久保田-Leopoldt による p 進 L 関数の構成

静岡県立三島北高等学校　宮川　幸隆

2003. 7. 23.

目次

1　Dirichlet の L 関数

n を正整数とする。有理整数環$\boldsymbol{Z}$から複素数体$\boldsymbol{C}$への写像

$$\chi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{C}$$

は、

i)　$a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow \chi(a) = \chi(b)$,

ii)　$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad for \forall a, b \in \boldsymbol{Z}$,

iii)　$\chi(a) \neq 0 \Longleftrightarrow (a, n) = 1$

を満たすとき、mod$n$ で定義された Dirichlet 指標と呼ばれる。

m を n の正の約数とし、χ'をmod$m$ で定義された Dirichlet 指標とするとき、$\chi(a), \quad a \in \boldsymbol{Z}$, を

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi'(a) & ((a,n) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & ((a,n) > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義すると、χはmod$n$ で定義された Dirichlet 指標となる。指標χをχ'から誘導された指標と呼ぶ。mod$n$ で定義された Dirichlet 指標が、$m < n$ なる n のどんな正の約数 m に対しても、mod$m$ で定義された Dirichlet 指標から誘導されないとき、χは原始的であると呼ばれる。このとき n はχの導手と呼ばれる。以下においては、すべての Dirichlet 指標は原始的であると仮定する。χを Dirichlet 指標とし、

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

とおくと $L(s,\chi)$ は半平面$\Re(s) > 1$ において s の正則関数を表すが、これは全 s 平面に解析接続され、χに関する Dirichlet の L 関数と呼ばれる。

単位指標$\chi^0 : \boldsymbol{Z} \ni a \mapsto 1 \in \boldsymbol{C}$に関する Dirichlet の L 関数は、Riemann のζ関数$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$に他ならない。$\chi \neq \chi^0$ならば $L(s,\chi)$ は全 s 平面において s の正則関数を表すが、$L(s,\chi^0) = \zeta(s)$ は $s = 1$ において、位数 1 、留数 1 の唯一の極を持つ。

2　一般 Bernoulli 数と L 関数の非正整数値での値

導手 fの Dirichlet 指標χに対し、Bernoulli 数の拡張である一般 Bernoulli 数（正確には、χに属する一般 Bernoulli 数）$B_{\chi,n}$が次のように定義される：n 番目の一般 Bernoulli 数 ($n = 0, 1, 2, \cdots$) は、t を変数として母関数

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) t e^{at}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\chi,n} t^n$$

で定義される。右辺の級数を記号的に $e^{B_\chi t}$で表す。

$$e^{B_\chi t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_\chi^n t^n$$

であるから、$B_{\chi,n}$と B_χ^nとを同一視する訳である。

χが単位指標χ^0の場合には、その導手は 1 に等しく、$B_{\chi,n}$は普通の Bernoulli 数 B_nに他ならない。

一般 Bernoulli 数 $B_{\chi,n}$は、有理数体$\boldsymbol{Q}$上で、χの全ての値$\chi(a), a \in \boldsymbol{Z}$の添加で生じる円分体$\boldsymbol{Q}(\chi) = \boldsymbol{Q}(\{\chi(a); a \in \boldsymbol{Z}\})$ に属する数である。

さて、$\epsilon > 0$ を十分小として、$C_\epsilon = (-\infty, -\epsilon] \cup K_\epsilon \cup [-\epsilon, -\infty), \quad K_\epsilon$は原点 Oを中心とする半径ϵの円周から点$-\epsilon$ を除いたものとする。

複素変数 s は、任意として、C_ϵ上での積分

$$F_\chi(s) = \int_{C_\epsilon} e^{B_\chi t} t^{s-1} \frac{dt}{t} = \int_{C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{at}}{e^{ft}-1} t^{s-1} dt$$

を考える。ここで、$t^{s-1} = e^{(s-1)\log t}$は主値を表す。$t = -u$ と置換すれば、$dt = -du$ で、

$$F_\chi(s) = \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{e^{-fu}-1} (-u)^{s-1}(-du)$$

$$= \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{(f-a)u}}{e^{fu}-1} (-1)^{s-1} u^{s-1} du$$

$$= (-1)^{s-1} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{(f-a)u}}{e^{fu}-1} u^{s-1} du$$

$$= (-1)^{-1}(-1)^{s} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{(f-a)u}}{e^{fu}-1} u^{s-1} du$$

$$= -e^{-\pi i s} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{(f-a)u}}{e^{fu}-1} u^{s-1} du$$

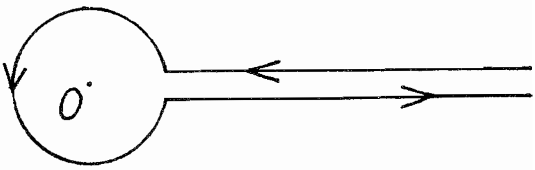
$$= -e^{-\pi i s} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{au}}{e^{fu}-1} u^{s-1} du$$

$$= -e^{-\pi i s} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{(a-f)u}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du$$

$$= -e^{-\pi i s} \int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du,$$

ここで、$u^{s-1} = e^{(s-1)\log u}$は
$0 \leq \Im(\log u) \leq 2\pi$をもつ。
明らかに、

$-C_\epsilon$:



$$\int_{-C_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du$$

$$= \int_{\infty}^{\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} e^{(s-1)\log u} du + \int_{-K_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du + \int_{\epsilon}^{\infty} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} e^{(s-1)(\log u + 2\pi i)} du$$

$$= \int_{-K_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du + (e^{2\pi i s}-1) \int_{\epsilon}^{\infty} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} e^{(s-1)(\log u + 2\pi i)} du.$$

更に明らかに、

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-K_\epsilon} \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du = 0$$

なので、

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\chi(s) = -(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s})\int_0^\infty \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du.$$

一方では、

$$\int_0^\infty \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)e^{-au}}{1-e^{-fu}} u^{s-1} du = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nfu} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)e^{-au}u^{s-1}du$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{f} \chi(a)e^{-(a+nf)u}u^{s-1}du$$

ここで、$\chi(a) = \chi(a+nf)$ に注意すると、

$$= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)e^{-nu}u^{s-1}du = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\int_0^\infty e^{-nt}t^{s-1}dt$$

ここで、$nt = u$ と置換すると、$du = ndt$ であって、

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\int_0^\infty e^{-u}(\frac{u}{n})^{s-1}\frac{du}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\Gamma(s) = L(s,\chi)\Gamma(s)$$

ただし、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du$$

はガンマ関数を表す。したがって

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\chi(s) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} e^{B_\chi t}t^{s-1}\frac{dt}{t} = -2i\sin(\pi s)L(s,\chi)\Gamma(s).$$

ゆえに、

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

を用いて、

$$\frac{L(s,\chi)}{\Gamma(1-s)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{B_\chi t}t^{s-1}\frac{dt}{t}$$

を得る。ここに C は C_ϵ の極限（$\epsilon \to 0$ のときの）である。ここで、$s = 1-n$ とおけば、留数定理から、

$$\frac{L(1-n,\chi)}{(n-1)!} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{B_\chi t}t^{-n}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{\chi,k}}{k!}t^{k-n-1}dt = -\frac{B_{\chi,n}}{n!},$$

したがって、

2.0.1

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{\chi,n}}{n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ。

次に、定義式

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1} = e^{B_\chi t}$$

の両辺に e^{xt} を掛け、分母を払って t^{n+1} の係数を比較すると、

$$\sum_{a=1}^{f} \chi(a)te^{at}e^{xt} = e^{B_\chi t}e^{xt}(e^{ft}-1),$$

$$\sum_{a=1}^{f} \chi(a)te^{(a+x)t} = e^{(B_\chi+x+f)t} - e^{(B_\chi+x)t}$$

から、

$$\sum_{a=1}^{f} \chi(a)\frac{(a+x)^n}{n!} = \frac{(B_\chi+x+f)^{n+1}-(B_\chi+x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

即ち、

$$\sum_{a=1}^{f} \chi(a)(a+x)^n = \frac{(B_\chi+x+f)^{n+1}-(B_\chi+x)^{n+1}}{n+1}$$

を得る。ここで $x = 0, f, \cdots, f(N-1)$ として和を作れば、

2.0.2

$$\sum_{r=1}^{fN} \chi(r)r^n = \frac{(B_\chi+fN)^{n+1}-{B_\chi}^{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0)$$

を得る。ここで、${B_\chi}^n$ は記号的に $B_{\chi,n}$ を表す訳である。

素数 p を定め、$N = p^\rho$ にとり、$\rho \to \infty$ とすると、

2.0.3

$$B_{\chi,n} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{fp^\rho} \sum_{r=1}^{fp^\rho} \chi(r)r^n$$

を得ることが示される。実際、2.0.2 から、

$$fN{B_\chi}^n + \frac{1}{n+1}\{\binom{n+1}{2}(fN)^2{B_\chi}^{n-1} + \binom{n+1}{3}(fN)^3{B_\chi}^{n-2} + \cdots + (fN)^{n+1}\} = \sum_{r=1}^{fN} \chi(r)r^n,$$

なので、

$$fp^\rho B_{\chi,n} + \frac{1}{n+1}\{\binom{n+1}{2}(fp^\rho)^2B_{\chi,n-1} + \binom{n+1}{3}(fp^\rho)^3B_{\chi,n-2} + \cdots + (fp^\rho)^{n+1}\} = \sum_{r=1}^{fp^\rho} \chi(r)r^n,$$

即ち、

$$B_{\chi,n}=\frac{1}{fp^\rho}\sum_{r=1}^{fp^\rho}\chi(r)r^n-\frac{1}{n+1}\{\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}fp^\rho B_{\chi,n-1}+\begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix}(fp^\rho)^2B_{\chi,n-2}+\cdots+(fp^\rho)^n\}$$

であって、p 進数体$\boldsymbol{Q}_p$上の円分体$\boldsymbol{Q}_p(\chi)$ において、$\rho\to\infty$ のとき $\{\quad\}\to 0$ となるからである。

2.0.1 と 2.0.3 から、p 進極限公式

2.0.4

$$L(1-n,\chi)=-\frac{1}{n}\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{r=1}^{fp^\rho}\chi(r)r^n\quad(n\geq 1)$$

を得る。

3　p 進指数関数と p 進対数関数

p を素数とする。有理数 a に対し a の p 進付値 $ord_p(a)$ が次のように定義される：　まず、$ord_p(0)=\infty$ と定める。次に $a\neq 0$ の場合

$$a=p^m\frac{u}{v}\quad(m\in\boldsymbol{Z};\quad u,v\text{は }p\text{ で割れない整数})$$

と表すとき、$ord_p(a)=m$ と定める。そこで、

$$|a|_p=p^{-ord_p(a)}$$

とおき、これを a の p 進絶対値と呼ぶ。$|0|_p=p^{-ord_p(0)}=p^{-\infty}=0$ と考える。解析を行う場合、実数体$\boldsymbol{R}$で考えるより複素数体$\boldsymbol{C}$で考えた方が良いが、p 進数体$\boldsymbol{Q}_p$の場合に$\boldsymbol{C}$に相当するのは、$\boldsymbol{Q}_p$の代数的閉包の完備化$\boldsymbol{C}_p$である。$|\quad|_p$は$\boldsymbol{C}_p$に延長され、

（１）$|a|_p\geq 0$ かつ等号は $a=0$ のときにのみ成り立つ。

（２）$|ab|_p=|a|_p|b|_p$

（３）$|a+b|_p\leq\max(|a|_p,|b|_p)$

という性質を持つ。また、次が成り立つ：

$$\boldsymbol{Z}_p=\{a\in\boldsymbol{Q}_p;|a|_p\leq 1\},$$

$$\boldsymbol{Z}_p{}^*=\{a\in\boldsymbol{Q}_p;|a|_p=1\}.$$

級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

は$\boldsymbol{C}_p$の部分集合

$$|z|_p<|p^{1/(p-1)}|_p$$

で収束する。そこで、この級数で定義される関数を $\exp_p(z)$ で表し、p 進指数関数と呼ぶ。p 進指数関数も $|x|_p,|y|_p<|p^{1/(p-1)}|_p$で、

$$\exp_p(x+y)=\exp_p(x)\exp_p(y)$$

を満たす。

同様にして、p 進対数関数を

$$\log_p(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n}$$

で定義すると、$|z-1|_p<1$ のとき収束する。更に

$$\log_p(xy)=\log_p(x)+\log_p(y),\quad \exp_p(\log_p(z))=z,\quad \log_p(\exp_p(z))=z$$

が両辺が意味を持つ範囲で成り立つ。

更に、$p\neq 2$ ならば $m\geq 1$ とし、$p\neq 2$ ならば $m\geq 2$ とするとき、$\exp_p$ と $\log_p$ は群としての互いに逆な同型

$$\text{加法群}\ p^m\boldsymbol{Z}_p\cong\text{乗法群}\ 1+p^m\boldsymbol{Z}_p=\{1+p^m a; a\in\boldsymbol{Z}_p\}$$

を与える。

4　p 進 L 関数の構成

素数 p が $p\neq 2$ ならば $q=p$、$p=2$ ならば $q=4$ とおく。これは $|q|_p<|p^{1/(p-1)}|_p$ となる最小の p の巾で、よって p 進指数関数 $\exp_p(z)$ は $|z|_p\leq|q|_p$ のとき収束する。また $\boldsymbol{Z}_p{}^*$ についての次の事実は基本的である：

$$\boldsymbol{Z}_p{}^*=(\boldsymbol{Z}/q)^*\times(1+q\boldsymbol{Z}_p).$$

射影　$\omega:\boldsymbol{Z}_p{}^*\longrightarrow(\boldsymbol{Z}/q)^*$ を Teichmüller 指標と呼ぶ。

$\langle a\rangle=\omega(a)^{-1}a$ とおくと、$\langle\quad\rangle:\boldsymbol{Z}_p{}^*\longrightarrow 1+q\boldsymbol{Z}_p$ という写像ができる。$a\in\boldsymbol{Z}_p{}^*$ のとき、$\langle a\rangle\in 1+q\boldsymbol{Z}_p$ であるから、$\log_p\langle a\rangle\in q\boldsymbol{Z}_p$,　よって、$|\log_p\langle a\rangle|_p\leq|q|_p$. 従って、

$$\langle a\rangle^s=\exp_p(s\log_p\langle a\rangle)$$

という s の関数は、$|s|_p<|q^{-1}p^{1/(p-1)}|_p$ で定義され、特に $s\in\boldsymbol{Z}$ でも定義される。

p 進極限公式 2.0.4 に於いて、$r=kp^l((k,p)=1;l=0,1,2,\cdots)$ の形のものを等比級数の公式を用いてまとめると、$n\geq 1$ のとき、

$$-nL(1-n,\chi)=\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{r=1}^{fp^\rho}\chi(r)r^n=\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\sum_{l=0}^{\infty}\chi(kp^l)(kp^l)^n$$

$$=\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\chi(k)k^n\sum_{l=0}^{\infty}\{\chi(p)p^n\}^l=\frac{1}{1-\chi(p)p^n}\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\chi(k)k^n$$

と書ける。ω は導手が q の Dirichlet 指標であるから、χ を $\chi\omega^{-n}$ で置き換え、両辺に $1-(\chi\omega^{-n})(p)p^n$ を掛けると、

4.0.5

$$(1-(\chi\omega^{-n})(p)p^n)L(1-n,\chi\omega^{-n})=-\frac{1}{n}\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\chi(k)\langle k\rangle^n$$

を得る。そこで、$f>1$ のとき、

4.0.6

$$L_p(s,\chi) = -\frac{1}{1-s}\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\chi(k)\langle k\rangle^{1-s}$$

と置くと、この式の右辺の極限は $|s|_p < |q^{-1}p^{1/(p-1)}|_p$ という範囲で収束し、s の収束巾級数に展開される。この s の関数 $L_p(s,\chi)$ を Dirichlet 指標χに対する p 進 L 関数と呼ぶ。

$n=1,2,3,\cdots$に対しては、4.0.5 と 4.0.6 から、

$$L_p(1-n,\chi) = -\frac{1}{n}\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{fp^\rho}\sum_{1\leq k<fp^\rho,(k,p)=1}\chi(k)\langle k\rangle^{n} = (1-(\chi\omega^{-n})(p)p^n)L(1-n,\chi\omega^{-n})$$

が成り立つ訳である。これが p 進 L 関数の主定理である。

5 参考文献

[1] K. Iwasawa、Lectures on p-adic L-functions、Princeton U. P.、1972.

[2] 白谷 克巳、整数論入門、牧野書店、2001.

[3] 加藤 和也·黒川 信重·斎藤 毅、数論1、岩波書店、1996.

[4] 森田 康夫、p 進 $L-$関数とは?、雑誌「数学のたのしみ」、第15号、日本評論社、1999.