代数構造の変形理論とその周辺

久保富士男

はじめに

“変形”という言葉をよく耳にします。数学，工学のみならず日常会話にもとび出してくる。この概念をどのように数学的に表現すればいいのでしょうか？　その数学的書式からどのような理論が生まれ，どのように応用されるのでしょうか？数学の中での出来事に，幾何学的対象の変形を代数的に取り扱った Gerstenhaber の変形理論があります。この理論の周辺を描写しながら、変形について論じたいと思います。限りある知識と主観を袋に入れて動きまわる執筆者の目に映るその周辺（歴史）はどのようなものでしょうか？　その中では執筆者自身もその客体となり歴史作りに励んでいます。この観測者の選択した事項，それをもとに描いたスケッチをご査証ください。変形はコホモロジーによりコントロールされます。この客体は，対象に対する適正なコホモロジー群の判定法がこの理論それ自身の中に眠っていたことを発見した喜びを経験しています。

「代数構造の変形理論」を提案した Gerstenhaber 教授（ペンシルバニア大学）は「Kodaira-Spencer の複素構造の変形理論をプリンストンで知ったのがきっかけになった。」とよく言われていましたが，最近会ったときには，さらに「複素構造の変形理論の代数化を目指した」と付け加えられました。「複素構造の変形」は代数的に「代数の前層の変形」として捕えられました。Stein 開集合のつくる半順序集合（Poset）から正則関数のつくる環のカテゴリーへの関手を $\mathbb{A}$ とするとき、結合代数 $\mathbb{A}(U)$ 及び準同型写像 $\mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(U')$ の２つの対象の変形を取り扱うわけです。

§1 データ

1.1 関連する論文の数　「先生、約 594000 件ヒットしました」。学生がドアを開けるなり発した言葉です。学部卒論生に“変形”を Web で検索し，分類するように指示しておりました。“変形理論”は約 46000 件でした。その分類には，弾塑性変形等の工学系のキーワードに加え，複素構造の変形，代数構造の変形などの数学系

のキーワードが挙げられていました。卒研生のテーマは「代数構造の変形理論」。非専門家でもわかる，易しい入門書の作成を目指しています。変形理論の工学での位置付けを与えるべく，手っ取り早い方法として検索させました。1983 年ごろ M.Hazewinkel が調べたところによると "deformation" と題名につく数学の論文は 4300 篇ぐらいあり，そのうち約 1350 篇は 1980 年以降のものだそうです。2004 年 1 月に MathScinet で調べると 5469 件ヒットしました。リストされている最も古い論文は Eisenhart 'Certain continuous deformations of surfaces applicable to the quadries', *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913) です。今後、このデータは徐々に更新され，それ以前のものも検索できるものと思います。また，'Lie algebra' で検索すると 5806 件あり，リストされている最も古い論文は Knebelmann 'Classification of Lie algebras', *Ann. of Math.* (2) 36 (1935) や Jacobson 'Rational methods in the theory of Lie algebras', *Ann. of Math.* (2) 36 (1935) 等です。変形とリー代数のリストの件数はほぼ同じだったわけです。

Mathscinet で 'deformation' を検索した結果											
年	数	年	数	年	数	年	数	年	数	年	数
2003	128	1992	182	1981	110	1970	29	1959	44	1948	43
2002	217	1991	159	1980	142	1969	43	1958	35	1947	19
2001	217	1990	162	1979	103	1968	32	1957	30	1946	14
2000	172	1989	136	1978	90	1967	18	1956	33	1945	17
1999	268	1988	139	1977	75	1966	29	1955	33	1944	11
1998	243	1987	102	1976	62	1965	45	1954	26	1943	14
1997	176	1986	94	1975	81	1964	57	1953	24	1942	13
1996	283	1985	106	1974	79	1963	35	1952	18	1941	9
1995	210	1984	102	1973	47	1962	39	1951	24	1940	12
1994	195	1983	105	1972	45	1961	35	1950	26	1939	19
1993	213	1982	80	1971	43	1960	53	1949	21	1913	1

1.2 周辺の分野　ここで，代数構造の変形理論の周辺分野を M.Hazewinkel に従って傍観しましょう。Gerstenhaber の理論は少しだけその姿を変形して，これらの分野にも住み着きます。変形理論のコアとして，ますますその評価を高めているのです。ここに現れる概念の定式化は次の 1.3 で挙げた文献を参照ください。

Quantum mechanics and relative theory ; classical and semi-classical limits, quantum groups, quantization

Algebraic geometry and several complex variables theory; deformations of singularities, moduli

Differential geometry ; deformations of complex and other structures, moduli, applications to (overdetermined) (partial) differential equation

Functional analysis ; deformations of operator and C^*-algebras, families of operators

Special functions ; q-special functions and q-orthogonal polynomials and their links with quantum groups

Algebraic and differential theory ; homotopies, isotopies, ...

Numerical mathematics ; the homotopy or continuation method for solving equations and differential equations

Global analysis and particle mechanics ; completely integrable systems, birfurcations, (structual) stability

1.3 手元にある報告集

1) *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, M.Hazewinkel and M.Gerstenhaber eds.,Kluwer Academic Publishers, 1988

2) *Deformation Theory and Quantum Groups with Applications to Mathematical Physics*, M.Gerstenhaber and J.Stasheff eds., AMS Contemp. Math. Series 134, 1992

3) *Deformation Quantization*, IRMA Lectures in Math. Theoret. Phys. 1, Walter de Gruyter, 2002

§2 Gerstenhaber の変形理論

Murray Gerstenhaber
1927 年，N.Y. Brooklyn に生まれる。
1948 年，B.S., Yale University, Mathematics
1951 年，Ph.D., University of Chicago, Mathematics
1961 年，ペンシルバニア大学教授
1973 年，J.D., University of Pennsylvania

代数構造の変形理論は 1963 年に始まる Gerstenhaber の一連の論文 [2–6] で提案された。その後，Gerstenhaber-Schack により，Small category から代数への共

変関手 [7]，双代数，そしてホップ代数 [8] へ，Flato-Gerstenhaber-Voronov ([1]) により， Leibniz 対とポアソン代数へと適用されてきた。ここでは，理論の源を訪ねることにする。題材は Gerstenhaber の論文 [3] である。

2.1 変形理論のアスペクト 以下を理論構成の羅針盤とする。

1) A definition of the class of objects within which *deformation* takes place and identification of the *infinitesimals* of a given object with the elements of a suitable *cohomology group*.

2) A theory of the *obstructions* to the *integration* of an infinitesimal deformation.

3) A *parameterization* of the set of objects.

4) A determination of the natural automorphisms of the parameter space and the determination of the *rigid* objects.

2.2 基本概念と基本的な定理 代数系に共通の変形理論構築に必要な基本的概念を少し詳しく述べる。母国語で紹介文を書くのは初めてである。

変形 (Deformation): k を単位的可換環とする。A は積 $\alpha : A \times A \to A$ で定義された k 上の代数とする。A の**変形** $A[[t]]$ は係数を A にもつ形式的べき級数のなす $k[[t]]$ 上の加群で，積 $\alpha_t : A[[t]] \times A[[t]] \to A[[t]]$ (t: deformation parameter) は

$$\alpha_t := \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots$$

で定義される。ここに， $\alpha_i : A \times A \to A$ は k-双線形で自然に $k[[t]]$-双線形に拡張されたものである。 α_t は $A[[t]]$ に代数構造を与える。これを

$$A_t := (A[[t]], \alpha_t)$$

と表す。2.1 の変形のアスペクトによると，A と A_t は同じクラスに属する必要がある。従って，A が結合代数（リー代数，etc.）であれば，A_t も結合代数（リー代数，etc.）でなければならない。$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ のとき，α_t を**自明な変形** (null deformation) といい，A_0 と表す。これは，A の係数拡大（k から $k[[t]]$）に他ならない。A が有限次元であれば，$A_0 = A \otimes_k k[[t]]$ が成り立つ。

同値 (Equivalence): A'_t も代数 A の変形で，その積が $\alpha'_t := \alpha + t\alpha'_1 + t^2\alpha'_2 + \cdots$ であるとする。$k[[t]]$-同型写像

$$f_t = 1_A + tf_1 + t^2 f_2 + \cdots ,$$

($f_i \in \mathrm{Hom}_k(A,A)$ は $k[[t]]$ に拡張されている）で次の条件を満たすものが存在するとき，A_t と A'_t は**同値**であるといい，$A_t \sim A'_t$ と書く：

$$\begin{aligned}\alpha'_t(a,b) &= f_t^{-1}\alpha_t(f_t(a), f_t(b)) \\ &= \{f_t^{-1}\alpha_t(f_t, f_t)\}(a,b) \quad (a, b \in A).\end{aligned}$$

$a * b = \alpha'_t(a,b)$, $a \cdot b = \alpha_t(a,b)$ とおくと，上の式は $f_t(a*b) = f_t(a)\cdot f_t(b)$, すなわち，$f_t : A'_t \to A_t$ が同型を与えることを表している。$A_t \sim A_0$ のとき，A_t を**自明な変形** (trivial deformation) という。

コホモロジー (Cohomology): 結合代数の変形理論に適するコホモロジーについて述べる。他の代数系については後述する。A を k 上の結合代数とする。A_t も結合的であるから $\alpha_t(a, \alpha_t(b,c)) = \alpha_t(\alpha_t(a,b),c)$ が要求される。これには **変形方程式** (deformation equation):

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p>0,\, q>0}} \{\alpha_p(\alpha_q(a,b),c) - \alpha_p(a, \alpha_q(b,c))\} = (\delta\alpha_n)(a,b,c) \tag{$*$}$$

が従う。ここで，δ は Hochschild coboundary operator で，$\delta^n : C^n(A,A) := \mathrm{Hom}_k(A^n, A) \to C^{n+1}(A,A)$ は次式で定義される：

$$\begin{aligned}\delta^n f(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= a_1 f(a_2, \ldots, a_n) + \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^i f(\ldots, a_i a_{i+1}, \ldots) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}.\end{aligned}$$

この式から

$$\delta\alpha_1 = 0, \text{ i.e., } \alpha_1 \in Z^2(A,A)$$

$$\alpha'_t \sim \alpha_t \Longleftrightarrow \alpha'_1 - \alpha_1 \in B^2(A,A)$$

がわかる。実際，$\alpha'_t \sim \alpha_t$ のとき，$\alpha'_t - \alpha_t = -\delta f_1$ とおけば，同型 $f_t : A'_t \to A_t$ は $f_t = 1_A + t f_1$ で与えられる。

無限小変形 (Infinitesimal defrmation): 変形 $\alpha_t := \alpha + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots$ の一次の係数 α_1 をこの変形の**無限小変形**という。

解析的剛性 (Analytically rigid): A のすべての変形 A_t が自明な変形 A_0 に同値 ($A_t \sim A_0$) であるとき，A は**解析的剛性**であるという。また，$H^2(A,A) = 0$ をみたす結合代数を**無限小剛性** (infinitesimal rigid) とよぼう。ここで、基本的な定理を紹介する。

Theorem (Gerstenhaber [3]) 結合代数 A は $H^2(A,A) = 0$ を満たせば解析的剛性

である。とくに、分離的代数は解析的剛性である。

《証明》 変形 $\alpha_t=\alpha+t\alpha_1+t^2\alpha_2+\cdots$ において，$\delta f^{(1)}=\alpha_1$ となる $f^{(1)}\in C^1(A,A)$ をとり，

$$\begin{aligned}\alpha_t^{(1)} &:= (1_A-tf^{(1)})^{-1}\alpha_t(1_A-tf^{(1)},1_A-tf^{(1)})\\ &= \alpha+t^2\alpha_2'+\cdots(\sim\alpha_t),\end{aligned}$$

のように一次の項を消す。二次の係数 α_2' も 2-コサイクルであるから，同様の作業でこの項も消すことができる。順次，高次の項を消して

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1_A-tf^{(i)})^{-1}\alpha_t\prod_{i=1}^{\infty}(1_A-tf^{(i)},1_A-tf^{(i)})=\alpha_0.$$

を得る。よって，$\alpha_t\sim\alpha_0$ が示せた。《証明終わり》

Integral Problem： 2－コサイクル $\alpha_1\in Z^2(A,A)$ について，これを一次の項の係数とするような変形 $\alpha_t=\alpha+t\underline{\alpha_1}+t^2\alpha_2+\cdots$ が存在するとき，α_1 は **integrable** であるという。

障害 (Obstruction): さて、“コホモロジー” の項にある変形方程式 $(*)$ に戻ろう。$(*)$ を満たす $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ から，$(*)$ を満たす α_n を構成したい。ここに，障害が生じる。$f\bar{\circ}g(a,b,c)=f(g(a,b),c)-f(a,g(b,c))$ とおくと，$(*)$ の左辺は $(\alpha_1\bar{\circ}\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\bar{\circ}\alpha_1)(a,b,c)$ と表せるから，変形方程式 $(*)$ は

$$\alpha_1\bar{\circ}\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\bar{\circ}\alpha_1=\delta\alpha_n$$

の形に表せる。左辺は 3－コサイクルであることが計算によりわかる。これを**障害**コサイクルという。次の基本的な定理は明らかであろう。

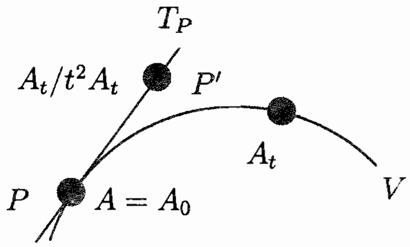
Theorem (Gerstenhaber [3]) 結合代数 A が $H^3(A,A)=0$ を満たせば，すべての 2－コサイクルは Integrable である。

パラメータ空間 (Parameter Space) k を体，Ω を k を含む万有体とする。A を k 上の n-次元ベクトル空間，$\{a_1,\ldots,a_n\}$ をその基底とする。基底を固定し，A 上に結合代数の構造を考える。その構造定数を (c_{ijk})，すなわち，$a_ia_j=\sum_k c_{ijk}a_k$ とすると，点 $P=(c_{ijk})$ は結合法則から導かれる二次の多項式の代数的集合 V を Ω^{n^3} 内に構成する。V を n-次元結合代数の**パラメータ空間**という。一般線形群 $G=GL(n,\Omega)$ は V 上に作用する。代数的概念と幾何学的対象には対応がある。

(1) 点 gP $(g\in G)$ には拡大体上 A に同型な結合代数が対応する。

(2) 点 $P=(c_{ijk})$ について，軌道 GP が点 P で Zarisky 開集合を含むとき，対応する結合代数 A を**幾何学的剛性**であるという。

(3) $Z^2(A_\Omega, A_\Omega)$ の元は点 P における接ベクトルに対応する。接空間の点 $P' = (c_{ijk} + tc'_{ijk})$ には (結合的とは限らない) 代数 A_t/t^2A_t が対応し，その積は $a_ia_j = \sum_k (c_{ijk} + tc'_{ijk})a_k$ で与えられる。



Theorem (Gerstenhaber & Schack [7]) k を標数 0 の体，A を代数方程式で定義される代数のカテゴリーに属する有限次元代数とする。このとき，A について，幾何学的剛性と解析的剛性は同等である。

Note 未解決問題 (40 歳) 下記の「？」に答えよ。

$$\begin{array}{ccccc} \text{infinitesimally rigid} & \Rightarrow & \text{analytically rigid} & \Rightarrow & \text{geometrically rigid} \\ (H^2(A,A)=0) & \not\Leftarrow & (A_t \sim A_0) & \Leftarrow & (GP \text{ is open}) \end{array}$$

§3 過去との対話

変形理論の数学的定式化は 1958 年の Kodaira-Spencer の複素構造の変形理論に関する論文 [13] に始まる。この理論との対話なくして Gerstenhaber の理論を楽しむことは難しいようである。また，パラメータ空間については，1857 年の Riemann の仕事との対話となる。

3.1 複素構造の変形理論 Spencer の ‘sewing Grandmother’s quilt’ 及び小平著「複素多様体論」([12]) にある文「コンパクト複素多様体 M は有限個の座標近傍を貼りあわせたものであるから，M の変形はその貼りあわせ方を変えることである」を書き留めておかねばならない。Spencer の標語は Gerstenhaber がよく引用するものである。ここでは，複素構造の変形理論と代数構造のそれとのキーワードの対応を表にしてみる。

	複素構造	→ 結合代数の構造
変形	複素解析族 M_t	A_t
コホモロジー	層係数コホモロジー	Hochschild コホモロジー
	$H^k(M, \Theta)$	$H^k(A, A)$
無限小変形	$H^1(M, \Theta)$	$H^2(A, A)$
障害	$H^2(M, \Theta)$	$H^3(A, A)$

複素多様体の貼りあわせ方(縫い方)を変える方向が $H^1(M,\Theta)$ で記述されるわけである。剛性に関する判定は複素構造では $H^1(M,\Theta)=0$, 結合代数では $H^2(A,A)=0$ となる。

3.2 モジュラス 1857年, Riemann は種数 $g \geqq 2$ の閉リーマン面の等角的同値類全体は $3g-3$ 個の複素パラメータで表せることを発見した。この定数 $3g-3$ を図形の「モジュラス」とよんだ。

§4 代数構造の変形理論

§3 で変形理論の構築の手順を結合代数の場合に説明した。ここでは, 2つの積をもつポアソン代数および通常の二項積ならぬ三項積の変形理論がどのように展開されたかをみる。変形をコントロールする適切なコホモロジー群を見つけることがキーになる。§2 の 2.2 で述べられた剛性, Integral Problem に関する定理は同様に成り立つので, ここでは省略し, どのようなコホモロジーが採択されたかに焦点を絞ることにする。さらに, その双対鎖複体を紹介すれば十分であろう。リー代数の変形理論には Chevalley-Eilenberg cohomology が用いられる (1966年 ; Nijenhuis and Richardson [16])。

非可換ポアソン代数 非可換ポアソン代数 (Noncommutative Poisson algebra, 略して ncPa) A は標数0の体 k 上ベクトル空間で, 結合的積 $\alpha(a,b)=ab$ およびリー積 $\lambda(a,b)=\{a,b\}$ をもち, これらの積が Leibniz law : $\{a,bc\}=\{a,b\}c+b\{a,c\}$ $(a,b,c\in A)$ をみたすものである。この代数の変形理論は1995年に Flato-Gerstenhaber-Voronov ([1]) によって提案された。ncPa (A,α,λ) の変形 $(A[[t]],\alpha_t,\lambda_t)$ は結合積 $\alpha_t=\alpha+t\alpha_1+t^2\alpha_2+\cdots$ およびリー積 $\lambda_t=\lambda+t\lambda_1+t^2\lambda_2+\cdots$ をもち, Leibniz law: $\lambda(a,\alpha(b,c))=\alpha(a,\lambda(b,c))+\alpha(\lambda(a,b),c)$ を満たすものである。この変形を制御するコホモロジーについて述べる。採択された双対鎖複体は $(C^\bullet_{tot}(A,A),\delta_{tot})$ である :

$$C^n_{tot}(A,A)=\oplus_{p+q=n}C^{p,q}(A,A),\quad \delta_{tot}=\begin{cases}\delta_{tot}|_{C^{1,q}} &= \delta_P+\delta_{CE}\\ \delta_{tot}|_{C^{p,q}} &= \delta_H+(-1)^q\delta_{CE}\ (p\geq 2)\end{cases},$$

ここで,

$$C^{p,q}(A,A)=\begin{cases}C^{1,q} &= \mathrm{Hom}_k(\wedge^{q+1}A,A)\\ C^{p,q} &= \mathrm{Hom}_k(A^p\otimes(\wedge^q A),A)\ (p\geq 2)\end{cases},$$

δ_H は Hochschild coboundary, δ_{CE} は Chevalley-Eilenbrg coboundary である。また $\delta_P : C^{1,q} = \mathrm{Hom}_k(\wedge^{q+1}A, A) \to C^{2,q} = \mathrm{Hom}_k(A^2 \otimes (\wedge^q A), A)$ は合成 $\mathrm{Hom}_k(\wedge^{q+1}A, A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_k(A \otimes (\wedge^q A), A) \xrightarrow{\delta_H} \mathrm{Hom}_k(A^2 \otimes (\wedge^q A), A) \quad (\varepsilon^* f(a_1 \otimes (a_2 \wedge \ldots \wedge a_q)) := f(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_q))$ である。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\uparrow \delta_H & & \uparrow \delta_H & & \uparrow \delta_H & & \\
\mathrm{Hom}_k(A^3, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(A^3 \otimes A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(A^3 \otimes \wedge^2 A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \\
\uparrow \delta_H & & \uparrow \delta_H & & \uparrow \delta_H & & \\
\mathrm{Hom}_k(A^2, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(A^2 \otimes A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(A^2 \otimes \wedge^2 A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \\
\uparrow \delta_P = \delta_H & & \uparrow \delta_P & & \uparrow \delta_P & & \\
\mathrm{Hom}_k(A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(\wedge^2 A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} & \mathrm{Hom}_k(\wedge^3 A, A) & \xrightarrow{\delta_{CE}} &
\end{array}
$$

分類に関連して，久保 (1996 年 : [14]) は交換子積 $[a, b] = ab - ba$ を利用して，**標準的積** $\{-, -\} = \lambda[-, -] \quad (\lambda \in k)$ を導入して，通常の行列の結合積をもつ $M_n(k)$ 上には標準的な積のみ可能であること等を示した。

三項積の変形理論 最近，久保・谷口 ([15]) によって提案された。まず三項積について説明する。Lie triple system (略して，Lts) は Jacobson [10–11] によって，初めて恒等式の形で定義された。その一部を修正し，現在の形にしたの Yamaguti [17] であった : k を標数 0 の体とする。k 上 Lts T は k 上ベクトル空間で，次の恒等式をみたす三項積 $[a\,b\,c]$ をもつ :

$$
\begin{aligned}
&[a\,a\,b] = 0\\
&[a\,b\,c] + [b\,c\,a] + [c\,a\,b] = 0\\
&[a\,b\,[c\,d\,e]] = [[a\,b\,c]\,d\,e] + [c\,[a\,b\,d]\,e] + [c\,d\,[a\,b\,e]].
\end{aligned}
$$

Lts には包絡リー代数があり，Lts は蓄積されていたリー代数の理論を援用しながら解析されてきた。その流れから，Haris (1961 年:[9]) は包絡リー代数の Chevalley-Eilenberg coboudary を利用して Lts のコホモロジー群を定義した。一方，山口 (1960 年 : [17]) は，包絡リー代数という外的世界に出ることなく独自の内的な定義を行った。我々は，変形理論を展開する上では山口コホモロジーの方が適切であるという結論を得た。筆者は,「従って，Lts のコホモロジーは山口のそれであるべき」と信じるに至った。変形理論は，その代数系に，この双対鎖複体が適切かどうかの判定を与えてくれる。少し複雑ではあるが，Yamaguchi coboundary operator をここに書き下す。まず，Lts $(T, \alpha(-,-,-))$; $\alpha(-,-,-) = [-\ -\ -]$ の

変形 $T_t := (T[[t]], \alpha_t)$ は

$$\alpha_t(a,b,c) := \alpha_0(a,b,c) + t\alpha_1(a,b,c) + t^2\alpha_2(a,b,c) + \cdots$$

の形であり，Lts に課せられた条件を満たすものである。

T 自身に係数を持つ場合を述べる。$(2n+1)$-cochains の空間 $C^{2n+1}(T,T)$ は一定の条件を満たす $2n+1$ 重 k-multilinear function $f : T\times\cdots\times T \to T$ の集合で，Yamaguti coboundary は以下で定義される k-linear map $\delta^{2n-1} : C^{2n-1}(T,T) \to C^{2n+1}(T,T)$ である：

$$\begin{aligned}
&\delta^{2n-1} f(x_1,\cdots,x_{2n+1})\\
&= \theta(x_{2n},x_{2n+1})f(x_1,\cdots,x_{2n-1}) - \theta(x_{2n-1},x_{2n+1})f(x_1,\cdots,x_{2n-2},x_{2n})\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}D(x_{2k-1},x_{2k})f(x_1,\cdots,\widehat{x_{2k-1}},\widehat{x_{2k}},\cdots,x_{2n+1})\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1}f(x_1,\cdots,\widehat{x_{2k-1}},\widehat{x_{2k}},\cdots,[x_{2k-1}\,x_{2k}\,x_j],\cdots,x_{2n+1})
\end{aligned}$$

ここに，$\theta(a,b)(v) = [v\,a\,b]$ であり，$\hat{}$ は省略を表す。

$$C^1(T,T) \xrightarrow{\delta^1} C^3(T,T) \xrightarrow{\delta^3} C^5(T,T) \longrightarrow \cdots,$$

$\delta^{2n+1}\delta^{2n-1} = 0$ for $n = 1,2,\cdots$ が成り立つ。

謝辞： 講演の機会を与えて下さった津田塾大学数学・計算機科学研究所の杉浦先生，笠原先生及び長岡先生に厚く御礼申し上げます。また，杉浦先生の貴重なご意見は大いに勉強になりました。次に，Gerstenhaber 教授に謝辞を送らねばなりません。平成 15 年 9 月に 5 日間，同教授を訪れた。代数構造の変形理論構築時の体験談は講演に際して役立った。そして，(いつものことであるが) フィラデルフィア滞在中，ほとんど徹夜に近い生活を与えて下さることに感謝する。

参考文献

[1] M.Flato,M.Gerstenhaber and A.A.Voronov, Cohomology and deformation of Leibniz pairs, *Lett. Math. Phys.* 34(1995) 77-90.

[2] M.Gerstenhaber, On the cohomology structure of an associative ring, *Ann. of Math.* 78 (1963) 59-103.

[3] M.Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras, *Ann. of Math.* 79 (1964) 267-288.

[4] M.Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras II, *Ann. of Math.* 84 (1966) 1-19.

[5] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras III, *Ann. of Math.* 88 (1968) 1-34.

[6] M.Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras IV, *Ann. of Math.* 99 (1974) 257-276.

[7] M.Gerstenhaber and S.D.Schack, Algebraic cohomology and deformation theory, In: M.Hazewinkel and M.Gerstenhaber, eds., Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1988) 11-264.

[8] M.Gerstenhaber and S.D.Schack, Algebras, bialgebras, quantum groups, and algebraic deformations, In: M.Gerstenhaber and J.Stasheff, eds., Deformation Theory and Quantum Groups with Applications to Mathematical Physics, Contemporary Math., Vol. 134 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992) 51-92.

[9] B.Harris, Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution, Tran. Amer. Math. Soc. 98 (1961)148-162.

[10] N.Jacobson, Lie and Jordan triple systems, Amer. J. Math. Soc., 71(1949), 149-170.

[11] N.Jacobson, General representation theory of Jordan algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 70(1951), 509-530.

[12] 小平邦彦, 複素多様体論, 岩波書店, 1992

[13] K. Kodaira and D.C.Spencer, On deformation of complex analytic structures I and II, *Ann. of Math.* 67 (1958) 328-466

[14] F.Kubo, Finite-dimensional non-commutative Poisson algebras, *J.Pure Appl. Algebra* 113 (1996) 307-314 .

[15] F.Kubo and Y.Taniguchi, A controlling cohomology of the deformation theory of Lie triple systems, *J.Algebra, to appear.*

[16] A.Nijenhuis, R.Richardson, Cohomology and deformation in graded Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (1966) 1-29.

[17] K.Yamaguti, On the cohomology space of Lie triple system, *Kumamoto J. Sci. Ser. A* 5 (1960) 44-52.