いわゆる「ラグランジュの定理」について

赤堀庸子*

序

現在、初等群論において、次の定理がラグランジュの定理として知られている。

(Theorem.D.)

部分群の位数は、群の位数の約数である。

この定理に対して我々が受ける印象はどのようなものであろうか。個数だけで群の性質が決定してしまうという、ブルバキのいわゆる「構造概念」を体現しているということ。逆に、それまで抽象的に進んできた議論が、(元の個数という)具体的な対象と結びつくという面白さ。どちらにせよ、抽象的な現代数学の強力さがここに現れているといってもよさそうである。

しかし、実際にラグランジュの述べていることをみると、そうした抽象的な思考法からは遠く隔たっているといってよい。置換のアイデアは出ているものの、独立したものとして概念化されるところまでは至っておらず、もちろん一般の群の概念も視野に入っていない。さらに興味深いことに、１９世紀の文献には、ラグランジュの定理という呼称が使われている場合があまりみられず、コーシーの置換論における記述の方が注目されていたふしがある。

これは何を意味するのかということを、本論では考えたい。

さて、議論に入る前に、本論の基本的立場を確認しておきたい。

本論では、ラグランジュにTh.Dを帰すことについて、いささか否定的な見方をとる。そのことについて、疑問を感じる人もあるだろう。ラグランジュに置換のアイデア（思いつき）をみてとることは十分可能であり、それならば、否定的な見方をするのは数学の本質を理解していない態度ではないかと。

あるいは、こういう意見もあるかもしれない。古い時代に考えられたものが古い装いをもっているのは当たり前であり、そのようなことに目を奪われずに、新しいアイデアを考えたという点だけを評価するべきであると。[1]

だが、本論ではそのような立場はとらない。本論でとる根本的な立場は、現代科学史（数学史）の方法をふまえたもの、すなわち、

*erkym@mui.biglobe.ne.jp

[1]上の文章の「アイデア」の語は、数学上の思いつき、ひらめき、といったような意味あいで使っている。idea（思想）とは異なるものとして用いている。

１８世紀には１８世紀の、１９世紀には１９世紀の数学思想が根底に横たわっている。

ことを認識し、（古い「装い」に見えるものも数学者の知的活動の中にあると考え）、

歴史の経過は必ずしも論理的な帰結にスムーズに沿ったものではない

ことを念頭においたものである。

（よって、個々の数学者の功績を評価、判定するというより、数学思想がどのようなものであったかを解明するということに重きがおかれる。）

そうしたことをふまえて、やはり我々の認識しているTh.Dと、ラグランジュの実際の仕事の間には隔たりがあるということを伝えたい。[2]

ラグランジュとコーシー

ラグランジュ

ラグランジュ（Joseph Louis Lagrange,1736-1813）の著作でTh.Dに相当するものが述べられているのは、1770-71年の論考[1]である。これはガロア理論の歴史、または群論、体論の歴史（という言い方はまずく、方程式論の歴史というべきだが）では必ず大きくとりあげられるものである。ここでラグランジュのなしたことの意義は、初めて方程式を体系的に取り扱った、ということにある。先人や同時代人（ウェアリング、オイラー、ベツー、ヴァンデルモンド）たちの研究が特殊な場合のみであったのに対して、ラグランジュはすべての方程式を統一した理論で扱うという姿勢をとった。その過程で後の群や体に相当する概念の萌芽が現れているといってよい。

この論考は、まず前半において３次方程式、４次方程式の解法を見なおし、その方法論をさらに一般にしたものを後半で展開するという構成になっている。問題の定理はその一般論の部分にある。

まず根の関数の間に相似な関数というものが定義される。

> 同じ量からなるいくつかの関数が相似であるとは、それらを構成している量たちに同じ置換をほどこしたとき、同時に、変わるか、同じ値を保つかすることをいう。

相似な関数について、次が成り立つことが主張される。

> 第９９節．１．ある方程式の根$x', x'', \cdots\cdots$たちによる相似な関数は、すべて同じ次数の方程式をみたさなければならない。

[2] １９世紀の文献は１９世紀の思想に基づいて読むべし、というのはお題目としてはよいが、実際我々は何に注意をしたらよいのだろうか。これは筆者なりの考えであるが、「集合論的思考が未熟である、あるいは代数学の（数学の）基礎の部分になりきっていない」ということを強く意識する、ということをあげておきたい。

2．その次数は常に，数 $1 \cdot 2 \cdots\cdots \mu$（$\mu$ は与えられた方程式の次数)、あるいはその数の約数である。
3．$x', x'', \cdots\cdots$ によって与えられた関数を決定するようなもっとも単純な方程式を見出すには、そのような関数が、量 $x', x'', \cdots\cdots$ 内の置換によってとりうることなった値を見出すだけでよい。そして、求められた方程式の根にその値をとることによって、方程式の係数を、既に知られた方法によって決めることができる。

さて、99の2に現れているものが、Th.Dに相当するものであることは分かる。群論的思考の特性である対称性への洞察にすぐれているという点も否めないだろう。

しかし、何かTh.Dの印象とかけ離れたという気がしないだろうか。

たとえば、置換群しか扱っていないというあたりもおくことにしよう。あるいは、集合論的思考（Th.Dには不可欠という気もするが）がないという点もおくとしよう。

ここで、「置換」の概念が（独立した数学的対象として）記号化されていないことに注意したい。置換を施されるものによらずに決まるものであって、これが表現されていないのはまだ未熟さが残っていると考えられるのではないか。集合論的思考どころか、集合の元も明示的に表されていないのである。

元来、この論文での主題は、方程式の解法である。そして、ここで「根の関数」が記号化されているという点はこの時代としては大変大きいと思われる。置換のアイデアを出したのも事実ではあるが、それはどちらかというと道具としてであり、「置換も考えた」というレベルのものではないだろうか。方程式論の確立、根の関数の記号化に比べると、この論考の中ではやや小さい位置しか占めていないように思われる。

筆者としては、Th.Dとラグランジュの定理とはかけ離れている、という立場をとりたいと思う。

コーシー

コーシー（Augustin-Louis Cauchy,1789-1857 ）の置換論といえば、1815年のものと1844年のもの[2]が有名である。1844年の方が、体系的かつ大部な著作で、影響が大きかったといわれること、剰余類分解のすぐれた記述があることから、ここでとりあげておくこととしよう。

コーシーの著作は体系性、すぐれた記号法において際立っている。置換そのものに記号を導入し、それに対して積、べき演算、逆演算などを定義した。置換を施される対象に目を奪われずに置換を独立したものとして認識する、ということは一つの前進であるし、それらの間に演算をほどこすということを述べたという点はさらなる前進であるといえる。我々はすでに置換論を習得しているので、記号をみてもあまり感慨をおぼえないほどだが、これは意義あることであろう。

さて、Th.Dに相当するものは第6節にある。

コーシーは、導来置換というものを、与えられた置換によって生成される置換とする。与えられた置換と導来置換のすべてを合わせたものを、「共役置換の集まり」(un système de substitutions conjugées)と名付ける。[3]ここでは、我々の用語でいえば、与えられた元によって生成される部分群が定義されていることになる。

この共役置換の集まりの個数について、次のことが成り立つとする。

> 第6節定理1．共役置換の集まりの個数(ordre)は、$1 \cdot 2 \cdots\cdots n$ の約数である。

コーシーはこの定理の証明において、次のような剰余類分解の図式をあげている。

$$\begin{array}{ccccc} 1, & P, & Q, & R, & \cdots \\ U, & UP, & UQ, & UR, & \cdots \\ V, & VP, & VQ, & VR, & \cdots \\ W, & WP, & WQ, & WR, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

ここにコセット分解が明快に現れているとは誰しも認めるところであろう。証明は、これらの分解はすべてが一致するかまたはまったく一致しないかのどちらかである（我々の用語でいうところの類別である）、ということを示すという方針で明快に述べられている。[4]

コーシーのこの記述は、我々に現代性を感じさせる。集合論的思考をうかがわせる要素さえあると考えられる。もちろん、元を直接書き出しているので、まだ素朴な段階ではあるのだが。

これらのことをあわせて、コーシーの仕事はTh.Dに対し多大な寄与をしている、と解釈したい。

１９世紀の文献

ここで、１９世紀の文献の記述をいくつかみてみよう。いささか少ないサンプルで恐縮であるが、これらの文献は、それぞれに注目されるべき著作であり、書かれていることを丹念にみるだけでも意義があると思われる。

背景に群論概念の進歩（さらに代数学を支える基礎の思想の転換）があることを念頭におきつつみていくことにしたい。

[3]ここでの共役の語の意味は、現在と異なる。

[4]ちなみに、上記のコセット分解はａＨタイプの分解だが、定理１の系では、Ｈａタイプの分解の図式が書かれている。

ジョルダン

１９世紀後半、フランスで影響力のあった著作は、セレ (Joseph Alfred Serret,1819-1885) の代数学教科書[5]とジョルダン (Marie Ennemond Camille Jordan,1838-1922) の置換論 [3] であろう。セレの教科書の方は普及度が高かったようだが、ジョルダンの著作の方が独創性に富んでいるので、こちらの方に注目してみよう。

ジョルダンは 1870 年に出したこの大部の本において、Th.D に相当するものに言及しているが、そこではラグランジュとコーシーの両方の名が挙がっている。

第２部第１章で置換論が展開されている。置換たちの集まりで、積で閉じているものが groupe であるという定義がなされている。

第３８節において、ＨもＧも groupe で、Ｈの置換がすべてＧの置換であるならば、ＨはＧに含まれる、ということが述べられる。次の第３９節で、Ｈの位数はＧの位数の約数であるということが述べられる。これにラグランジュの定理という名がついているが、証明の方針はコーシーのものと同じである。次のような図式が挙げられている。

$$\begin{array}{cccc} 1, & S_1, & \cdots & S_{n-1} \\ \Sigma, & \Sigma S_1, & \cdots & \Sigma S_{n-1} \\ \Sigma_1, & \Sigma_1 S_1, & \cdots & \Sigma_1 S_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

ジョルダンの Th.D に対する態度を整理してみるとどうなるだろうか。とりあえず、ラグランジュが最初の貢献をしたという判断らしいが、現実には明らかにコーシーの証明法を用いている。結局、ジョルダンの立場は、ラグランジュとコーシーの両方の寄与を認めているということであろうか。

コーシーとジョルダンとを比べてみると、群概念そのものが進歩しているのがみてとれる。剰余類分解の図式の方も、若干進歩しているようではある。ただ、集合論的思考に慣れている我々の目からみると、進歩の度合いが遅いようにみえる。

ドイツ

デデキント

デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind,1831-1916 ）は 1850 年代後半に、代数学講義 [4] を行っている。内容は、置換論、ラグランジュの方程式論、ガロアの方程式論について自らの解釈で再編集をほどこしたものである。

この講義の記録は、当時未発表であったこともあり、的確な人名の言及がみられない。しかし、剰余類分解の記述、Th.D の証明がみられるので、そのあたりをみておこう。

[5] セレの代数学教科書では、置換論の説明にはコーシーのものが採用されている。

第１節が置換論であり、まず置換の一般的な説明、そして置換の積の定義の説明がなされる。

デデキントは、積の基本的な性質として、結合律、簡約律[6]が成り立つことを述べる。さらに興味深いことに、デデキントはこの二つの法則に公理的性格をもたせることができる旨の発言をしている。(積が定義できて、結合律と簡約律をみたすような要素の集まりに対して、置換論の結果がすべて応用できる、といったことを述べている。)

第４項において、群 (Gruppe) の語が現れる。ここでは積で閉じた（置換の）集まりが群であると定義される。準備ののち、次の定理が証明される。

> 定理５．ＧとＫの両方が群であり、ＫがＧに含まれるならば、Ｋの度数（Grad）はＧの度数の約数である。

デデキントはここでＫをＧの約子 (Divisor) といっている。

証明の方針はコーシーのものと同じである。デデキントは剰余類分解を次のように書き下している。

$$G = K + K\theta_1 + K\theta_2 + \cdots\cdots + K\theta_{n-1}$$

剰余類分解の記述に、元たちを一括してとらえた記号を用いている点では、集合論的理解が非常に進んでいるといってよいだろう。(記号の説明もあらかじめきちんとしてある。)

実はデデキントは商群概念も定式化している（置換体という語を用いている)。さらに、さきほど述べた，置換を超えた群の公理的定義をめぐる考察が、これとからんでいる可能性があると筆者は考えている。この時期としては非常に革新的な著作であるといえる。

ヘルダー

ジョルダンの記述と関連して、ここでヘルダー (Otto Ludwig Hölder,1859-1937) の記述 [5] をみておきたい。ヘルダーのこの論文の意義は、商群概念が説明されていることにある。ジョルダンの論文をみているヘルダーが、Th.D の周辺に対してどういう態度をとっているのか、興味のあるところだろう。

ヘルダーは冒頭で群の定義をあげている。すなわち、Operation の有限個の集まりであって、積が定義され、結合律、簡約律をみたすもの、としている。これはすでにこの当時普及していた定義である。

第４節で商群概念が説明されている。ヘルダーはそこで剰余類分解の図をあげ、その図はコーシーによるものだとしている。

[6]簡約律は、元の個数が有限の場合は、現在の単位元の存在および逆元の存在、と論理的に同値になる。

$$
\begin{array}{llll}
B, & B_1, & B_2, & \cdots \\
S_1B, & S_1B_1, & S_1B_2, & \cdots \\
S_2B, & S_2B_1, & S_2B_2, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
S_{n-1}B, & S_{n-1}B_1 & S_{n-1}B_2, & \cdots
\end{array}
$$

ヘルダーは、コーシーとラグランジュの両方を評価したジョルダンの記述をみているはずだが、ここではラグランジュの名は挙げていない。また、序文などでも方程式論の先人としてアーベルやガロアの名は挙がっているが、ラグランジュの名は挙がっていない。新しい方程式論を開拓したヘルダーにとって、ラグランジュは過去の人という認識のようである。

ついでにもう一つ。コーシーの論文の発表当時からヘルダーの論文の発表当時まで間が４０年以上たっているのに、剰余類分解を表現する記号法は、まだいささか原始的という印象を受ける。二次元的な表現を使用しないと、剰余類分解（商群概念）を把握しにくかったのだろうか。

予想

調査をさらに進めてみないとなんともいえないが、ドイツでは一般的にラグランジュの名は挙げないか、コーシーのみに注目しているふしがあるようである。たとえば、抽象代数学の歴史におけるエポックメイキングな教科書、ウェーバー [6] やファンデルワールデン [7] においても、Th.D の主張は述べられているが、特に人名は冠していない。

調査が不充分な状態で、あまり大胆な予想をするのは控えたいが、このことの背後には数学史的意義があると考えたい。Th.D がラグランジュの定理と呼ばれていないのは、１９世紀において、代数学の基礎の部分が本質的に変化をとげていることの反映と見るべきではないだろうか。（決して、ドイツの数学者がフランス人の業績に対して冷淡であるとかそういった類の話ではない。）

さて、現代版「ラグランジュの定理」はいつどのようにして普及したのだろうか。バーコフの代数学教科書 [8] ではこの名称が採用されていること、また次にみる数学史家キールナンの文章からして、1960-70 年代のアメリカでは普及していることが分かる。また、フランスの数学史家の記述にも「ラグランジュの定理」の用語がみられることが分かる。ひょっとしてラグランジュの再評価のようなものがフランスであったのではないかと予想されるが、これもまだ予想の段階である。

コメント

２次資料

次に、これらの、２次資料における記述を改めて見直してみよう。時代順にみていきたい。

ブルバキ

まず、1969年のブルバキの数学史[9]（もとは歴史覚え書き）から。ここにはラグランジュのTh.Dに対する寄与が（方程式論に即応した言葉づかいで、と断ってあるが）はっきり述べられている。（[9],p.95.）（コーシーの寄与は述べていないようだ。）

ブルバキの歴史は、専門の数学史家にはあまり評判の良いほうではなく、現代数学の立場を読みこみ過ぎであるとか、「構造」という用語をあまりにも広い意味で使っているといった批判がなされる。今問題にしている部分の記述でも、一つまちがえばそのような傾向に陥りかねない危うさがあるようだ。

数学者としての勘を働かせながら、原典に接しているというのがブルバキの歴史の特徴であろう。立場の違いは念頭におきつつ、注意して読み、学んでいく本なのであろう。

ヴスィング

ヴスィングの群論史[10]は、専門の数学史家の手になる標準的な代数学史研究である。群論の起源として、置換群のみが注目されているのは問題であるとし、整数論や幾何学における群論的思考も視野に入れるべきであるというのがメインの主張である。この書では、１９世紀ドイツを中心に膨大な文献があげられ、情報量という点では頼りになる。（解釈はややひかえられるという傾向にあるが。）

Th.Dに関する記述は、次のようになっている。ラグランジュの1770-71年の論文を分析したところではTh.Dに関する言及はない。コーシーの1844年の論文を分析したところでTh.Dに言及し、これは今日良く知られている定理であり、証明も同じであるという。

これは少し意外なことに思える。ドイツでは本当に「ラグランジュの定理」の名称が普及していないのだろうか。この点はぜひもう少し調べてみたい。

キールナン

キールナンの論文[11]は、ガロア理論の歴史を扱った有名な論文（１００ページ以上の長編）であるが、Th.Dの扱いは次のようになっている。

９９節について述べたところで、その２が今日のラグランジュの定理に相当すると述べている。([11], p.53.) また、コーシーについては、記号をのぞいてはラグランジュとおなじものが述べられているとしている。そしてジョルダンの言明が最終的なもの（一般のかたちで述べられている）と判断している。([11],p.96.)
この記述はオーソドックスなものといえそうである。「ラグランジュの定理」とラグランジュの実際の仕事の差ははっきりしているし、コーシーのことにもきちんと言及されている。

ノヴィ

ノヴィの著作 [12] は、ヴスィング、コリー（後述）と並ぶ、代数学史の標準的な文献である。1770 年から 1870 年のあたりをカバーしている。体論（に相当するもの）も扱っており、イギリス代数学派の記述も充実している。代数学の歴史は論理的帰結に沿った内在史として扱うことは出来ない、という（科学史の影響を受けた）「批判的立場」をとっている。
Th.D をめぐっても、ノヴィの記述には批判的な調子がみてとれる。([12],p.203.) ラグランジュには決して置換群の概念がみてとれるとはいえないのであり、ラグランジュはそこで言われている以上のことは言っていないと主張する。Th.D そのものの寄与については、コーシーの 1815 年の著作をあげている。（これは 1844 年のものより素朴である）1844 年の剰余類分解についてはあまり強調されてはいないようである。

デュドネ

デュドネの編纂した、18-19 世紀の数学史における記述 [13] をみよう。
Th.D は今日ラグランジュの定理と呼ばれているもので、その元は La-99 にあるとしている。（コーシーの Th.D における寄与は述べていない。）([13],p.81.)
この記述も、ラグランジュの定理とラグランジュの実際の仕事との区別はついている。が、ノヴィのように批判的な立場には立っていない。もっとも、フランスの数学史家は、いわば原典に近い位置にいるわけで、あまり生真面目な批判的精神を発揮しなくてもよいのかもしれないが。

その他

ついでにもう一つ代表的な２次文献をあげておく。[14] この書は 1870 年から 1930 年までの間をカバーしているが、方法論を強く打ち出した、批判的立場の書である。コリーは、数学の知識を Body と Image とに分け、（大雑把にいうと、Body の方が数学の具体的な活動、Image の方が数学の基礎に関わる部分）Image の方では本質的転換があるとする。1870 年から 1930 年までの間に注目すると、構造概

念への転換はImageの部分では遅い（我々が当時の論文や本を見て想像するのよりも）、というような指摘がされている。これも面白い指摘を含んでいる文献であるが、残念なことに１９世紀がカバーされていない。
　さて、このようにみてくると、代表的な２次資料たちの論調は、あまりにも多様であるといえる。今回扱ったテーマは基本的なものだと思うのだが、これらの論調は、態度においても方法においても足並みがそろっていないといえる。近代代数学史は、科学史家と数学者のいわば狭間にあるわけで、こうした現象も仕方がないのだろうが、もう少し強力なガイドラインがあったらなというのが筆者の本音である。

結び

　本論では調査が貧弱で、問題提起ばかりに終始してしまった感があり、大変恐縮である。なるべく早く、改良をはかりたいと思っている。
　ただ、このような「問題提起」にこだわっているのにも理由がある。専門の代数学史というのは、実際アイデンティティーの薄い分野である。一般の科学史家からは、数学に思想などないのではないか（ましてや代数学は）、と言われ、数学者からは、数式を扱う経験の比較的浅い歴史家に、本当に数学思想が分かるのかと疑われる。分野の性質上これはある程度は仕方のないことかもしれない。
　ただ、実際原典を眺めただけでも面白いことが多々あるのは事実であり、それはこの分野になされるべき仕事があるということを意味していると思う。そして、原典を読み解くときに、「当時の思想に基づいて読むように努力する」ことによって、思想史的意義も生じるのではないだろうか。

参考文献

[1] J.L.Lagrange,"Réflexions sur la résolution algébrique des équations", Nouveaux Memoirs de l'Academie royale des Sciences et Belles-Letrres de Berlin (1770-71): Oeuvres de Lagrange, III(Paris,1869),pp.203-421.

[2] A.L.Cauchy,"Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données et surles permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre" (1844); Oeuvres(2)13,pp.171-282.

[3] C.Jordan,"Traité des substitutions et des équations algébrique",(Paris,1870)

[4] Richard Dedekind,"Eine Vorlesung über Algebra", in:W.Scharlau,hrsg.," Richard Dedekind 1831-1981", (Braunschweig/Wiesbaden,1981).S.59-100.

[5] O.Hölder,"Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen",Mathematische Annalen 34(1889),S.26-56.

[6] H.Weber,"Lehrbuch der Algebravol.1."(2nd.ed.1898.)

[7] B.L.Waerden,"Moderne Algebra",(Springer,1930.1937)

[8] G.Birkhoff and S.Mac Lane,"A Survey of Modern Algebra", (MacMillan,1941.1965)

[9] N.Bourbaki,"Eléments d'histoire des mathématiques"(Hermann,1969)

[10] H.Wussing,"The Genesis of the Abstract Group Concept", (Berlin,1969):English.trans.(MIT Press,1984)

[11] B.M.Kiernan"The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin",AHES 8,pp.40-154.

[12] L.Novy,"Origins of Modern Algebra",(Leyden,1973).

[13] J.Dieudonne et J.Guérindon,"L'algébre depuis 1840"in: J.Dieudonné ed."Abrégé d'histoire des mathematiqués,1700-1900"(Hermann,1978)

[14] L.Corry,"Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures" (Birkhäuser,1996).