等質空間における軌道方法と調和解析

佐野 茂

平成16 年 2 月 12 日

1 はじめに

等質空間での調和解析について，今まで一般論の歴史を振り返ってきた ([Sa4,5])．本稿では軌道方法による調和解析の歴史をまとめる．コンパクト群においては，この方法による証明は構成的で定理も明示的に述べることができた．そこで非コンパクト半単純リー群に対しても同様な方法がまず研究された．しかしその歴史は平坦ではなかった．まず有限次元の行列成分が L^2 関数ではなく，このことからも無限次元表現を考える必要が出てきた．まず一般の簡約リー群の場合に主定理をあたえ，次に具体例として $SL(2,\mathbb{R})$ のときに定理を述べる．この主定理を証明するために軌道方法が確立されていく歴史と必要とする定理をまとめていく．さらに簡約対称空間への軌道方法の一般化の試みについても紹介する．

最後に今後の課題をまとめとして述べる．ここでは離散部分群で割った等質空間についても，既存の理論と対比させながら軌道法の可能性と問題点を探る．

2 簡約群上の軌道方法

この節では，一般の簡約群で軌道方法を述べる．G を H-C クラスの実簡約リー群とし，$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍展開環とし，その中心を $\mathfrak{z}$ とする．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ を表現空間とする G の既約ユニタリ表現 π をとる．$\{\phi_j\}$ を $\mathscr{H}$ の正規直交基底とする．このときトレース

$$\Phi_\pi(g) = \sum_j (\pi(g)\phi_j, \phi_j) \tag{1}$$

を用いて定義される超関数

$$C_c^\infty(G) \ni f \to \int_G \Phi_\pi(g) f(g) dg \tag{2}$$

は次の性質

(1) 不変性

$$\Phi_\pi(gag^{-1}) = \Phi_\pi(a) \quad (g,\ a \in G) \tag{3}$$

(2) 準同形写像 $\lambda : \mathfrak{Z} \to \mathbb{C}$ が存在して

$$Z\Phi_\pi = \lambda(Z)\Phi_\pi \quad (Z \in \mathfrak{Z}) \tag{4}$$

を満足する．

この 2 つの性質 (1)，(2) を満足する G 上の超関数を不変固有超関数と呼ぶ．指標を表現から構成するだけでなく，この不変固有超関数から指標を特徴づける研究も豊かな成果を生んでいく．

カルタン部分環 $\mathfrak{a}$ に対して，$\Sigma(\mathfrak{a})$ をルート系とし正のルートもあたえておく．各ルート α に対して，ルートベクトル X_α，$X_{-\alpha}$ をキリング形式による関係 $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ をみたすようにとり，

$$H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}], \quad H'_\alpha = 2|\alpha|^{-2}H_\alpha, \quad X'_{\pm\alpha} = \sqrt{2}|\alpha|^{-1}X_{\pm\alpha} \tag{5}$$

とおく．$J^\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}$ に対応するカルタン部分群とする．任意のルートに対して，$J^\mathfrak{a}$ から $\mathbb{C}^*$ への準同形写像 ξ_α と ξ_ρ を

$$\mathrm{Ad}(a)X_\alpha = \xi_\alpha(a)X_\alpha, \quad \xi_\rho(a) = \left(\prod_{\alpha>0}\xi_\alpha(a)\right)^{1/2} \quad (a \in J^\mathfrak{a})$$

で（必要があれば主値をとって）定義し

$$\Delta^\mathfrak{a}(a) = \prod_{\alpha>0}\xi_\rho(a)(1-\xi_\alpha(a)^{-1})$$

とおく．そして軌道積分を

$$F_f^\mathfrak{a}(a) = \Delta^\mathfrak{a}(a)\int_{G/J^\mathfrak{a}} f(gag^{-1})dg^* \quad (a \in J^\mathfrak{a}) \tag{6}$$

で定義する．この積分を利用すると群 G の単位元 e に台をもつデルタ関数は次の定理でとらえられる．

定理 1．$\mathfrak{a}$ をコンパクトカルタン部分環とする．各ルート $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$ のルートベクトル H_α をとり，その積を $\omega = \prod_{\alpha>0} H_\alpha$ とおく．このとき，積分 $F_f^\mathfrak{a}(a)$ は dg^* を適当に正規化すると

$$f(e) = \lim_{a\to e}\omega\, F_f^\mathfrak{a}(a) \tag{7}$$

をみたす．

$\mathfrak{g}$ のカルタン部分リー環 $\mathfrak{a}_k$ $(k = 1, ..., n)$ の集合は互いに共役とならない極大系とする．対応する G のカルタン部分群を $J_k = Z_G(\mathfrak{a}_k)$ とする．G の正則元からなる稠密部分開集合を G' とし $J'_k = J_k \cap G'$ とおくと，軌道分解

$$G' = \bigcup_k \bigcup_{g\in G} gJ'_kg^{-1} \tag{8}$$

が成り立つ．この軌道分解に従い積分公式

$$\Phi_\pi(f) := \int_G f(g)\Phi_\pi(g)\,dg = \sum_{k=1}^{n}\int_{G/J_k}\int_{J_k} f(gag^{-1})\Phi_\pi(a)|\Delta^k(a)|^2\,d_k a\,dg^* \tag{9}$$

が成り立つ．

$\mathfrak{g}$ のカルタン対合 (involution) を θ とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を対応するカルタン分解そして K を G の $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト部分群とする．先の極大系となるカルタン部分リー環 $\mathfrak{a}_k$ $(k=1,...,n)$ は θ 不変とする．各カルタン部分群 $J_k=J_k^I J_k^R$ $(J_k^I=K\cap J_k,\ J_k^R=\exp\mathfrak{p}\cap J_k)$ に対応して G の放物部分群 $P_k=M_kJ_k^RN_k$ をとり，ラングランズ分解の M_k の離散系列表現 σ と $\nu\in(J_k^R)^*$ に対して誘導表現

$$\pi_{\sigma,\nu}=\operatorname*{Ind}_{P_k\uparrow G}\sigma\otimes\nu\otimes 1 \tag{10}$$

をとり，その指標を $\Phi_{\sigma,\nu}^k$ とする．

$\mathscr{E}_2(M_k)$ を M_k の離散系列表現の同値類からなる集合とする．このとき次の主定理が成り立つ．

定理 2 (Plancherel **の定理**)．測度 $C(\sigma,\nu)d\nu$ が存在して，$C_c^\infty(G)$ に属する任意の関数 $f(g)$ に対して

$$f(e)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathscr{E}_2(M_k)}\int_{(J_k^R)^*}\Phi_{\sigma,\nu}^k(f)\,C(\sigma,\nu)\,d\nu \tag{11}$$

が成り立つ．

この定理により，正則表現の既約分解があたえられる．また，単位元に台をもつデルタ関数を不変固有超関数で展開しているとも理解できる．証明の方針を具体例 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合に述べていく．

3 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の調和解析

定理の内容を理解するために単純群 $G=SL(2,\mathbb{R})$ の場合に軌道方法による調和解析についてまとめる．まずいくつか記号をあたえておく．

$$D(t)=\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix},\quad U(\theta)=\begin{pmatrix} 0 & -\theta\\ \theta & 0\end{pmatrix},\quad E(x)=\begin{pmatrix} 0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$a_t=\exp D(t),\qquad k_\theta=\exp U(\theta),\qquad n_x=\exp E(x).$$

G の閉部分群 K, M, $A_\mathfrak{p}$, N を

$$K=\{k_\theta:\theta\in\mathbb{R}\},\qquad M=\{\varepsilon:\varepsilon=\pm 1_2\},$$

$$A_\mathfrak{p}=\{a_t:t\in\mathbb{R}\},\qquad N=\{n_x:x\in\mathbb{R}\}$$

とおく．ここでは G の単位元を $e=1_2$ としている．

また G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし，そのカルタン部分リー環を $\mathfrak{a}=\{D(t):t\in\mathbb{R}\}$, $\mathfrak{b}=\{U(\theta):\theta\in\mathbb{R}\}$ とすると，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ は G の作用で互いに共役にならない $\mathfrak{g}$ のカルタン部分リー環の極大系となるが，次のケーリー変換

$$\nu=\exp\frac{\pi i}{4}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \tag{12}$$

により，$\nu(\mathfrak{a}_c)=\mathfrak{b}_c$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_c\cap\mathfrak{g}$ と移る．また対応する G のカルタン部分群は

$$J^{\mathfrak{a}}=\{\varepsilon a_t:\varepsilon=\pm 1_2\},\qquad J^{\mathfrak{b}}=\{k_\theta:\theta\in\mathbb{R}\}$$

で，G の正則な元からなる開稠密部分集合 G' において軌道分解

$$G'=(\bigcup_{g\in G}g(J^{\mathfrak{a}})'g^{-1})\bigcup(\bigcup_{g\in G}g(J^{\mathfrak{b}})'g^{-1}) \tag{13}$$

が成り立つ．この分解に対応した Weyl の積分公式は

$$\begin{aligned}\int_G f(g)dg=&\frac{1}{2}\int_{G/J^{\mathfrak{a}}}\int_{J^{\mathfrak{a}}}f(gag^{-1})D^{\mathfrak{a}}(a)\ da\ d_{\mathfrak{a}}g^*\\&+\int_{G/J^{\mathfrak{b}}}\int_{J^{\mathfrak{b}}}f(gbg^{-1})D^{\mathfrak{b}}(b)\ db\ d_{\mathfrak{b}}g^*\ (f\in C_c^\infty(G))\\=&\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon}\int_{G/J^{\mathfrak{a}}}\int_{A_{\mathfrak{p}}}f(g\varepsilon a_tg^{-1})D^{\mathfrak{a}}(\varepsilon a_t)\ dt\ d_{\mathfrak{a}}g^*\\&+\int_{G/J^{\mathfrak{b}}}\int_{J^{\mathfrak{b}}}f(gk_\theta g^{-1})D^{\mathfrak{b}}(k_\theta)\ d\theta\ d_{\mathfrak{b}}g^*\ (f\in C_c^\infty(G))\end{aligned}$$

但し dg は G 上の Haar 測度で，これからあたえられる $G/J^{\mathfrak{a}}$ と $G/J^{\mathfrak{b}}$ 上の不変測度をそれぞれ $d_{\mathfrak{a}}g^*$ と $d_{\mathfrak{b}}g^*$ とする．また $D^{\mathfrak{a}}(a)=|\varepsilon e^t-\varepsilon e^{-t}|^2$ $(a=\varepsilon e^t)$ と $D^{\mathfrak{b}}(b)=|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2$ $(b=k_\theta)$ はヤコビアンである．

(1)　離散系列表現 $\mathscr{D}_n^+$ は関数空間

$$\{f\in\mathscr{O}(\mathrm{C}^+):||f||^2=\iint_{\mathbb{C}^+}|f(z)|^2y^{n-2}\,dx\,dy<\infty\}$$

において

$$[\mathscr{D}_n^+(g)f](z)=(-bz+d)^{-n}f\left(\frac{az-c}{-bz+d}\right),\qquad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G \tag{14}$$

で定義され，また離散系列表現 $\mathscr{D}_n^-$ は複素共役をとりあたえられる．

(2)　主系列表現 $\mathscr{P}^{0,i\nu}$, $\mathscr{P}^{1,i\nu}$ は $\epsilon=0,\ 1$ に対応して関数空間は $L^2(\mathbb{R})$ において

$$[\mathscr{P}^{\epsilon,i\nu}(g)f](x)=\mathrm{sgn}^{\,\epsilon}(-bx+d)\,|-bx+d|^{-1+i\nu}f\left(\frac{ax-c}{-bx+d}\right),\qquad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G \tag{15}$$

で定義される

この他にも既約ユニタリ表現として，有限次元表現や補系列表現などがあるが緩増加表現 (tempered representation) ではない．

命題3． 離散系列表現 $\mathscr{D}_n^+$ の指標は

$$\Theta_n^+(g) = \begin{cases} \dfrac{-e^{i(n-1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} & g \sim k_\theta, \\ \\ \varepsilon^n \dfrac{e^{-(n-1)|t|}}{|e^t - e^{-t}|} & g \sim \varepsilon a_t \end{cases} \tag{16}$$

そして $\mathscr{D}_n^-$ の指標は

$$\Theta_n^-(g) = \begin{cases} \dfrac{e^{-i(n-1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} & g \sim k_\theta, \\ \\ \varepsilon^n \dfrac{e^{-(n-1)|t|}}{|e^t - e^{-t}|} & g \sim \varepsilon a_t \end{cases} \tag{17}$$

なる局所可積分関数である．

これらの指標は G' 上では解析関数であたえられ，G 上で局所可積分関数となるのである．

命題4． 主系列表現 $P^{\epsilon,i\nu}$ の指標は次の局所可積分関数となる

$$\Phi^{\epsilon,i\nu}(g) = \begin{cases} 0 & g \sim k_\theta, \\ \varepsilon^\epsilon \dfrac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{|e^t - e^{-t}|} & g \sim \varepsilon a_t. \end{cases} \tag{18}$$

証明 指標は G-不変だから

$$\begin{aligned} \int_G \Phi^{\epsilon,i\nu}(g) f(g) dg &= \frac{1}{2}\int_{G/J^\mathfrak{a}} \int_{J^\mathfrak{a}} \Phi^{\epsilon,i\nu}(a) f(gag^{-1}) |D^\mathfrak{a}(a)|\, dg^*\, da \quad (a \in J^\mathfrak{a} = MA_\mathfrak{p}) \\ &= \sum_\varepsilon \frac{1}{2}\int_{A_\mathfrak{p}} (e^{i\nu}+e^{-i\nu})\varepsilon^\epsilon |e^t - e^{-t}| \int_{G/J^\mathfrak{a}} f(g\varepsilon a_t g^{-1})\, dg^*\, dt. \\ &= \sum_\varepsilon \int_{A_\mathfrak{p}} e^{i\nu}\varepsilon^\epsilon |e^t - e^{-t}| \int_{G/MA_\mathfrak{p}} f(g\varepsilon a_t g^{-1})\, dg^*\, dt. \end{aligned}$$

分解 $G = KNA_\mathfrak{p}$ を用いて

$$|e^t - e^{-t}| \int_{G/MA_\mathfrak{p}} f(g\varepsilon a_t g^{-1}) dg^* = |e^t - e^{-t}| \int_{K\times N} f(k_\theta n_x \varepsilon a_t n_x^{-1} k_\theta^{-1})\, d\theta\, dx.$$

ここで $a_t^{-1} n_x a_t n_x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (e^{-2t}-1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，となるから積分は

$$e^{\rho(t)} \int_{K\times N} f(k_\theta \varepsilon a_t n_x k_\theta^{-1})\, d\theta\, dx.$$

ゆえに

$$\int_G \Phi^{\epsilon,i\nu}(g)f(g)dg = \sum_{\varepsilon}\int_{K\times A_{\mathfrak{p}}\times N} f(k_\theta \varepsilon a_t n_x k_\theta^{-1})e^{(i\nu+\rho)(t)}\varepsilon^{\epsilon}\, d\theta\, dt\, dx.$$
$$= \mathrm{Tr}P^{\epsilon,i\nu}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

先の Weyl の積分公式より，各カルタン部分環に対応して次の積分を定義する

$$F_f^{\mathfrak{b}}(k_\theta) = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})\int_{G/J^{\mathfrak{b}}} f(gk_\theta g^{-1})\, d_{\mathfrak{b}}g^* \tag{19}$$

$$F_f^{\mathfrak{a}}(\varepsilon a_t) = \varepsilon|e^t - e^{-t}|\int_{G/J^{\mathfrak{a}}} f(g\varepsilon a_t g^{-1})\, d_{\mathfrak{a}}g^* \tag{20}$$

ここで分解 $G = KA_{\mathfrak{p}}K$ を用いて $f(x) = f(kxk^{-1})$ $({}^\forall k \in K)$ のとき

$$F_f^{\mathfrak{b}}(k_\theta) = 2\pi i \sin\theta \int_0^\infty f\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{2r}\sin\theta \\ -e^{-2r}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}(e^{2r} - e^{-2r})\, dr$$

となる，これを用いて次を得る．

命題5． 関数 f $(\in C_c^\infty(G))$ に対して

$$\left[\frac{dF_f^{\mathfrak{b}}}{d\theta}\right]_{\theta=0} = -2\pi i f(e) \tag{21}$$

また

$$\left[F_f^{\mathfrak{b}}(k_\theta)\right]_{\theta=+0} - \left[F_f^{\mathfrak{b}}(k_\theta)\right]_{\theta=-0} = \pi i F_f^{\mathfrak{a}}(a_0) \tag{22}$$

が成り立つ．

ここで

$$\Delta^{\mathfrak{b}}(k_\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta},\ \Delta^{\mathfrak{a}}(\varepsilon a_t) = \varepsilon(e^t - e^{-t})$$

とおき，命題5の関係式を用いると次の接続公式が成立．

定理6． Φ を不変固有超関数とすると，

$$\left[\frac{d}{i\,d\theta}(\Delta^{\mathfrak{b}}\,\Phi(k_\theta))\right]_{e^{i\theta}=\varepsilon} = \left[\frac{d}{dt}(\Delta^{\mathfrak{a}}\,\Phi(\varepsilon a_t))\right]_{t=0} \tag{23}$$

これらの関係式より，Plancherel の定理は指標を用いて次のようにあたえられる．

定理7． G 上の Haar 測度を岩沢分解を用いて正規化しておくと

$$\begin{aligned} 2\pi f(e) = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\Theta_n(f) &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{0,i\nu}(f)\,\nu\tanh(\pi\nu/2)\,d\nu \\ &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{1,i\nu}(f)\,\nu\coth(\pi\nu/2)\,d\nu \end{aligned} \tag{24}$$
$$(f \in C_c^\infty(G))$$

が成り立つ.

この定理により, 正則表現は連続系列表現と離散系列表現とにより分解されることが分かる. 詳しい証明は文献 [Su1] にある. この結果により, 問題の重要性と魅力ある理論が誕生する可能性を暗示するものとなり, 多くの研究者を引きつけることになった ([Ha1]). 高橋礼司は相対性理論でも重要なローレンツ群 $SO(n,1)$ の場合に球関数を用いての調和解析を展開している ([Ta1,2]).

また離散系列表現の構成, 正則表現に寄与する表現の特徴づけ, 指標を具体的に決定する問題などが自然に考えられるようになった.

4　無限次元表現と Harish-Chandra の構想

前の節で述べた結果より, これを一般の半単純リー群の場合へ理論を統一的に展開しようとする試みが, 多くの人たちによってなされていった. Harish-Chandra はまず半単純リー群が I 型の群であり, 正則表現分解が一意に決まることを示している. 次に指標が超関数の意味で定義できる表現として admissible 表現のクラスを明確にして, 無限次元表現に対しても有限次元表現のような指標により表現をとらえることができることを明らかにした. 次に, この指標は不変固超関数の性質をもつため群を軌道分解 (8) して, そこでの積分 (9) を利用して指標を特徴付けようとした.

離散系列表現の指標はコンパクトカルタン部分群の上であたえたが, 他のカルタン部分群では不明のままになった ([Ha3]). また, この軌道方法によりランクが 1 の場合には一般論としてまとまった ([Ha2]).

ところがランクが高い場合には指標の形が複雑になり一般論としてまとめるのが非常に困難であることが次第に明らかになっていった. そのため, Harish-Chandra の論文は何百もの補題や命題が複雑に入り組む, 見通しのつきにくいものになっていると思える. この読みにくさは, 問題の困難さに対する著者の苦悩がにじみでているように理解される.

この様な壁に突き当たり苦悩していくときに, 1962 年のストックホルムでの国際数学者会議で I.M.Gelfand の講演を聞いて光明を見いだした. 主定理 (Plancherel の定理) を軌道方法により証明することを断念して, カルタン部分群を尖点形式 (cusp) とみなし保型形式より概念を導入することにより証明を完成させている ([Ha7]). ほとんど論文に苦労話を書かない人だが, このときばかりは喜びをかくせなかったのだろう ([Ha4]).

5　平井の接続公式と軌道方法の確立

この Harish-Chandra の一連の仕事は有力な研究者により著作としてまとめられていった. それらは論文の内容を整理し見通しよく体系的にまとめられ分かりやすくなったが, 軌道方法から, 主定理の証明を見通すまでにはいかなかった ([Va], [Wa1,2]).

ところが, 平井武はこの軌道方法の内容を精査し, 主定理をこの方法で証明可能であることを明らかにしていった.

カルタン部分環 $\mathfrak{a}$ に対し, その共役類を $[\mathfrak{a}]$ とする. このとき互いに共役にならないカルタン部分環達にケーリー変換により次のように準順序をあたえた. $\mathfrak{a}$ の実ルートを α と

し，そのルートベクトルを (5) 式のようにとりケーリー変換を

$$\nu = \exp(-(-1)^{1/2}(\pi/2)\,\mathrm{ad}(X'_\alpha + X'_{-\alpha})) \tag{25}$$

であたえる．この変換で決まるカルタン部分環を $\mathfrak{b} = \nu(\mathfrak{a}_c) \cap \mathfrak{g}$ とおき，準順序を $[\mathfrak{a}] \to [\mathfrak{b}]$ で定義する．

そして対応するカルタン部分群を $J^{\mathfrak{a}}$, $J^{\mathfrak{b}}$ とおく．また $\mathfrak{b}$ の虚ルート $\beta = \nu\alpha$ をとる．不変固有超関数 Φ は次の接続条件

$$H'_\alpha(\Delta^{\mathfrak{a}}\Phi)(a) = H'_\beta(\Delta^{\mathfrak{b}}\Phi)(a) \quad (a \in J^{\mathfrak{a}} \cap J^{\mathfrak{b}}) \tag{26}$$

を満足する．さらにこれにもとづき，構成すべき必要十分条件を明確にあたえた．

離散系列表現の指標は文献 [Ha3] によりコンパクトカルタン部分群の上だけにあたえられていたので，他のカルタン部分群でも明確に決定することは残された問題となっていた．一般に G 上の不固有変超関数は G' で解析関数となるので，軌道方法で調和解析を精密に展開する上で離散系列の指標を G' 上に大域的にあたえる必要があった．

そこで，一連の研究でこの判定条件を発展させて離散系列表現の指標の厳密な超関数表示をあたえていった．そしてランクの高い半単純リー群に対しても軌道方法が有効であることを明らかにし，表現の分類そして正則表現の既約分解をあたえる半単純リー群上での調和解析を展望した ([Hi5])．

まず，実簡約群 $U(p,q)$ の場合に不変固有超関数の性質を詳しく調べ離散系列表現の指標を決定している．さらに，この結果を用いて $U(p,q)$ の主系列表現の指標をあたえ主定理まで証明している ([Hi3,4])．

次に，一般の半単純リー群 G の各カルタン部分群 J に対し $J \cap G'$ での解析関数をあたえたとき，これらにより G 上の不変固有超関数が決まるための必要十分条件は不変性と (26) 式の接続条件 (Hirai's patching condition) であたえられることを明らかにした ([Hi6])．

そして, カルタン部分群の系列の準順序が線形でないでない B 形や C 形などの群に対してもこの接続条件により不変固有超関数が構成できることを偏微分方程式系の構造より示した ([Hi7])．

この方法により $Sp(n,\mathbb{R})$ の場合に離散系列表現の指標を大域的に決定している ([Hi8])．他方 W.Schmid も離散系列表現を K-タイプで特徴付ける Blattner 予想を解決するために，この $Sp(n,\mathbb{R})$ の離散系列表現の指標の決定を試みているが，指標を大域的に正確に決定するのは困難だろうと述べている ([Sch])．このことからも平井の方法の精度の高さが分かる．

さらに一般の半単純リー群の離散系列の指標公式を決定している ([Hi9])．この指標公式は有限次元表現の Weyl の指標公式の無限次元表現の指標公式に相当しているので，平井の指標公式と呼ばれるのが自然だといえる．

こうした成果は広く支持され，影響を受けた人たちの参加も得られて結実していった．そして中心有限という条件を必要としない，より一般な半単純リー群に対して理論はまとまっていった ([Mi],[He],[Kn])．

6　簡約対称空間における軌道方法

この軌道方法による調和解析を簡約対称空間でも試みるのは自然な方向であり，多くの人により研究された．先駆的な研究は新谷卓郎 ([Shi]) と V.F.Molčanov([Mo]) によりなされた．ランク１の場合には比較的早い時期からよい結果が得られている．ここでは，簡約対称空間 $X = G/H$ のおいて，H-不変なベクトルをもつ連続表現から，X 上に H-不変帯球超関数を構成し，定理１のような結果があるためこの H-不変帯球関数を適当に微分し連続パラメータで積分することにより主定理は証明できる．ここでは特異点での留数により離散系列はとらえられる．また不変帯球超関数の研究も群における不変固有超関数の一般化が可能かという方向で研究された ([Ke],[AK])．しかし，この方法はランクが高い場合には，定理１のような結果は限られた場合にしか成り立たず，その場合にも複雑な式となる ([Or])．そのためランクの高い場合にはこの軌道方法で一般論を展開するのが困難であることがしだいに明らかになっていった．

ところが，対称空間 G_c/G の場合には，群 G の場合と同じような接続公式が成り立ち，ランクが高い空間でもこの軌道方法が有効であることが分かった ([Sa3,4])．さらにこの２つの空間において不変帯球超関数（不変固有超関数）は連続系列と離散系列とが双対の関係になり，定理１の類似の結果も成り立つ．この対称空間 G_c/G での軌道方法の成功はランクの高い対称空間での主定理の定式化を可能にした．

ところが，一般の簡約対称空間に対しては定理１のような公式がないことが，主定理の完備性を証明する際の大きな壁となった．そのため，これを克服するのに多くの時間を必要としたが，対称空間 G_c/G での結果はこの壁を乗り越える上で役に立っていった．

7　今後の課題

これまでにまとめた，簡約群上の軌道方法による調和解析は精密な理論であり，他の関連する理論と比較することによりいくつかの問題がみえてくる．

（１）簡約群の Plancherel の定理の測度は文献 [Ha6,7] に一応の形はあたえられているが．精密に決定するのは興味深い．それには大島の境界値 (boundary balue) をとる方法が有効となろう ([Os1,2], [Se])．

（２）簡約対称空間における軌道理論では不変帯球関数でフーリエ変換をあたえることが多いが，文献 [Hi3] においては指標を用いた変換を試みている．この方法により，簡約対称空間での調和解析を見直すのは興味深い．

（３）離散群 Γ で割った等質空間での理論として，セルバーグの跡公式がある．この式はリーマンのゼータ関数の零点分布との関係が古くから知られている．文献 [Su2] から一部を引用してみる．

本橋洋一：「セルバーグ・ゼータ関数においてもリーマン予想との類似物が成立しているのであるが，やはりリーマン・ゼータ関数との直接的な関連は知られていない．これはセルバーグの跡公式から導かれた結果であるが，その理論を出発点とする関数解析も，表現論における議論も古典論を超えるものを生み出していない.」

それは，たとえば $SL(2,\mathbb{R})$ をその離散部分群 Γ で割った有限体積の空間 $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ においては定理１のような構成的な証明が知られていないのが大きな理由と考えられる．

この部分をどう乗り越えるかが課題となるが，それには簡約対称空間における調和解析の完備性の証明が参考になるかもしれない．

（４）最近の研究では表現の既約性やユニタリ化可能性などをコホモロジー的帰納法(cohomological induction)を使って研究しているが，軌道方法のような解析的な方法も再び検討されてもよい．

参考文献

[AK] 青木茂， 加藤末広，半単純対称空間上の不変固有超関数の接続公式, 表現論シンポジウム講演集,(2002),pp. 126–142.

[F] J.Faraut, *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. Pures App., **58(9)**,(1979),pp. 369–444.

[Ha1] Harish-Chandra, *Plancherel formula for* 2×2 *real unimodular group*, National Academy of Sciences,**38**, (1952),pp. 337–342.

[Ha2] Harish-Chandra, *Two theorems on semi-simple Lie groups*, Ann.of Math.,**83**, (1966),pp. 74–128.

[Ha3] Harish-Chandra, *Discrete series for semi-simple Lie groups II*, Acta Math.,**116**, (1966),pp. 1–111.

[Ha4] Harish-Chandra, *Eisenstein Series over Finite Fields* , Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone at the University of Chicago, (1968),pp. 76–88.

[Ha5] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Funct. Anal., **19**,(1975),pp. 104–204.

[Ha6] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups II*, Invent. Math., **36**,(1976),pp. 1–55.

[Ha7] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups III*, Ann. of Math., **104**,(1976),pp. 117–201.

[He] R.A.Herb, *The Plancherel theorem for semisimple Lie groups without compact Cartan subgroups*, Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., **1020**,(1983),pp. 73–79.

[Hi1] T.Hirai, *The Plancherel formula for the Lorentz group of n-th order*, Proc. Japan Acad., **42**, (1966),pp. 323–326.

[Hi2] T.Hirai, *The characters of some induced representations of semisimple Lie groups*, J.Math.Kyoto Univ., **8**, (1968),pp. 313–363.

[Hi3] T.Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semi simple Lie groups, I*, Japan.J.Math.,**39**,(1970),pp. 1-68.

[Hi4] T.Hirai, *The Plancherel formula for $SU(p,q)$*, J.Math.Soc.Japan,**22**,(1970),pp. 134–179.

[Hi5] 平井武, 実半単純リー群の表現の指標と不変固有超関数, 数学, 日本数学会,**23**,(1971),pp. 241–260.

[Hi6] T.Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semi simple Lie groups, II*, Japan.J.Math.,**2**,(1976),pp. 27–89.

[Hi7] T.Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semi simple Lie groups, III*, Japan.J.Math.,**2**,(1976),pp. 269–341.

[Hi8] T.Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semi simple Lie groups, IV*, Japan.J.Math.,**3**,(1977),pp. 1–48.

[Hi9] T.Hirai, *The characters of the discrete series for semisimple Lie groups*, J. Math. Kyoto Univ.,**21**,(1981),pp.417–500.

[Hi10] T.Hirai, *Structure of unipotent orbits and Fourier transform of unipotent orbital integrals for semisimple Lie groups*, Lec. in Math., Kyoto Univ. No.14,(1982),pp.75–138.

[Ke] T.Kengmaner, *Discrete Series Characters on Non-Riemannan Symmetric Spaces*, thesis Harvard University,(1984).

[Kn] A.W.Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups, Princeton Mathematical Series,**36**,(1986).

[Mi] H.Midorikawa, *On the explicit formulae of characters for discrete series representations*, Japanese J. Math.,**3**,(1977),pp. 313–368.

[Mo] V.F.Molčanov, *Analogue of the Plancherel formula for Hyperboloids*, Sov. Math. Dokl.,**9**,(1968),pp. 1382–1385.

[Or] J.Orloff, *Orbital integrals on symmetric spaces*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math.,**1243**,(1987),pp. 198–239.

[Os1] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学, (1985),pp. 97–112.

[Os2] T.Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces,Non commutative harmonic analysis and Lie groups(Marseille-Luminy,1980)*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., **880**,(1981),pp. 357-369.

[Sa1] S.Sano, *Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on* $GL(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{R})$ J.Math. Soc. Japan, **36**,(1984),pp. 191-219.

[Sa2] S.Sano, *Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples* G_c/G J.Math. of Kyoto Univ., **31**,(1991),pp. 377-417.

[Sa3] 佐野　茂, フーリエ解析の非可換化への最近９５年間の歩み, Bull.Polytechnic.Univ., **25-A**,(1996),pp. 115-123.

[Sa4] 佐野　茂, 保型形式の哲学と群上の調和解析 (第１２回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **23**,(2002),pp. 100-104.

[Sa5] 佐野　茂, 保型形式の哲学と群上の調和解析 (第１３回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **24**,(2003),pp. 118-126.

[SI] S.Sano, I.Iida, *Automorphic forms on the space* $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{C})\ /SU(2)$, Bull. Polytechnic University, **31-A**,(2002),pp. 189-194.

[Se] 関口次郎, 対称空間の c-関数の概説, 表現論シンポジウム講演集, (2003),pp. 26–51.

[Sch] W.Schmid, *On the Characters of the Discrete Series*, Inventiones math., **30**,(1975),pp. 47-144.

[Shi] T.Shintani, *On the Decomposition of Regular Representation of the Lorentz Group on a Hyperboloid of one Sheet*, Proc.Japan Acad. Sc., **43**,(1967),pp. 1-5.

[Su1] M.Sugiura, Unitary Representation and Harmonic Analysis, Kdansha, Palsted press book,(1975).

[Su2] 杉浦光夫編集, ヒルベルト２３の問題, 日本評論社,(1996).

[Ta1] R.Takahashi, *Sur les fonctions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique* , J.Math.Soc.Japan, **31**(1961),pp. 55-90.

[Ta2] R.Takahashi, *Sur les représentation unitaires des groupe de Lorentz généralisés*, Bull.Soc.Math.France, **91**(1963),pp. 289-433.

[W1] V.S.Varadarajan, Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, Springer-Verlag Lecture Notes in Math.,**576**,(1977).

[W1] N.Wallach, Real Reductive Groups I, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-I**,(1988).

[W2] N.Wallach, Real Reductive Groups II, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-II**,(1992).

[Wa1] G.Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, Springer-Verlag, New York ,(1972).

[Wa2] G.Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II, Springer-Verlag, New York ,(1972).