - 1)p - p\log p + p^2\{\cdots\},$$

$$\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp} + q = 2\log 2 - \log p + p^2\{\cdots\}.$$

ゆえに、

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,p)} = \log\frac{4}{p} + p^2\{\cdots\},$$

となり、(2.4)が導かれる。

6 まとめ

(TE)と(SL)は、少なくともその証明に注目する限り、agMの漸近理論の一部と見なせないこともない。本論の§4, §5で明らかにしたように、ガウスのagM研究は、オイラーのAnimadversiones etc. における楕円の求長問題の研究とパラレルに進行している部分がある。さらに、本質的な部分でオイラーが開発したテクニックを利用している箇所も見受けられる。

このようにして、オイラーの研究成果を受け取り、独自に発展させたガウスは、自らの成果の一つである(TE)をオイラーの別の著書Methodus etc. の余白ページに書き込んだわけである。オイラーから受け取ったものに対する一つの返答としての意味を(TE)に託したのかも知れない。ガウスにとって、オイラーの存在とは何であったのか。当然学問の先達であったわけだが、また同時にライバルとしての存在感もあったのかも知れない。このようなガウスの心理に思いを馳せると興味が尽きない。

文献

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855, *Werke*

Band III (Analysis)

[1] S.331–355, Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singule partes describuntur uniformiter esset dispertita, Göttingen 1818

[2] S.357–360, 上記論文の報告 (Anzeige)

[3] S.361–403 (遺稿), Arithmetisch-geometrisches Mittel,

S.361–371, ParsI: De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmet.-geometricorum.

S.372–374, ParsII: De functionibus transscendentibus quae ex differentiatione mediorum arithmetico-geometricorum oriuntur.

S.375–403, "Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch geometrische Mittel".

[4] S.433–480, Zur Theorie der neuen Transscendenten,

S.461–469, IV Hunderte Theoreme über die neuen Transscendenten.

Band VIII (Bd.I–IV の補遺)

[5] S.98, Theorema elegantissimum.

Band X, 1 (遺稿と書簡)

[6] S.172–286, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels,

[6.1] S.172–231 (遺稿より)

S.172, I Specimen termini medii si nomine uti licet arithmetico-geometrici,

S.177, II Reihenentwicklung und Beziehungen zum Ellipsenumfang,

S.181, III Differential- und Funktionalgleichungen,

S.184, IV Investigatio functionum quae ex evolutione mediorem arithmetico-geometricoreum oriuntur,

S.194, V Theoria sinus lemniscati universalissime accepti,

S.207, VI Differentiatio mediorum arithmetico-geometrica pertinentes,

S.209, VII Algorithmi ad media arithmetico-geometrica pertinentes,

S.213, VIII Der bilineare Algorithmus,

S.217, IX Die Beziehung zwischen den unendlich vielen Werten des agM. Unmittelbare Anwendung der Theorie auf die elliptischen Transzendenten und auf die Rektifikation der Ellipse.

[6.2] S.232–251 (書簡), agM に関係する部分

S.245, Schumacher an Gauß (5.4.1816)

S.247, Gauß an Schumacher (4.1816)

[6.3] S.251–257, Abriß der Theorie des agM, (L. Schlesinger による解説)

[6.4] S.257–283, Erläuterungen zu [I], S.172–176, (同上)

[6.5] S.283–286, Erläuterungen zum Briefwechsel, S.232–251, (同上)

[7] S.485–574, Tagebuch, 日記の中で agM に関係する箇所 :

Nr.98 (30.5.1799), S.542, $M(\sqrt{2},1) = \pi/\tilde{\omega}$

Nr.100 (Nov.1799), S.544, 新しい発見

Nr.101/102 (Dez.1799), S.544, agM と楕円積分

Nr.105 (6.5.1800), S.546, 楕円積分

Nr.106 (22.5.1800), S.547, agM 理論の補足

Nr.109 (3.6.1800), S.550, 無限個の値の集まりとしての agM

Nr.139 (20.6.1809), S.569 agM と無限積

Nr.140 (29.6.1809), S.569 同上

Band X, 2 (ガウスの業績に関する解説、論説)

[8] L. Schlesinger, Über Gauß Arbeiten zur Funktionentheorie, 2. Abhandlung

その他の文献

[9] Borwein, J. & P. Borwein, *Pi and the agm: a study in analytic number theory and computational complexity,* Wiley, 1987.

[10] Cox, D. A., The arithmetic-geometric mean of Gauss. *Enseign. Math.,* **30**(1984), 275-330.

[11] Euler, L., *Opera Omnia*, Ser. I, Birkhäuser,

[11.1]vol.20, p21–55, Animadversiones in Rectificationem Ellipsis, *Opuscula varii argumenti* **2**(1750), 121–166.

[11.2]vol.24, p231–297, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes,* Bousquet, Lausanne,1744.

[12] Fuchs, W., Das arithmetisch–geometrische Mittel in den Untesuchungen von Carl Friedrich Gauß ,*Gauss–Gesellschaft,* Mitteilungen Nr.9(1972), 15–38.

[13] Geppert, H., Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. *Math. Annalen* **99**(1928), 162-180.

[14] Lagrange, J.L., Œuvres, Vol.II. Gauthier-Villars, Paris, 1868.

[15] Nishiwada, K., A holomorphic structure of the arithmetic-geometric mean of Gauss. *Proc. Japan Acad.* **64**(1988), 322-324.

[16] 西和田公正, 複素算術幾何平均のある構造定理, 人間・環境学 **3**(1994), 1-14.

[17] Nishiwada, K., Algorithm of the arithmetic-geometric mean and its complex limits. *Hokkaido Math. J.* **26**(1997), 541-564.

[18] 西和田公正, ガウスの算術幾何平均をめぐって、津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 24(2003), 59–70.

[19] 斎藤利弥, 線形微分方程式とフックス関数 1, 河合文化研究所, 1991.

[20] 島倉紀夫, 常微分方程式, 裳華房, 1988.

[21] von David, L., Arithmetisch-geometrisches Mittel und Mudulfunktion. *J. für die Reine u. Ang. Math.* **159**(1928), 154-170.