確率場と径路積分の歴史

Takeyuki Hida
Meijo University

1　始めに

確率場と径路積分とを並べたとき、どんな関連があるのかと奇異に感ぜられるかもしれない。勿論、両者とも数学や、数理物理学の広大な分野であり、この小論で概観することさえ到底不可能なことである。ただここで注意したいことは、それらの歴史を眺めたときに、単なる事実の認識だけではなく、将来の研究課題や手法の発見に大いに役立つだろうということである。その過程で重要な観点にも気付くであろう。そして、それは今後の確率場の話や径路積分の研究に大きな影響を与えるに違いない。それを期待してセオリーの歴史を明らかにしてみたい。先走って言えば、P.A.M. Dirac の先導的なアイディアは特に注意したいものである。話を1930年代に戻して、その思想と影響とを調べてみよう。

2　準備

はじめに基礎概念を準備しておく。

確率場

時間 t とともに変化する偶然現象を数学的に表現したものが確率過程で，それはよく知られており、その研究も進んでいる。時間 t を一般化して、時空多次元のパラメータにしたり、曲線とか曲面のような多様体、あるい

は関数にして、その変化につれて進展する偶然現象の数学モデルが**確率場** (random field) である。その研究において有力な手段となるものは**変分法**である。ここでは変分法の意味を広義に理解して、無限次元空間における微分法と理解しよう。変数としてとるのは多次元のパラメータを持つ基本的な確率変数（infinitesimal なものになることが多い）の系であり、その関数（実は汎関数）のなす空間に作用する演算としての汎関数微分、すなわち変分を扱うことにより、確率場の解析が行われる。

具体的な例でいうならば、ブラウン運動の時間微分から得られる各時点で独立な超過程がホワイトノイズで、それを変数とみた汎関数が偶然現象を記述しているとしよう。その汎関数の解析法として、変数であるホワイトノイズで微分をする、すなわち変分を実行することが、我々の最も興味ある解析の手段となる。記号を導入して説明すれば、$B(t)$ をブラウン運動とするとき、その時間微分 $\dot{B}(t)$ はホワイトノイズの一つの実現となる。このホワイトノイズを変数とする関数、実は汎関数, $f(\dot{B}(t), t \in T)$, のように表される。 ただし T は R の区間とする。f の変数である $\dot{B}(t)$ が微小変化したときの f の変動を表すには $\dot{B}(t)$ による微分を用いる。 この微分を行うには、汎関数 f を適当な変換(S-変換と呼ばれる）により通常の汎関数によって表現し、微分は変分になる。こうして、ホワイトノイズ解析が展開できる。 ここで注意がある。各 $\dot{B}(t)$ はランダムな量であり、確率分布をもつ。infinitesimal なランダム量であるが、実際は 1 次元を張る。そして全体では連続無限個ある。解析は当然無限次元解析となるのである。

確率場が確率論の対象として、何時頃から系統的に研究され始めたかを言うことは難しい。単なる確率過程の一般化として取り上げられたというだけでは成功例は少ない。しかし、関数解析や物理学の課題に対する研究からの自然な展開として確率論と対象として取り上げられた例は多く、それらは興味深い成果をあげている。ここでは経路積分に関連した話題を取り上げたい。

経路積分 (path integral) は、R. Feynman によって 1948 年に、その

定式化をみたが、そこにいたる idea は Feynman 自身も述べているように ([4] 参照)、P.A.M. Dirac の影響があったようである。しかし、経路積分の意味も、積分法に重点をおいてその意味を広義に解釈すれば、理論の歴史は古く、積分の方法もその対象も、ともにバラエテイーに富んでいる。

それらを比較する資料として、次の大作（書物）を取り上げてみよう：G.W. Johnson and M.L. Lapidus, The Feynman integral and Feynman's operational calculus. Oxford Univ. Press. 2000.

この書物では、我々の取り上げたい話題が多く述べられていて、資料あるいは参考書とするには好適である。しかし、視点においても目標においても、いくらか我々とは考えを異にするところが散見される。

さて、一定時間内に動く粒子の軌跡を表す関数が path （経路）である。適当な paths の集合（空間）に、種々の部分集合の多さを測る測度を導入して、path の関数の積分を考えようというのが経路積分の理論である。ガウス型の測度を連続関数の空間に導入して積分論を始めたのは N. Wiener (1923) であった。その空間は Wiener 空間と呼ばれている。また、R. Cameron-W.T. Martin によるその空間上の積分論としての一連の仕事は 1940 年頃から続いた。1960 年前後からは I.E. Segal や　I.M. Gel'fand など物理学との関連も考慮して関数空間上の測度や積分が研究された。また M. Kac はこの方向での original な論文として、1949, 1951 (Berkeley Symp.) に力学との関連を示す興味深い結果を発表して、確率論に新しい課題をも提供した。その一例をあげよう。$V(x)$ を適当な条件をみたすポテンシャルとし、Hamiltonian $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ を考える。このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu, \quad u(0,\cdot) = \psi(\cdot)$$

の解が Wiener 測度 m による積分

$$e^{-tH}\psi(\xi) = \int_C \exp\left[-\int_0^t V(x(s)+\xi)ds\right]\psi(x(t)+\xi)dm(x)$$

によって与えられることを示した。これは Ferynman-Kac formula としてよく知られており、また広く応用もされている。形としては、後に述べる

Feynman inregral による quantum mechanical propagator (Green's function) の表現に似ているので、両者を関連づけて量子力学の発展に役立たせようとして、多くの努力がなされてきた。歴史としては興味ある事実が多いし、コメントしたいことも沢山あるが、別な機会に譲ることにすろ。

実際、経路積分を関数空間上の汎関数の積分を中心とした積分論としての視点で見るならば前述のように、見事な成果があげられていることは周知のことである。ここでは、我々は Dirac-Feynman の考えを再訪して、そこにウエイトをおいた経路積分の数学的な設定を考えていきたい。

3 Dirac と Feynman の考え

(I) Dirac は、不朽の名著とされる彼の著書 [1] の第V章 32 節 The action principle において、古典力学との類似で Lagrangian の時間積分である Action S から出発する：

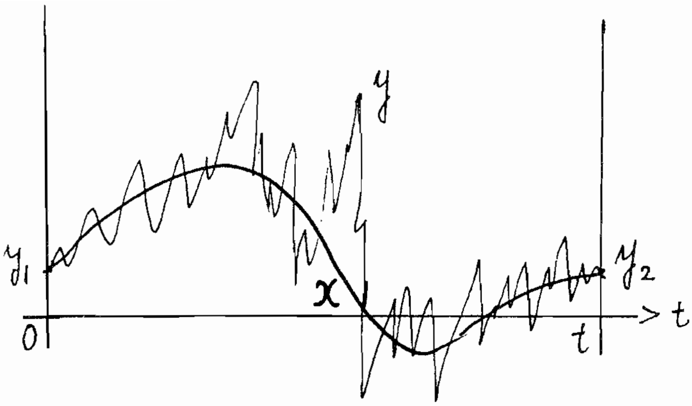
$$S(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(s)ds.$$

この S の停留値が古典的な path を与える。ここで重要なことは S に**変分** を施すステップが最初にあるということである。この注意は、以後一般化を考えるときの指針になる。それは optimality によって代弁されることにもなろう。

量子論では、古典的な path のまわりをゆらいでいる path も考えなければならない。いま、時間区間を $[0,t]$ にとり、 Lagrangian できまる古典的な path　を $x(s), 0 \leq s \leq t,$ としよう。ゆらがせた path $y(s)$ は

$$y(s) = x(s) + \sqrt{\frac{\hbar}{m}} B_b(s) \quad 0 \leq s \leq t$$

とする ([7], [10] 参照)。ここで、$B_b(s)$ は Brownian bridge を表す。こうとっても Dirac の設定はくずれない。



すなわち

$$\exp[iS(t_0,t_1)/\hbar] = B(t_0,t_1)$$

とおくとき、時間区間 $[0,t]$ を分割して, 分点を順に $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ とするとき

$$B(0,t) = B(t_0,t_1)B(t_1,t_2)\ldots B(t_{n-1},t_n)$$

となり、Markov 過程の推移確率のみたす関係式を想像させる。Dirac や Feynman の記述 [1], [4] と併せて、量子力学的な propagator (Green's function) を求めるために、この action を用いた path integral についての一つの提案を試みたのが筆者達の結果 [7], [10] である。 その後、徐々にではあるが, この方法が理解され、ポテンシャルがある種の singularity をもつときにも有効であることがわかった (Streit ほか)。

さて、具体的な積分の定義を説明する前に、" なぜ古典的な path をゆらがせるのに、上のような Brownian bridge を取り上げたか？" を説明しなければならない。

古典的な path を揺らがせるランダム量としての確率過程を $X(t)$ としよう。これが、どのような条件を満たすべきか。そして、その条件を満たすものは、上で選んだような Brownian bridge でなければならないことを示そう。それは, Brownian bridge の一つの特徴づけといってもよい。

パワーが一定という条件の下で最大のゆらぎを持つものは、ガウス型で

ある。したがって $X(t)$ はガウス過程としてよい。時間は単位区間を固定しておく。

定理　ゆらぎを表すガウス課程 $X(t), t \in [0,1]$, が次の条件 1) ～ 4) を満たすとすれば、それは定数を除き Brownian bridge である。

1) 平均が 0 の Markov 過程である。

2) Bridge されている： $X(0) = X(1) = 0.$

3) $X(t)$ を normalize した確率過程を $Y(t)$ とする。$\{Y(t)\}$ の分布は時間区間 $[0,1]$ の射影変換で不変である。

4) $Y(t)$ は normalize されたブラウン運動と同じ局所連続性をもつ。

証明は 1) ～3) により $Y(t)$ の共分散関数 $\gamma(s,t)$ が $0,1; s,t$ の非調和比 (0,1: s,t) の関数になること、さらに 4) から、その関数が平方根をとることになる等を用いて得られる。(詳しくは [6] 参照。)

註 この定理のような Brownian bridge の特徴づけは、多次元パラメータの場合にも参考となる。また結論にいたるまでに、変分、optimality, invariance などを取り上げていることに注意したい。

さて、こうしてきまった Brownian bridge を用いた Feynman path integral の定義であるが、積分計算の都合上 Brownian bridge の代わりに通常のブラウン運動 $B(t)$ をおき、被積分関数に δ-関数 $\delta(B(t))$ をおいて、pinning effect を期待する。したがって、propagator を求める式は次のようになる。

$$\left\langle N \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(y,\dot{y})ds + \frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds\right] \delta_o(y(t) - y_2)\right\rangle$$

ここで factor

$$\exp[\frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds]$$

が置かれていることの説明が必要である。ホワイトノイズ測度は無限次元の標準ガウス測度 μ で、形式的に言えば、μ は E^* 上のルベーグ測度 dL

を用いて $\exp[-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds]dL$ と表現されよう。(再び $\dot{B}(t)$ が変数であることに注意する。) すなわちこの factor は μ を flat にする作用と考えてよい。もう一つ大事なことは $\dot{B}(t)^2$ の指数関数が、今説明した汎関数のほかに $L(y,\dot{y})$ にも陰に含まれていることである。これらは我々の得意とするホワイトノイズ超汎関数で delta 関数とも併せて、すべて正しく定義され、積分も形式的として避けているところは全くない。

さらに、物理的な直感も十分尊重して設定しているところが、この方式の大きな advantage である。

(II) これまでパラメータは1次元としてきたが、その結果を多次元パラメータの場合に拡張したい。実は **(I)** ではそれを意識して議論してきた。ここで、また 1933 年の論文 [2] の中に汲み取ることができる Dirac の考えを思い出したい。時間 t は多次元空間の点または空間内の滑らかな閉多様体 C に変わる。

path integral には Hamiltonian による方法もあるが、我々の理解が正しければ Dirac は Lagrangian dynamics を好むようである。

我々も Lagrangian から話を始めよう。Action functional は前と同様に定義される。$B(t,s)$ も拡張されるが、問題は (I) のときに、背後にあった確率過程をどのように一般化するかということである。すなわち、bridged process の一般化である。

たとえば、d 次元時空パラメータの場合で言えば、やはり Dirac [2] を参考にして、順序づけられた contour のシステム $\mathbf{C} = \{C; \mathbf{C}^\infty - ovaloid\}$ をとることになろう。そして確率場 $X(C)$ を Brownian bridge の一般化としたいが、それをきめるのは、射影不変性ではなくて、共形不変性であり、そのような場の決定にはやはり確率変分の解で与えられる確率場 $X(C)$ が必要である。それに対する候補を挙げることができるし,その性質も調べられている。ここで、共形変換はホワイトノイズ測度を不変にする **無限次元回転群** から来ることに注意したい。

そこで、我々数学のサイドに大きな課題が与えられたことになる。すなわち、確率場の一般的な研究である。実際、多次元パラメータの場合の path integral により多くのの積極的かつ具体的な研究課題が見出された；超汎関数の活用、より一般な quantum propagator の計算、無限次元回転群による reversibility や確率場の特徴づけ等々である。稔り多き研究分野を提供している。

確率場の理論はまだ若く、一般論としてその歴史を論ずるにはまだ早いというのが現状である。(文献 [6] 参照。) しかし、場の理論を指向した path integral を歴史とみて開拓されるであろう分野は確率場の話題の中で重要な位置を占めることは確かである。

計算の本質的なところは、ホワイトノイズの"超汎関数"によるところが大きい。そのほか、[6] で見られるように、パラメータが多次元（多時間）であるだけに、それを変化させるときに伝達される情報量は破格に大きい。そこで"無限次元回転群"の知識が有効となることを見た。両概念はホワイトノイズ理論の advantages とするところであり、理論の進展に弾みをつけている。

4 あとがき

これはホワイトノイズ解析の自由さの表れとでもいうべきか、最近とくに目立った動きがあって注目されている話題に Chern-Simons (or Chern-Simons-Witten) の action による path integral がある。関連して、たとえば文献 [9] やそこでの引用文献に見られるように、Connes 等による非可換幾何学との interplay がある。この話題については欧米の研究者の活躍は目覚しいものがある。

これらのことを、流行として追うのではなくて、近過去（?）の歴史としてとらえ、その思想を眺め、我々の自由な発想で活かせてみたいものである。

[文献]

[1] P.A.M. Dirac, The priciples of quantum mechanics. Oxford Univ. Press. 1930. 4th ed. 1958.

[2] P.A.M. Dirac, The Lagrangian in quantum mechanics. Ohys. Weitschrift der Soviet Union. 3 (1933), 64-72.

[3] P.A.M. Dirac, On the analogy between classical and quantum mechanics. Review of Modern Phys. 17 (1945), 195-199.

[4] R. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Review of Modern Phys. 20 (1948), 367-387.

[5] R. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill Book Co. 1965.

[6] T. Hida and Si Si, An innovation approach to random fields: Application of white noise theory. World Sci. Pub. Co. Ltd. 2004.

[7] T. Hida and L. Streit, Generalized Brownian functionals. Mathematical Problems in Theoretical Phys. Proc. 1981 Berlin Conf. L. N. in Phys. no.153, 285-287.

[8] H.S. Kragh, Dirac. A scientific biography. Cambridge Univ. Press. 1990.

[9] R. Léandre and H. Ouerdiane, Connes-Hida calculus and Bismut-Quillen auperconnections. Prépub. Institut Élie Cartin. 2003/no.17 [10] L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian functionals and the Feynman integral. Stochastic Processes and Their Applications. 16 (1983), 55-69.