低次数の有限線型群 II

(H. F. Blichfeld から R. D. Brauer へ)

上智大学数学科

篠田健一

0. 最近 $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群に対する McKay 対応について調べ([GNS], [GNS2]), その際に H. F. Blichfeldt による $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群の分類について勉強をした。勿論それ以前にも手に取って眺めたことはあるが読んだのは今回が初めてであった。それについて、その後の発展をふくめて印象および概略を前回の報告集に書かせて頂いたが([Shinoda])、その時に Richard Brauer は Blichfeldt から強い影響を受けているのではないかと感じた。そのことを出来るだけ明らかにしたいということが、今回講演をお引き受けした動機であった。

いうまでもなく Brauer は 20 世紀の代数学、とりわけ有限群論のリーダーであり、有限単純群の分類論および有限群のモジュラー表現論の祖であるといって過言ではない。日本人数学者にも強い影響を与えたが、一方、中山正や鈴木通夫との相互交流も忘れることはできない。Brauer の伝記を含めた仕事の紹介は [Curtis99] に詳しい。しかし、ここには Blichfeldt と Brauer が直接に交流があったとする記述は見当たらない。あとで年譜を示すが Brauer にとり Blichfeldt は親の代にあたり、同時期にアメリカで活躍をしているので直接の交流があっても不思議ではないが、今回の報告では、このことについては何も述べることはできない。影響があったのではないかという傍証を数学の流れの中で見て行きたい。

1. この節の内容は Dickson [Dickson47] による。

Hans Frederik Blichfeldt(1873-1945) はデンマークの Illar において 1873 年 1 月 9 日に生まれ、15 歳でアメリカ合州国に渡るが、このときすでに背が高い体格の良い青年であった。6 年間、鉄道で筋肉労働 (manual labor) に従事する。“ I worked with my hands doing everything, East and West the country across.” ここで得た学資をもとに Stanford 大学で学び 1896 年に Bachelor of Arts を授けられる。1898 年には Sophus Lie の指導のもと Leipzig において博士論文, On a certain class of groups of tranformation in space of three dimension, を提出する。1897 年には既に Stanford 大学

の講師 (instructor) に指名され、その後、同大学の助教授 (1901-1906)、准教授 (1906-1913), 教授 (1913-1938) を勤め, 亡くなるまで名誉教授 (1938-1945) であった。

22 篇の論文を著し、2 冊の本を書いている。一つは Dickson と Miller の共著 [BDM16] であり、ひとつは [Blichfeldt17]

Finite Collineation Groups (1917)

である。

2. R. Brauer については [Feit79], [Green78], [Curtis99] に優れた記事があり、また 3 巻の全集もある。ここではごく簡単に、これらをもとに Brauer の履歴を振り返る。

Richard Dagobert Brauer (1901-1977) は 1901 年 2 月 10 日に Berlin において Max Brauer とその妻 Lilly Caroline の第 3 子として生まれる。1919 年に Berlin 大学に入学し 1925 年に I. Schur の指導のもとに博士号を取得する。1925 年から 1933 年まで Königsberg 大学で教えるが、1933 年にナチによるユダヤ人排斥により職を失う。同年 Kentuckey 大学より招かれアメリカに渡り 1934-1935 の間 プリンストンの高等研究所で研究をする。その後 University of Toronto (1935-1948), University of Michigan (1948-1952), University of Harvard (1952-1970) において数学の研究をすると同時に数多くの優れた数学者を育てた。(C.J.Nesbitt, R.Steinberg, K.A.Fowler, W.Feit, L.Solomon, ...) Harvard 大学名誉教授 (1970-1977)。1977 年 4 月 17 日 Boston で亡くなる。

129 篇の著書作を著し、またアメリカ数学会会長等の要職も数多く勤める。

3. 次の二つの問題は有限線型群を考える際に基本的な問題である。

問題 (A) $GL(n,\mathbb{C})$ にはどのくらい有限群があるか。
問題 (B) 与えれた n に対し $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群をすべて求めよ。

この二つの問題は既に 19 世紀後半から研究されており、Blichfeldt の前述の著書にはこの問題が扱われている。歴史を振り返ってみよう。

問題 (A) まず Jordan が次の定理を示した。

Theorem 1. *(Jordan, 1878)* ある正整数値関数 $J(n)$ が存在し、すべての $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群は指数が $J(n)$ 以下の可換正規部分群を有する。

Blichfeldt はこの定理をより詳しく次の形で示した。

Theorem 2. *(Blichfeldt, 1904)* G を $GL(n,\mathbb{C})$ の原始的有限部分群とすると $J(n) \leq n!6^{(n-1)(\pi(n+1)+1)}$ である。ただし, $\pi(n+1)$ は $n+1$ 以下の素数の数である。

Brauer と Feit はモジュラー表現を用い Jordan の定理を正標数の場合に拡張した。

Theorem 3. *(Brauer and Feit, 1966)* p を素数とし $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ を素体の代数閉包とする。このときある正整数値関数 $J(m,n)$ が存在し、$GL(n,k)$ の有限部分群で p-シロー群の位数が p^m であるものは指数が $J(m,n)$ 以下の可換正規部分群を有する。

チリの軍政下、アンデス山中で命を落したとされる Weisfeiler は次の定理を得ていたと報告されている ([KP002], [W84])。

Theorem 4. *(Weisfeiler, 1984)* G を $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とし $n > 63$ とすると, G は指数が $(n+2)!$ 以下の可換正規部分群を有する。

問題 (B)

有限部分群 $G \subset SL(n,\mathbb{C})$ の分類は n が小さい場合、次の人により与えられた。

$n = 2$ F. Klein 1876, Valentiner,

$n = 3, 4$ H. F. Blichfeldt [Blichfeldt03]

$n = 5$ R. Brauer [Brauer67]

($n \leq 10$ [Feit76] 総合報告)

この問題は、現在でも精力的に研究が続けられている。(例えば [PZ], あるいは [Kondratiev] 参照)

前回報告したように、この問題を解く時に Blichfeldt が使ったのは次の定理であった。

Theorem 5. G を $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とする. $p > (n-1)(2n+1)$ であればシロー p 群は正規部分群である.

証明には 1 の巾根に関する Kronecker の定理を応用した特殊化を使い、読み終ったあとで、不思議な気持が残る。この定理は Brauer によりモジュラー表現を用いて次の形に拡張された。(1 の巾根とモジュラー表現は親戚関係にある。)

Theorem 6 ([Brauer42]). G を $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群, $g = \mid G \mid$ とし p は g の素因子で, $g = g'p, (g',p) = 1$ とする. G のシロー p 群が正規でなければ, $p \leq 2n+1$. ここで等号が成立するのは $G/G \cap Z$ が $PSL(2,p)$ に同型である時に限る. ただし Z は $GL(n,\mathbb{C})$ の中心である.

4. 問題 (A)、(B) はこのように Blichfeldt と Brauer により、扱われている。有限線型群の基本的な問題なので当然とも言えるが、Brauer の諸論文を読むと Blichfeldt をかなり意識していることがうかがえる。[Blichfeldt17] は丁度 Brauer が数学を研究し始めたころに出版されており、若い Brauer は新鮮な気持で読んだのではないだろうか。Feit は Brauer の追悼記事の中で、次のように述べている。

[Feit79, p.13] *For a long time Brauer had been intrigued by the work of H. F. Blichfeld* [Blichfeldt17].

このことの一端を [Brauer42] を読んだ時に私も強く感じたのだと思う。本当ならばこの "intrigued" の中身およびそれを Brauer がどう解決したかを数学的に説明すべきとは思うがこの報告に書くには到らなかった。結局 19 世紀後半に始まった有限線型群の研究が Blichfeldt により大きく前進し、それを Brauer が開花させて Feit らを中心にそれが受け継がれて発展しているという数学の流れを、私なりに確認をしたということであったけれど、この Brauer の "intrigued" の中身を課題とし、また "Finite Collineation Groups" を読んだ時の釈然としない (あるいは intrigued された) 気持を、暫く抱えて行こうと思う。

今回この問題を考え話をする機会を与えてくださった、数学史シンポジウムを組織し続けている諸先生方に感謝します。

References

[BDM16] H.F. Blichfeldt, L. E. Dickson, G. A. Miller, *Theory and Application of Finite Groups*, Dover, New York, 1916.

[Blichfeldt03] H.F. Blichfeldt, *On the order of the linear homogeneous groups, I, II, III, IV*, Trans. Am. Math. Soc., **4** (1903), 387-397; **5** (1904), 310-325; **7** (1906), 523-529; **12** (1911), 39-42.

[Blichfeldt17] H.F. Blichfeldt, *Finite collineation groups*, The Univ. Chicago Press, Chicago, 1917.

[Brauer42] R. Brauer, *On groups whose order contains a prime number to the first power, I, II*, Am. J. Math. **64** (1942), 401-420; 421-440.

[Brauer67] R. Brauer, *Über endliche lineare Gruppen von Primzahlgrad*, Mth. Ann. **169** (1967), 73-96.

[Brauer79] R. Brauer, *Blocks of characters and structure of finite groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979),21-38.

[Brauer-Feit66] R. Brauer and W. Feit, *An analogue of Jordan's thorem in characteristic p*, Ann. of Math. **84** (1966), 119-131.

[Curtis-Reiner62] C. W. Curtis and I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[Curtis99] C. W. Curtis, Pioneers of representaion theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer, History of Mathematics vol.15, AMS and LMS, 1999.

[Dickson47] L. E. Dickson, Hans Frederik Blichfeldt. 1873-1945., Bull. Amer. Math. Soc. **53**, (1947), 882-883.

[Feit76] W. Feit, *On finite linear groups in dimension at most 10*, Proceedings of the conference on finite groups, Academic Press, (1976), 397-407,

[Feit79] W. Feit, *Richard D. Brauer*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 1-20.

[GNS] Y. Gomi, I. Nakamura and K. Shinoda, *Hilbert Schemes of G-orbits of dimension three*, Asian J. Math. **4** no.1 (2000) 51-70.

[GNS2] Y. Gomi, I. Nakamura and K. Shinoda, *Coinvariant Algebras of Finite Subgroups of $SL(3,\mathbb{C})$*, to appear in Canad. J. Math.

[Green78] J. A. Green, *Richard Dagobert Brauer*, Bull. London Math. Soc. **10**(1978), 317-342.

[Kondratiev] A. S. Kondratiev, *Finite linear groups of small degree. II*, Comm. Algebra **29**(2001), 4103-4123.

[KP002] J. Kuzmanovich and A. Pavlichenkov, *Finite groups of matrices whose entries are integers*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 173-186.

[PZ] Pham Huu Tiep and A. E. Zalesskii, *Some aspects of finite linear groups: a survey.* J. Math. Sci.(New York) **100**(2000), 1893-1914.

[Shinoda] 筱田健一、低次数の有限線型群、第 13 回数学史シンポジウム (2002), 津田塾大学数学・計算機科学所報 24(2003), 90-94.

[W84] B. Weisfeiler, *Post-classification version of Jordan's theorem on finite linear groups*, Proc. Nat. Acad. Sci.U.S.A. 81(1984), 5278-5279.