O.P.N.問題について

倉田令二朗（河合文教研

はじめに すぐ下に示すように、O.P.N.問題とは古代ギリシヤ以来2400年にわたって未解決の初等整数論の問題である。本稿は、これに取組もうとする人達に必要な初歩的(入門的)事柄、そして初歩的(入門的)事柄のみを証明つき(ないし解説つき)で記述するものである。

I **定義**（完全数とは）

aを正整数 $\sigma(a)$をaの正約数の和とする。

aは完全数(perfect number) $\overset{\mathrm{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sigma(a)=2a$（すなわち$\sigma(a)-a$ $=a$以外の約数(proper divisors)の和$=a$）

aは過剰数(豊数)(abundant number) $\overset{\mathrm{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sigma(a)>2a$

aは不足数(輸数)(deficient number) $\overset{\mathrm{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sigma(a)<2a$

例 $6=2\cdot 3$の6以外の約数は1, 2, 3. $1+2+3=6$. ゆえに6は完全数

$28=4\cdot 7$の28以外の約数は1, 2, 4, 7, 14. $1+2+4+7+14=28$ ゆえに完全数

● 漢字に関する注釈 なぜ不足数が輸数なのか？

輸は中国語でshūと発音し、次の3つの意味をもつ。

① ある所から別の所に運ぶこと。輸出、輸血はこの用法

②負けること　不足数の意味に用いる輸数はこの用法

他に③寄付すること（以上同僚の鄭(テイ)さんに教わった）

高木「初等整数論」では σ の他に S も用いているが、外国の文献では

すべて σ が用いられ、S は用いられていない。

完全数の概念は古代ギリシヤで成立したが、現在、

44500 以下で27個の完全数が知られている。全部偶数で

あり、奇の完全数は一つも知られていないし、非存在の証

明もない「奇の完全数は存在するか？」これがO.P.N.問題

（Odd perfect number problem）（奇の完全数問題）である

II $\boxed{\text{直接の結果}}$（定理から直接に出ること）

(1) $T(a)$ と $\sigma(a)$ に関する公式

$T(a)$ を a の正約数の数とする。$a=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots$ を a の素因数

分解とするとき

$T(a)=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\cdots\cdots$

$\sigma(a)=\sigma(p^{\alpha})\sigma(q^{\beta})\sigma(r^{\gamma})\cdots=(1+p+p^2+\cdots+p^{\alpha})(1+q+q^2+\cdots+q^{\beta})$

$(1+r+r^2+\cdots+r^{\gamma})=\dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\dfrac{q^{\beta+1}-1}{q-1}\cdot\dfrac{r^{\gamma+1}-1}{r-1}\cdots\cdots$

以上は a の正約数は $p^{x}q^{y}r^{z}\cdots$ $0\leq x\leq\alpha,\ 0\leq y\leq\beta,\ 0\leq z\leq\gamma$ ---

の形であることからすぐわかる。

a のすべての約数の積 $=a^{\frac{T(a)}{2}}$。実際 d を a の任意の正

約数とするとき $a=dd'$ の形に書ける（d' も a の正約数）

この表現は$T(a)$通りあり，dをすべての正約数にわたって動かしたとき　$a^{T(a)}=\left(\prod_{d|a} d\right)^2$となる．

(2) 定理（偶の完全数）

$a=2^{n-1}(2^n-1)$ ここに$n>1$，2^n-1は素数$\Longleftrightarrow$ aは偶の完全数（Euler）

［証明］($\Rightarrow$) $a=2^{n-1}\cdot p$　$p=2^n-1$は素数とする．(1)より

$\sigma(a)=\sigma(2^{n-1})\sigma(p)=(2^n-1)(p+1)=2^n(2^n-1)=2a$．ゆえに$a$は完全数

($\Leftarrow$) aは偶の完全数とし，$a=2^{n-1}b$と書く．ここに$n>1$ $(2,b)=1$．$\sigma(a)=2a$より $(2^n-1)\sigma(b)=2^n b$．　$\sigma(b)=\dfrac{2^n b}{2^n-1}=b+\dfrac{b}{2^n-1}$．$b/2^n-1$は整数であるが$n>1$だからこれは$b$より小さい．$b$の正約数の和$\sigma(b)$が$b$と$b$より小さい$b$の約数$b/2^n-1$の和に等しいのは$b$が素数で$b/2^n-1$が1となる場合にかぎる．すなわち$b=2^n-1$は素数である（「富木」初整）P13〜P15）

(3) 定理（奇の完全数）aが奇の完全数ならば，これは次のような素因数分解形をもつ．

$a=p^{\alpha}q_1^{2\beta_1}\cdots q_r^{2\beta_r}$ ($p, q_1, \cdots, q_r$は素数，$\alpha, \beta_1 \cdots \beta_r$は正整数)

ここに $\alpha\equiv p\equiv 1 \pmod 4$　a自身も$a\equiv 1 \pmod 4$

このとき$a=\dfrac{p+1}{2}(1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1})\prod_{\rho=1}^{r}(1+q_\rho+q_\rho^2+\cdots+q_\rho^{2\beta_\rho})$

$=\dfrac{p+1}{2}(1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}})(1-p+p^2-p^3+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}})\prod_{\rho=1}^{r}(1+q_\rho+q_\rho^2+\cdots+q_\rho^{2\beta_\rho})$

［証明］$\sigma(p^{\alpha})=1+p+\cdots+p^{\alpha}$（$p$は素数$\alpha$は正整数）は$\alpha+1$個の奇数の和だから$\alpha$が奇数（$\alpha+1$が偶数）のとき偶数，$\alpha$が偶数（$\alpha+1$が奇数）

のとき奇数であることに注意する。

奇数 a の素因数分解を $a=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots$ とするとき、

$\sigma(p^{\alpha})\sigma(q^{\beta})\sigma(r^{\gamma})\cdots=2a$ であるためには、$\sigma(p^{\alpha}),\sigma(q^{\beta}),\sigma(r^{\gamma})\cdots$

の中の唯一つが偶、他はすべて奇でなければならない。以下では

$\sigma(p^{\alpha})$ のみが偶 (α が奇)、他の $\sigma(q^{\beta})\sigma(r^{\gamma}),\cdots$ はすべて奇 ($\beta,\gamma,\cdots$ はすべて偶)

を仮定する。α は奇だから

$$\sigma(p^{\alpha})=1+p+p^2+\cdots+p^{\alpha}=(1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1})=(1+p)\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^2-1}$$

$1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1}$ の項の数は $\frac{\alpha-1}{2}+1=\frac{\alpha+1}{2}$ であることに注意する。

$\sigma(a)=2a$ であるためには $\sigma(p^{\alpha})=2\lambda$ (λ は奇数) でなければならず、

そのためには $1+p=2\times$奇数、かつ $1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1}$ は奇でなければならない。

したがって $1+p=2(2m+1)$ の形、$p=4m+1$ の形、$\frac{\alpha+1}{2}=2m+1$, $\alpha=$

$4m+1$ 型でなければならない。

あとの部分は次の式から明らかである。

$$\cancel{1+p^2+p^4+\cdots}$$

$$1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1}=(1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}})(1-p+p^2-p^3+\cdots+p^{\frac{\alpha-1}{2}})$$

(4) 関数 $h(a)=\sigma(a)/a$ の性質

しばしば関数 $h(a)=\sigma(a)/a$ が問題にされる。

もちろん a は完全数 $\Longleftrightarrow h(a)=2$ 等が成立つ。

p が素数のとき $h(p^{\infty})$ または $h(\bar{p})$ を $h(\bar{p})=\lim_{a\to\infty}h(p^{a})=p/p-1$

によって定義する。実際 $\frac{\sigma(p^{a})}{p^{a}}=\frac{p^{a+1}-1}{p^{a}(p-1)}\longrightarrow p/p-1\ (a\to\infty)$

定理（$h(a)$ に関する）

(i) p を奇素数とし、$a<b\le\infty$ ならば $1\le h(p^a)<h(p^b)$

(ii) $p>q$（p, q 奇素数）$1\le b\le\infty$ ならば $h(p^a)<h(q^b)$

(iii) $h(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=h(p_1^{\alpha_1})h(p_2^{\alpha_2})\cdots h(p_k^{\alpha_k})$

ここに $p_1,\cdots,p_k$ は互に異なる素数，$0\le\alpha_i\le\infty$

[証明] (i) $1\le h(p^a)$ はあきらか.

$b>a \Rightarrow 1/p^b<1/p^a$. $h(p^a)=\dfrac{p-1/p^a}{p-1}<\dfrac{p-1/p^b}{p-1}=h(p^b)<h(p^\infty)$

(ii) $h(p^a)\le h(p^\infty)=\dfrac{p}{p-1}<\dfrac{q+1}{q}=h(q)\le h(q^b)$

$\dfrac{p}{p-1}<\dfrac{q+1}{q}\Longleftrightarrow p>q+1$ はすぐわかる. $p>q$ ならば $p\ge q+1$. p, q とも奇数だから $p=q+1$ ではならない. ゆえに $p>q+1$, したがって $\dfrac{p}{p-1}<\dfrac{q+1}{q}$.

(iii)は II の(1)より明らか.

III $\boxed{\text{O.P.N. に関するこれまでの成果}}$

Sylvester (1888) O.P.N. は少くとも 5 個の素因数をもつことを証明

Dickson (1913) 与えられた自然数 k に対し、k 個の素因数をもつ O.P.N. は有限個しかないことを証明

Gradstein (1925), Kühnel (1949), Webber (1951) O.P.N. は少くとも 6 個の素因数をもつことを証明

Robbins (1972) Pomerance (1974) O.P.N. は少くとも 7 個の素因数をもつことを証明

Hagis (1980) O.P.N. は少くとも 8 個の素因数をもつことを証明

Fuckerman (1967) o.p. $n > 10^{16}$

Hagis (? 1974年のある論文で"to appear"とある) $n > 10^{50}$

Stubblefield (1973) o.p. $n > 10^{100}$ (報道だけ, 証明なし)

この方向では永久に問題は解決しない。これらの論文から一般化できる方向を捜すこと。

名古屋地区の仲間(たとえば吉信康夫氏)の助けで以上の論文の解読はかなり進んだもののまだ不十分である。

IV $\boxed{\text{deficient より perfect への転化定理}}$ (倉田による)

Deficient 数 x に新素因数成分 q^b を付加して perfect xq^b を得るための条件を捜す。

以下, x, b は正整数, q は x と素な素数, $h(x) < 2$ (x は deficient) とする。$g(x) = \dfrac{2}{2-h(x)}$ とおく。そのとき $g(x) - 1 = \dfrac{h(x)}{2-h(x)}$

Lemma 1 (i) $h(xq^\infty) < 2 \Longleftrightarrow q > g(x)$

(ii) $h(xq^\infty) = 2 \Longleftrightarrow q = g(x)$

(iii) $h(xq^\infty) > 2 \Longleftrightarrow q < g(x)$

[証明] $h(xq^\infty) = h(x)\dfrac{q}{q-1} \lesseqgtr 2 \Longleftrightarrow q \gtreqless g(x)$ より明らか

Lemma 2 (i) $h(xq) = 2 \Longleftrightarrow q = g(x) - 1$

(ii) $h(xq) > 2 \Longleftrightarrow q < g(x) - 1$

(iii) $h(xq) < 2 \Longleftrightarrow q > g(x) - 1$

[証明] $h(xq) = h(x)\dfrac{q+1}{q} \lesseqgtr 2 \Longleftrightarrow q \gtreqless g(x) - 1$ より明らか

Lemma 3 xq^b が perfect か deficient $\Rightarrow$ x は deficient

なぜなら xq^b が perfect か deficient ならば $h(xq^b)=h(x)h(q^b)\le 2$

$h(q^b)>1$ だから $h(x)<2$. x は deficient

定理（転化定理）

$h(xq^b)=2$（つまり xq^b が perfect）$\Rightarrow$ (i) $b=1$ かつ $q=g(x)-1$ あるいは

(ii) $b>1$ かつ $g(x)-1<q<g(x)$

[証明] $h(xq^b)=2$ ならば $h(x)<2$（L.3による）だから L1, L2 が適用できる.

$h(xq^b)=2 \Rightarrow h(xq^\infty)>2 \Rightarrow q<g(x)$（L.1による）

$q<g(x)$ の場合は次の3つの場合が起る　(i) $q=g(x)-1$

(ii) $q<g(x)-1$

(iii) $q>g(x)-1$

(i)(ii) のときは $b=1$. なぜなら (i)(ii) のときは L.2 より $h(xq)\ge 2$ このときは $b>1$ なら $h(xq^b)>2$ となって矛盾する.

$b=1$ のときは $h(xq)=2$ だから L.2 より $q=g(x)-1$ である.

$b>1$ のときは $q>g(x)-1$. 一方 $q<g(x)$ だったから $g(x)-1<q<g(x)$

なお $q=g(x)-1$ なら $h(xq)=2$ より　$\sigma(x)=\frac{2q}{q+1}x$

$g(x)-1<q<g(x)$ なら　$2>h(xq)<h(xq^b)<h(xq^\infty)>2$ より

$$\frac{2(q-1)}{q}x<\sigma(x)<\frac{2q}{1+q}x$$

x が奇のとき定理における (i) (ii) がおこらないことがいえれば O.P.N が存在しないことがいえる.

しかし転化定理によって O.P.N. 問題がより身近になるというものではない.

たとえば $q=5$ の場合、$\sigma(x)=\frac{5}{3}x$ となる奇数 x が存在するかという問題が生ずるが、それが $\sigma(x)=2x$ となる奇数 x は存在するかという本来の o.p.n. 問題より易しくなるとは考えられない!

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{付記}}$ (Nearly perfect odd Number)

以下にのべることは昨年琉球における NSA シンポで「落語」として話題にし、今年11月1,2,3日の福島における NSA シンポで Nearly perfect odd number の存在定理として報告されたものである

nonstandard number $a\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ に対し、$\sigma(a)\doteqdot 2a$ となるとき a を nearly perfect (또は almost perfect) と呼ぼう.

perfect でない nearly perfect even number は存在する.

たとえば $2^a\ (a\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ がそれである.

実際 $a\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, q は standard prime とすれば $h(q^a)\doteqdot q/q-1$ ....(1)

なぜなら $h(q^a)=\dfrac{q^{a+1}-1}{q^a(q-1)}=\dfrac{q-1/q^a}{q-1}\doteqdot\dfrac{q}{q-1}$, なお $q\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ のとき $q/q-1\doteqdot 1$ ---(1)$'$

(1) を用いて $a\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ に対し $h(2^a)\doteqdot\dfrac{2}{1}=2$ --- (2) ゆえに 2^a is nearly perfect. しかし $\sigma(2^a)=2^{a+1}-1\neq 2^{a+1}$ だから 2^a は perfect でない.

素因数の成分として $q^a\ (q,a\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ をいくつ用いても $h(q^a)\doteqdot 1$ ((1)$'$) だから nearly perfect even number は無限にある

$q_1, q_2 \cdots q_n$ を standard odd prim numbers とし、$a_1,\cdots,a_n\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ とするとき (1) によって $h(q_1^{a_1}q_2^{a_2}\cdots q_n^{a_n})\doteqdot\dfrac{q_1}{q_1-1}\,\dfrac{q_2}{q_2-1}\cdots\dfrac{q_n}{q_n-1}$

$\{q_k\}$ を単調増加無限素数列とするとき

$$\frac{q_1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2}{q_2-1}\cdots\frac{q_k}{q_k-1}\to 2\ (k\to\infty)\ \text{-----}\ (3)$$

ならば $q_1^{a_1} q_2^{a_2}\cdots q_k^{a_k}$ の極限($k\to\infty$のときの)に対応する non standard 数は nearly perfect だろう。

<u>定理</u>(3)をみたす単調増加無限素数列は存在する。

[証明の概要] p_i を i 番目の素数とすると $\prod_i \frac{p_i}{p_i-1}$ は発散する。

リーマンζ-関数 $\zeta(s)=\sum_n \frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ は $s=1$ において発散するからである。

いいかえれば無限和 $\sum_i \log\frac{p_i}{p_i-1}$ は発散する

定理は $\sum_i \log\left(\frac{q_i}{q_i-1}\right)=\log 2$ をみたす $\{p_i\}$ の部分列 $\{q_i\}$ が存在することと同値である。 $b_i=\log\frac{p_i}{p_i-1}$ とおけば $\{b_i\}$ は正の単調減少列で

$b_i\to 0\ (i\to\infty)$ をみたす。しかるに次の Lemma が成立つ

<u>Lemma</u> $\{b_n\}$ が $\sum_n b_n=+\infty$, $b_n\to 0\ (n\to\infty)$ をみたす単調減少実数列ならば任意の正実数 d に対し、適当な $\{b_n\}$ の部分列 $\{c_n\}$ があって $\sum_n c_n=d$ とできる。

以上の証明は吉信康夫氏によるもので、彼による Lemma の証明をのべる。$k\in\mathbb{N}$ ごとに $\{b_n\}$ の部分列 $c_1, c_2\cdots c_k$ で $c_1+\cdots+c_k<d$

$d-(c_1+\cdots+c_k)<1/2^k$ をみたすものを見出す方法である