「ヤコビの逆問題」小史

問題の発生と解決への道

高瀬正仁

本稿ではヤコビの逆問題の発生の経緯と解決にいたるまでの過程を考察し，道筋を明らかにするとともに二，三の問題点の解明を試みた．骨格をなす論点は下記の通りである．

1．ヤコビの逆問題はガウスの著作『整数論』（1801年）第７章「円周等分の理論」に始まること．

2．ヤコビの逆問題の中にすでに多変数解析関数論が胚胎していたこと．

3．「アーベル関数」という言葉の多義性を解明すること．

4．ヤコビの逆問題のリーマンによる解決（1854年）は最終的な決着とは言えず，完全な形で解決するために多変数解析関数の基礎理論建設が要請されたこと．

［ヤコビの逆問題小史］

1777年

４月30日

ドイツのブラウンシュヴァイクにおいてカール・フリードリッヒ・ガウス生まれる．

1801年

ガウスの著作『整数論』が刊行された．第７章「円の分割を定める方程式」において円周等分方程式の代数的解法に関する理論が展開された．円周等分方程式は三角関数（正弦と余弦）の等分方程式である．正弦 $x = \sin\theta$ は円の弧長を表わす積分，すなわ

ち円積分

$$\theta=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

の逆関数 $x=\varphi(\theta)$ として認識されるから，「円関数」という呼称が相応しい.

ガウスは同時に，レムニスケート関数，すなわちレムニスケート積分

$$\alpha=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

の逆関数に対しても同様の等分理論が成立するという言葉を書き留めた.

「ところで我々が今から説明を始めたいと思う理論の諸原理は，ここで繰り拡げられる事柄に比して，それよりもはるかに広々と開かれている．なぜなら，この理論の諸原理は円関数のみならず，そのほかの多くの超越関数，たとえば積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ に依拠する超越関数に対しても，そうしてまたさまざまな種類の合同式に対しても，同様の成果を伴いつつ，適用することができるからである．」（邦訳『ガウス整数論』，朝倉書店，1995年，419頁．）

ここには明確に楕円関数（あるいはいっそう一般的な何らかの超越関数）の等分理論が示唆されている．これがヤコビの逆問題の淵源である.

1802年

8月5日

ノルウェーのスタバンゲルの近くの小島フィンネにおいてニールス・ヘンリック・アーベル生まれる.

1804年

12月10日

ドイツのポツダムにおいてカール・ギュスタフ・ヤコブ・ヤコビ生まれる.

1811年

10月25日

フランスのパリ近郊のブール・ラ・レーヌにおいてエヴァリスト・ガロア生まれる.

1815年

10月31日

ドイツのミュンスターラントの寒村オステンフェルデにおいてカール・テオドル・ヴィルヘルム・ヴァイエルシュトラス生まれる.

1826年

9月17日

ドイツのハノーファー王国のエルベ河畔の小村ブレゼレンツにおいてゲオルク・フリードリッヒ・ベルンハルト・リーマン生まれる.

10月30日

パリに滞在中のアーベルが，この日，フランスの科学学士院に論文

「ある非常に広範な超越関数族の，ひとつの一般的性質について」

を提出した. この「パリの論文」は公表されないまま行方不明になったが，後に発見され，1841年，パリの学術誌「いろいろな学者によって学士院に提出された諸論文」第7巻，176～264頁に掲載された.

この論文において完全に一般的なアーベル積分を対象にして「アーベルの定理」と加法定理が表明され，アーベルの定理から加法定理が導かれた. アーベルの定理は加法定理の根底にある定理であり，それ自身もまた加法定理という名に相応しい性格を備えている. ヤコビが1832年の論文「アーベル超越関数の一般的考察」において「アーベルの定理」と呼んだのは加法定理のほうであり，リーマンが1857年の論文「アーベル関数の理論」の中で「アーベルの加法定理」と呼んでいるのは「アーベルの定理」のほうである.

アーベルはクリスチャニア大学に学んだ後，1825年秋9月，ノルウェー政府派遣の留学生としてヨーロッパ大陸に向かった. ベルリンを経てイタリアの諸都市をたどり，パリをめざした. この年7月10日以来，単身パリに滞在中であった.

1827年

アーベル

「楕円関数研究」の前半（第1～7章）

クレルレ誌2，101～181頁.

第一種楕円積分の逆関数が導入され，二重周期性など，基本的な諸性質が記述された. アーベルは第一種楕円積分の逆関数に特別な名称を与えなかった（論文の標題に出ている「楕円関数」は楕円積分を意味する）. わずかに1829年のクレルレ誌に掲載された論文「楕円関数論概説」や1828年11月25日付のルジャンドル（アドリアン・マ

リ・ルジャンドル．フランスの数学者．1752〜1833年）宛書簡の中に，「第一種逆関数」という即物的な言葉が見られるにすぎないが，その後，ヤコビが1829年の著作『楕円関数論の新しい基礎』の中で楕円関数という呼称を提案した．

1828年

アーベル

「楕円関数研究」の後半（第８〜10章）及び「補記」

クレルレ誌３，160〜187頁および187〜190頁．

論文の前半の基礎的諸性質の土台の上に，アーベルはガウスの示唆を継承して，楕円関数の等分と変換の理論を展開した．特にレムニスケート関数の等分理論はガウスの円周等分方程式論の完全な類似物である．また，虚数乗法論へと向かう第一歩が踏み出された．

アーベル

「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」

クレルレ誌３（1828年），313〜323頁．第４分冊（12月３日）刊行．アーベル全集１，444〜456頁．

超楕円積分を対象にして，アーベルの定理と加法定理が記述された．「パリの論文」に比して対象が限定されているが，その代わり計算は細部まで精密に行なわれ，完成度は一段と高まっている．超楕円積分というのは，アーベルの表記法を用いると，

$$\psi x=\int\frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$$

という形の積分のことである．ここで r は x の任意の有理関数であり，R は，同じく x の，次数が４を越える有理整関数である（R の次数が４を越えない場合には，積分 ψx は楕円積分になる）．

第一種超楕円積分に限定してアーベルのふたつの定理を記述するために，今，φx は次数 ν の有理整関数，$f x$ は次数 ν' の有理整関数としよう．ここで ν' は，ν の偶奇に応じてそれぞれ $\nu'=\frac{\nu}{2}-2$，$\nu'=\frac{\nu-1}{2}-1$ と定める．このとき，積分

$$\psi x=\int\frac{f x\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$$

は第一種超楕円積分の一般形を与えている．φx をふたつの有理整関数の積に分解して，$\varphi x=\varphi_1 x\cdot\varphi_2 x$ と表示する．また，θx と $\theta_1 x$ は任意の有理整関数として有

理整関数

$$F x=(\theta x)^2 \varphi_1 x-(\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$$

を作り，これを因数分解して

$$F x=A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdot\cdot\cdot(x-x_\mu)^{m_\mu}$$

と表示する．このとき，方程式

（＊）　$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1+\varepsilon_2 m_2 \psi x_2+\cdot\cdot\cdot+\varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu=$（定量）

が成立する（論文「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」の定理VI）．これが，第一種超楕円積分に対するアーベルの定理である．

有理整関数$f x$の次数を任意と設定すれば，積分$\psi x=\int \frac{f x\, dx}{\sqrt{\varphi x}}$は第二種超楕円積分になる．また，$f x$の次数はやはり任意として，

$$\psi x=\int \frac{f x\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$

という形の積分を考えると，第三種超楕円積分が認識される．これらのタイプの超楕円積分に対してもアーベルの定理が記述されるが，この場合，方程式（＊）の右辺に対数的かつ代数的に構成される付加項がつく（アーベルの上記の論文の定理I，II，III）．

リーマンの理論の言葉を用いれば，点系x_1，x_2，・・・，x_μは，関数$\sqrt{\varphi x}$のリーマン面$R(\sqrt{\varphi x})$上の関数$\sqrt{\varphi x}-\frac{\theta_1 \varphi_2}{\theta}$の零点系にほかならない．

次に，あらためてφxは次数$2\nu-1$もしくは2νの有理整関数とし，rはxの任意の有理関数として，超楕円積分

$$\psi x=\int \frac{r\, dx}{\sqrt{\varphi x}}$$

を考える（rが任意であるから，この積分は第一種とは限らない）．変化量x_1，x_2，・・・，x_{μ_1}，x'_1，x'_2，・・・，x'_{μ_2}を与えるとき，それらの個数$\mu_1+\mu_2$がどれほど大きくとも，ある代数方程式の助けを借りて$\nu-1$個の量y_1，y_2，・・・，$y_{\nu-1}$を適切に定めて，

$$\psi x_1+\psi x_2+\cdot\cdot\cdot+\psi x_{\mu_1}-\psi x'_1-\psi x'_2-\cdot\cdot\cdot-\psi x'_{\mu_1}$$
$$=v+\varepsilon_1 \psi y_1+\varepsilon_2 \psi y_2+\cdot\cdot\cdot+\varepsilon_{\nu-1}\psi y_{\nu-1}$$

という形の方程式が成立するようにすることができる．ここでε_1，ε_2，・・・，$\varepsilon_{\nu-1}$は$+1$または-1のいずれかであり，vは，与えられた変化量x_1，x_2，・・・，x_{μ_1}，x'_1，x'_2，・・・，x'_{μ_2}を用いて代数的かつ対数的に組み立てられる量である（定理VIII．積分ψxが第一種とは限らないことに起因して，一般に附加項vが付く）．これが加法

定理である．

量 $y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_{\nu-1}$ は関数 r の形状には無関係に定まる．また，リーマンの用語を用いれば，個数 $\nu-1$ は関数 $\sqrt{\varphi x}$ のリーマン面 $R\left(\sqrt{\varphi x}\right)$ の種数に等しい．

アーベルは論文「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」の第一頁に脚註を附して，

「私は1826年の終わりころ，パリ王立科学学士院に，このような関数に関する論文を提出した．」

という言葉を書き留めて，「パリの論文」の存在を示唆した．ここで言われている「このような関数」というのは代数関数の積分，すなわちアーベル積分のことであり，リーマンのいう「アーベル関数」を意味するのである．

ヤコビはこの脚註を見て「パリの論文」に着目し，ルジャンドルに宛てて書かれた1829年３月14日付の書簡の中で，

「このオイラー積分の一般化は，なんというすばらしいアーベル氏の発見でしょう．われわれが生きているこの世紀が数学において成し遂げたおそらく一番重要なものであろうこの発見は，もう二年も前にあなたの所属する学士院に提出されましたが，あなたやあなたの同僚の方々の注意を引くことはありませんでした．これはいったいどうしてなのでしょうか．」（ヤコビ全集１，439頁．）

と述べて，ルジャンドルの注意を喚起した．

1829年

アーベル

「ある超越関数族のひとつの一般的性質の証明」

クレルレ誌４，200～201頁．第２分冊（３月28日刊行）．アーベル全集１，515～517頁．論文の末尾に附されている日付は「1829年１月６日」．アーベルの絶筆であり，「二頁の大論文」（高木貞治『近世数学史談』，岩波文庫，155頁参照）と呼ばれることがある．

内容は「パリの論文」の主定理である「アーベルの定理」の簡潔な紹介である．

４月６日

フィンランドのフローラン・ベルクにおいてアーベル没．

1832年

5月30日

早朝，シャンティのグラシェールの沼地の近くでガロアとL.D（正確な名前不明）の決闘が行なわれた．互いに拳銃を撃ち合った．ガロアは腹部に重傷を負い，コシャン病院に運ばれた．

決闘前夜，ガロアは3通の遺書を書いた．そのうちの一通は友人オーギュスト・シュヴァリエに宛てたもの（末尾の日付は「1832年5月29日」）で，これまでの数学研究が回想され，「これらのすべてを元手にして，三篇の論文を作成することができると思う」と報告された．三篇の論文のうち，第三論文として語られたのはアーベル積分の変換と等分の理論であった．

変換と等分の理論を語るためには，それに先立ってアーベル積分の一般理論を展開しなければならないが，ガロアの叙述はリーマンに酷似していて，さながらリーマンの論文「アーベル関数の理論」のスケッチのようである．

オーギュスト・シュヴァリエ宛の遺書が公表されたのは1846年であった．

5月31日午前10時

コシャン病院においてガロア没．

ヤコビ

「アーベルの定理に関する観察」

クレルレ誌9，99頁．ヤコビ全集2，1～4頁（表紙付き．本文は3～4頁の2頁のみ）．

1828年のアーベルの論文「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」を受けて書かれたヤコビの第一論文である．末尾の日付は「1832年5月14日」．

ヤコビ

「アーベルの超越関数の一般的考察」

クレルレ誌9，394～403頁．ヤコビ全集2，5～16頁．論文の末尾に附されている日付は「1832年7月12日」．標題の「アーベルの超越関数」の原語（羅）は「transcendentis Abelianus」であり，「アーベル積分」でも「アーベル関数」でもない．「transcendentis」というのは「何かしら超越的なもの」というほどの意味あいの言葉であるから，「transcendentis Abelianus」は「アーベルに由来する超越物」と諒解すればよいと思う．

この論文のテーマは，アーベルが1828年の論文「ある種の超越関数の二，三の一般的性質に関する諸注意」で確立した超楕円積分の加法定理である．ヤコビはこの加法定理を「あまりにも早すぎた死によって奪い取られたこの驚くべき天才の最高に高貴な記念碑」と見て，「アーベルの定理」と呼ぶことを提案した．すなわち，ヤコビの言う「アーベルの定理」というのは加法定理それ自体のことなのであり，加法定理の根底にあるアーベルの定理そのものを指すのではない．他方，リーマンは本来のアーベルの定理を指して「アーベルの加法定理」と呼んでいる．そこで次のような四通りの用語法を注意深く識別しなければならない．

1．アーベルに由来する本来の「アーベルの定理」

2．アーベルの定理から出る「加法定理」

3．ヤコビの言う「アーベルの定理」（「2」と同じもの．）

4．リーマンの言う「アーベルの加法定理」（「1」と同じもの．）

超楕円積分はルジャンドルにより「超楕円関数」と呼ばれたが，ヤコビはそれをしりぞけて，新たに「アーベルの超越関数」という呼称を提案した．すなわち，ヤコビの論文の標題に出ている「アーベル超越関数」という用語はヤコビの創案にかかるのであり，その実体は超楕円積分にほかならない．

草創期の用語法は混乱しているが，次のような言葉を識別しなければならない．

1．超楕円積分

2．超楕円関数．（ルジャンドルの用語．「1」と同じもの．）

3．アーベルの超越関数．（ヤコビの用語．「1」と同じもの．）

4．アーベル積分

5．ヴァイエルシュトラスのアーベル積分．（「1」と同じもの．）

6．ヤコビのアーベル関数．（もっとも簡単な場合におけるヤコビの逆問題の解決を通じて認識される複素2変数の二価四重周期関数を指す．）

7．リーマンのアーベル関数．（「4」と同じもの．）

8．ヴァイエルシュトラスのアーベル関数．（複素n変数の一価$2n$重周期関数だが，そのような特定の関数がいくつか選定されて，「アーベル関数」と命名された．）

9．今日の用語法でのアーベル関数．（複素n変数の一価$2n$重周期関数．ヴァイエルシュトラスの用語法「8」が継承されている．）

10．ヤコビの逆関数．（リーマンの呼称．一般の場合においてヤコビの逆問題の解決を通じて認識される複素n変数のn価$2n$重周期関数を指す．ヤコビは$n=2$の

場合を記述して「アーベル関数」と呼んだ．この場合，「ヤコビの逆関数」は「6」の「ヤコビのアーベル関数」と同じものになる．）

超楕円積分の一般形 $\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$（アーベルの表記法）において有理整関数 $R(x)$ の次数が5または6の場合を考えると，もっとも簡単なアーベル超越関数が得られる．そのうえ有理整関数 $r = r(x)$ の次数を1と限定すると，第一種（積分値がつねに有限になることを意味する）のアーベル超越関数の一般形が得られるが，アーベルが確立した加法定理の教えるところによれば，それらの中には独立なものがきっかり2個，存在する．リーマンの用語によれば，「2個」の「2」は関数 $\sqrt{R(x)}$ のリーマン面の種数にほかならない．そこで言葉を流用して，関数 $\sqrt{R(x)}$ のリーマン面の種数が p のとき，超楕円積分 $\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$ もまた種数 p をもつと言うことにする．

種数2の第一種超楕円積分の世界において，たとえば2個の積分

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}\ ,\ \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} \qquad \text{(ヤコビの表記法)}$$

（X は x の5次または6次の有理整関数）は独立である．そこで連立積分方程式

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u\,,$$
$$\Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v$$

を設定すると，「ヤコビの逆関数」（リーマンの用語）

$$x = \lambda(u, v), \quad y = \lambda_1(u, v)$$

が目にとまるであろう．第一種楕円積分の逆関数として楕円関数が認識されたように，ヤコビは種数1の超楕円積分の世界において楕円関数の類似物，すなわち「その逆関数がアーベル超越関数になるような関数」（ヤコビ全集2，10頁）を探究したのである．このような関数の存在を確定し，本性を解明しようという構想はヤコビの独創であり，それが「ヤコビの逆問題」の起源である．また，同時に多複素変数解析関数論の起源でもある．

この論文の段階ではまだこの新しい関数 $\lambda(u, v)$，$\lambda_1(u, v)$ は特別の名称をもたなかったが，1846年の論文「アーベル関数論ノート」では「アーベル関数」と呼ばれている．以下，この年譜ではリーマンとともにヤコビの逆関数と呼ぶことにする．ヤコビはアーベルの加法定理を適用して，ヤコビの逆関数に対して加法定理が成立することを示した．

ヤコビの逆関数の周期性が認識されている様子はまだ見られない．また，ヤコビの逆関数 $x = \lambda(u, v)$，$y = \lambda_1(u, v)$ は u，v の一価関数を係数にもつ代数方程式を満たすという，ヤコビの逆関数の根幹をなす性質の認識もまだ表明されていない．

ヤコビは微分方程式論の視点から見て，アーベルの加法定理のもうひとつの解釈を与えた.

1835年

ヤコビ

「アーベル超越関数の理論が依拠する二変数四重周期関数について」

クレルレ誌13，55～78頁．ヤコビ全集２，25～50頁．論文の末尾の日付は「1834年２月14日」.

前論文「アーベル超越関数の一般的考察」（1832年）で導入された関数 $x=\lambda(u,v)$，$y=\lambda_1(u,v)$ は四重周期をもつことが認識された（この論文の「基本定理」）．これらのふたつの関数は２個の複素変数 u，v の関数を係数にもつ二次方程式の根になるが，この事実もこの論文において初めて明記された．これによってヤコビはヤコビの逆問題の本性をいっそう深く自覚したと言えるのである．しかしそれらの係数の一価性への言及はまだ見られない.

また，この論文において初めて，関数 $x=\lambda(u,v)$，$y=\lambda_1(u,v)$ の等分の理論と種数１の超楕円積分の変換の理論の素描が書き留められた.

1839年

ホルンボエが編纂したアーベル全集（全２巻）が刊行され，第二巻にアーベルの遺稿が収録された．これを旧版の全集として，1881年，シローとリーが編纂した新しいアーベル全集が刊行された.

1841年

アーベルの「パリの論文」が，パリの学術誌「いろいろな学者によって学士院に提出された諸論文」第７巻，176～264頁に掲載された．アーベル全集１，145～211頁.

1846年

ヤコビ

「アーベル関数論ノート」

クレルレ誌30，183～184頁．ヤコビ全集２，85～86頁．ペテルブルク帝国科学学士院物理数学部門報告集，巻II，No. 7 からの転載．1843年５月29日に報告された.

標題の「アーベル関数」の原語（仏）は「fonction Abélienne」であり，この段階で

初めて「アーベル関数」という言葉が使用された.

クレルレ誌への転載にあたり，新たに短い註記が書き添えられた．その中でヤコビは1844年のアイゼンシュタインの論文「楕円超越関数とアーベル超越関数に寄せる所見」（クレルレ誌27，185〜191頁．アイゼンシュタイン全集1，28〜34頁．論文の末尾の日付は1844年1月10日．標題に見られる「超越関数」の原語（独）はそれぞれ「超越物」を意味する言葉である）を取り上げて，批判を加えた．同時に，ヤコビが1832年の論文で導入した関数 $x=\lambda(u,v)$，$y=\lambda_1(u,v)$ は，2変数 u，v の解析関数（単に「解析関数」と言えば，一般に有理型関数を意味する）を係数にもつ二次方程式の根になること，および係数になる解析関数は一価であることを言明した．そのうえで，「まさしくその点が，関数 x と y の真実の性質なのである」（クレルレ誌30，184頁）という言葉が語られた.

係数の一価性の認識は1835年の論文「アーベル超越関数の理論が依拠する二変数四重周期関数について」の段階ではまだ見られなかったものであり，この註記が初出である．これでヤコビの逆問題の定式化が完成した.

論文の末尾に「1845年10月」という日付が附されているが，これは註記が書かれた時期を示す日付である.

「アーベル関数ノート」の脚註によると，ヤコビの逆問題の出発点は，楕円関数 $x=\sin am(u)$ はふたつのテータ関数の商として表示されるという，楕円関数というものの本性に触れる基本的事実である．これを言い換えれば，楕円関数 $x=\sin am(u)$ は「一次方程式 $A+Bx=0$ を通じて与えられる」（ヤコビ全集2，86頁）ということになる．この指摘に続いて，ヤコビはふたつの独立な，種数1の第一種超楕円積分

$$\Pi(x)=\int^{x}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}},\quad \Pi_1(x)=\int^{x}\frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}\qquad \text{(ヤコビの表記法)}$$

（ここで $f(x)$ は5次または6次の有理整関数）を取り上げて，連立積分方程式

$$\Pi(x)+\Pi(y)=u,\quad \Pi_1(x)+\Pi_1(y)=v$$

を設定した．量 u，v を与えて，この方程式系を満たす未知量 x，y を u，v の関数（すなわち，リーマンの言う「ヤコビの逆関数」）として決定しようというのであり，ヤコビは，

「量 x，y は二次方程式

$$A+Bt+Ct^2=0$$

の二根であることがわかる．ここで A，B，C は，ふたつの変化量 u，v の実もしく

は虚のあらゆる有限値に対してただひとつの有限値を取る，u と v の関数である．」（同上）

と主張した．楕円関数 $x=\sin am(u)$ が満たす一次方程式 $A+Bx=0$ の係数 A，B の実体が（一変数 u の）テータ関数であったように，超楕円積分の場合にも，二次方程式 $A+Bt+Ct^2=0$ の係数 A，B，C は，（今度は二変数 u，v の）テータ関数という名が真に相応しいある特殊な関数になることが期待されるであろう．そのとき商 $x+y=-\dfrac{B}{C}$，$xy=\dfrac{A}{C}$ は一価解析関数になり，しかも1835年の論文「アーベル超越関数の理論が依拠する二変数四重周期関数について」における考察の帰結によれば，四重周期をもつのである．このようなヤコビの主張に証明を与えようとする試みが，ヤコビの逆問題の解決の実質を形成するのである．

ヤコビの逆問題はまず初めにドイツの数学者ヨハン・ゲオルク・ローゼンハイン（1816～1887年）が論文

「第一類超楕円積分の逆になる二変数四重周期関数について」

において解決した．クライン『19世紀における数学の発展に関する講義』第一巻（シュプリンガー書店，1926年）によれば，この論文が書かれたのは1846年と言われている（同書，1979年刊行のリプリント版の111頁）が，公表されたのは1851年で，パリの学術誌「いろいろな学者によって学士院に提出された諸論文」第11巻に掲載された．

ローゼンハインはケーニヒスベルクに生まれ，ケーニヒスベルク大学に学んだ．このときヤコビの影響を受けたと推定される．クライン『19世紀における数学の発展に関する講義』第一巻には「ヤコビの教え子」と記されている（同書，1979年刊行のリプリント版250頁）．ヤコビはベルリン大学に学んだ後，1826年から1843年までケーニヒスベルク大学で教えた．

<u>ヤコビ</u>

「いっそう高度な第三種アーベル超越関数におけるパラメータと変数の交換について」

クレルレ誌32，185～196頁．ヤコビ全集２，121～134頁（表紙付き．本文は123頁からで，全12頁）．末尾の日付は「1846年５月13日」．

標題に出ている「いっそう高度なアーベル超越関数」は一般のアーベル積分を指す．「超越関数」の原語（独）は「超越物」を意味する言葉である．アーベルの２篇の遺稿

「ある非常に広範な超越関数族の，ひとつの注目すべき性質について」
（アーベル全集2，43～46頁）
「前理論の拡張」
（アーベル全集2，47～54頁）
が紹介された．ヤコビは1839年に出た旧版のアーベル全集を見てアーベルの遺稿を知った．

10～11月
フランスの数学誌「純粋数学と応用数学の雑誌」（編集者の名前をとって「リューヴィユ誌」と略称される）11，381～444頁に，
『エヴァリスト・ガロアの数学作品集』
が掲載された．編纂者はリューヴィユである．1829年5月29日付の，オーギュスト・シュヴァリエ宛の遺書も収録された．リーマンはこの遺書を見たと思われるが，リーマンに及ぼされたガロアの影響の様相を物語る資料はない．

1847年

ゲーペル

「一位のアーベル超越関数の理論のスケッチ」
クレルレ誌35，277～312頁．「アーベル超越関数」は超楕円積分を意味し，それが「一位」というのは，種数が2に等しいことを意味する．「超越関数」の原語（羅）は「超越物」を意味する言葉である．
ヤコビが1846年のノート「アーベル関数論ノート」の附記の中で表明した命題を取り上げて，証明を与えた．ゲーペルはローゼンハインとほぼ同時期に（やや遅れて），もっとも単純な場合（種数2の超楕円積分の場合）においてヤコビの逆問題を解決したことになる．ゲーペルはヤコビの逆問題を単に「逆問題」と呼んでいる．
アドルフ・ゲーペルはドイツの数学者（1812～1847年）．ロストックに生まれ，ベルリン大学に学んだ．

1849年

ヴァイエルシュトラス

「アーベル積分の理論への寄与」
ブラウンスベルクのギムナジウム「コレギウム・ホセアヌス」の年報（1848～49年）の巻頭論文（3～17頁）．ヴァイエルシュトラス全集1，111～131頁．論文の末尾

に附されている日付は「1849年7月17日」.

ヤコビの逆問題に寄せるヴァイエルシュトラスの第一論文である．ヤコビの逆問題の対象を一般化して，完全に一般的な超楕円積分にまで拡張しようと試みて，3篇の論文を公表した（他の2篇は1854年と1856年にクレルレ誌に掲載された）．アーベルの名を冠し，超楕円積分をアーベル積分と呼ぶのは，ヤコビの流儀にならったのである．

ヤコビの逆問題を設定するために，ヴァイエルシュトラスとともにまず初めに実量 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2n+1}$ を取ろう．これらは $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2n+1}$ というふうに配列されているとして，$2n+1$ 次有理整関数

$$R(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n+1})$$

を考える．これをふたつの有理整関数

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1}),$$
$$Q(x)=(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2n+1})$$

の積に分解する．n 個の関数

$$g_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1})P'(a_{2\alpha-1})}}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n)$$

を作り，これらを用いて再度 n 個の関数

$$F_\alpha(x)=\frac{g_\alpha P(x)}{x-a_{2\alpha-1}}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n)$$

を作る．そのうえで連立積分方程式

$$u_1=\sum\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$u_2=\sum\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\sum\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

を設定し，「変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を n 個の変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の関数と見て，具体的な形に表示する」という問題を考える．これが，超楕円積分を対象とするヤコビの逆問題である．

リーマンの理論の語法によれば，方程式の個数nは関数$\sqrt{R(x)}$のリーマン面$R\left(\sqrt{R(x)}\right)$の種数に等しい．また，リーマンの理論によればリーマン面$R\left(\sqrt{R(x)}\right)$上には$n$個の一次独立
な積分が存在するが，積分

$$\int \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},\ \int \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},\ \cdot\cdot\cdot,\ \int \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

はそのような一系の積分の具体例を与えている．

ヴァイエルシュトラスは，変数x_1，x_2，・・・，x_nはn次代数方程式

$$(*)\qquad \frac{a_2-a_1}{x-a_1}p_1^2+\frac{a_4-a_3}{x-a_3}p_2^2+\cdots\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{x-a_{2n-1}}p_n^2=1$$

の根として与えられる，と主張した．ここでp_1，p_2，・・・，p_nは変数u_1，u_2，・・・，u_nの一価関数であり，第二論文では（表記法は少々異なっているが）アーベル関数という呼称が与えられている．もう少し精密に言えば，u_1，u_2，・・・，u_nは複素変数であり，p_1，p_2，・・・，p_nの各々は，それらの変数のすべての値に対して規定されて，しかも$2n$重周期をもつ有理型関数である．

そこで，これはヴァイエルシュトラス自身の用語法ではないが，一般にn個の複素変数の$2n$重周期をもつ有理型関数をアーベル関数（今日の用語法）と呼ぶことにすれば，上記の方程式（＊）を

$$x^n+A_1x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+A_n=0$$

という形に書くとき，係数A_1，A_2，・・・，A_nはすべてアーベル関数である．しかもそれらはどれも，ふたつのテータ関数の商として表示される．これだけのことが示されれば，ヤコビの逆問題の原型において要請された事柄は，すべて明るみに出されたと言えるのである．

第一論文の当時，ヴァイエルシュトラスはコレギウム・ホセアヌス（カトリックの僧侶を養成する学校）の教員で，地理，習字，体操などを教えていたと言われている．同僚の教師たちがヴァイエルシュトラスの第一論文をローゼンハインのもとに送ったところ，ローゼンハインは即座に高い評価を与えたと言われている（ポアンカレが伝えたという．このエピソードは小堀憲『大数学者』，新潮社，に出ている）．

1851年

リーマン

「一個の複素変化量の関数の理論の基礎」（学位論文）

ゲッチンゲン大学に提出された．1990年版『リーマン全集』35～80頁（本文41頁，目次２頁，注釈３頁）．リーマン面の概念が導入され，ディリクレの原理に基づいて基礎理論が建設された．その土台の上に1857年の論文「アーベル関数の理論」が書かれて，ヤコビの逆問題が解決された．

ローゼンハイン

「第一類超楕円積分の逆になる二変数四重周期関数について」

パリの学術誌「いろいろな学者によって学士院に提出された諸論文」第11巻，361～468頁．「第一類」は「種数２」を意味する．

ヤコビの逆問題はパリの科学学士院の懸賞問題になったが，ローゼンハインが受賞した．

1854年

ヴァイエルシュトラス

「アーベル関数の理論への寄与」

クレルレ誌47（1854年），289～306頁．ヴァイエルシュトラス全集１，289～306頁．論文の末尾に附されている日付は「1853年９月11日」．ヤコビの逆問題に寄せるヴァイエルシュトラスの第二論文である．

1855年

２月23日

ドイツのゲッチンゲンにおいてガウス没．

1855～56年

1855年のミカエル祭の日（９月29日）から翌1856年のミカエル祭の日まで（1855～56年の冬学期と1856年の夏学期），ゲッチンゲン大学において，1857年の論文「アーベル関数論」の元になったリーマンの講義が行なわれた（このときリーマンは私講師であった）．３人の聴講者（デデキント，シェリング，ビエルクネス）がいた．

1856年

ヴァイエルシュトラス

「アーベル関数の理論」

クレルレ誌52（1856年），285～380頁．ヴァイエルシュトラス全集１，297～355頁．全集には一部分のみが収録された．

ヤコビの逆問題に寄せるヴァイエルシュトラスの第三論文．論文の末尾に「続く」と附言されているが，続篇は公表されなかった．

1857年

ボルヒャルト誌54（1857年）にリーマンの四論文が掲載された．

（第11論文）「独立変化量の関数の研究のための一般的諸前提と補助手段」，101～104頁・

（第12論文）「二項完全微分の積分の理論のための位置解析からの諸定理」，105～109頁．

（第13論文）「一個の複素変化量の関数の，境界条件と不連続性条件による決定」，111～114頁．

（第14論文）「アーベル関数の理論」，115～155頁．

ヤコビの逆問題が解決された．解決の鍵になったのは，（１）アーベルの定理，（２）アーベルの定理から導かれるアーベルの加法定理，（３）微分方程式論の視点からアーベルの加法定理を見るヤコビの解釈であった．

1859年

５月５日

ディリクレ没．

10月26日

この日の日付でリーマンがヴァイエルシュトラスに宛てて手紙を書いた．手紙の内容は数学に関するもので，ふたつの部分から成る．前半は素数の分布に関する有名な論文

「ある与えられた量以下の素数の個数について」（この年11月のベルリン科学学士院月報に掲載された．1990年版『リーマン全集』145～153頁．リーマンは1859年からベルリン科学学士院の通信会員．）

のスケッチである（この部分は1990年版『リーマン全集』の823～825頁）．後半はリーマンの没後，ヴァイエルシュトラスの手でボルヒャルト誌71（1870年），197～200頁に公表された（1990年版の『リーマン全集』326～329頁）．その記事には，

「n 個の変数の，$2n$ 個より多くの周期をもつ一価多重周期関数は存在しえないと

いう定理の証明」

という標題が附された.

1861～1862年

冬学期，リーマンがゲッチンゲン大学において講義

「代数的微分の積分の一般理論について」

を行なった. 1861年10月28日から1861年3月11日まで. 概要は1990年版『リーマン全集』1～66頁に収録されている（本文58頁，註記8頁）. 「アーベル関数」という名を与えられた関数が登場する.

1866年

<u>リーマン</u>

「テータ関数の零点について」

ボルヒャルト誌65（1866年），161～172頁. 1990年版『リーマン全集』212～224頁.

論文「アーベル関数の理論」への補遺.

7月20日

北部イタリアのマジョレ湖畔西岸の町セラスカおいてリーマン没. 三回目のイタリア旅行の途次であった.

1870年

7月14日

プロイセン王立科学学士院においてヴァイエルシュトラスの報告

「いわゆるディリクレの原理について」（ヴァイエルシュトラス全集2，49～54頁.）

が行なわれた. リーマンの複素関数論の根幹をなす「ディリクレの原理」に対して，疑義が表明された.

<u>リーマン</u>

「n個の変数の，$2n$個より多くの周期をもつ一価多重周期関数は存在しえないという定理の証明」

1859年10月26日付のヴァイエルシュトラス宛書簡の抜粋. ボルヒャルト誌71（1870年）197～200頁. 1990年版の『リーマン全集』326～329頁.

1880年

ヴァイエルシュトラス

「r 個の変数の $2r$ 重周期関数に関する研究」

ボルヒャルト誌89，1～8頁．ヴァイエルシュトラス全集2，125～133頁．ボルヒャルトに宛てて書簡の形をとって報告した．手紙の日付は「1879年11月5日」．「変数」はつねに「複素変数」を意味する．

この手紙の末尾（ボルヒャルト誌89，8頁）において，ヴァイエルシュトラスは「ここで考察された r 個の変数の $2r$ 重周期関数に関する私の研究にあたって，当初から視圏にとらえていた目的地」について語っている．その目標の地というのは，

「そのような関数はどれも，r 個の変数の Θ 関数を用いて書き表わされる．」

という定理の証明のことである．ヤコビの逆問題はこの命題が確立されて初めて，ヤコビが企図した通りの形で解決されたと言えるのである．

この問題の解決のためには多複素変数解析関数論の深い知識が要請され，むずかしい．ヴィルティンガー（ヴィルヘルム・ヴィルティンガー．オーストリアの数学者．1865～？年），ポアンカレ（ジュール・アンリ・ポアンカレ．フランスの数学者．1854～1912年），ブルメンタール（ルートヴィッヒ・オットー・ブルメンタール．ドイツの数学者．1876～1944年）などの研究の積み重ねを経て，ようやく解決された．

1897年

2月17日

ベルリンにおいてヴァイエルシュトラス没．

補記

本稿は平成12年（2000年）10月21日（土）～22日（日），津田塾大学数学計算機科学研究所において開催された「第11回数学史シンポジウム」での講演

『リーマンの論文「アーベル関数の理論」の翻訳を終えて』（10月21日）

の記録である．実際の講演では本稿に見られるような年譜「ヤコビの逆問題小史」を配付したうえで，ヤコビの逆問題の形成史のあらましを語り，問題点を指摘した．

朝倉書店から刊行中の「数学史叢書」の第四巻として『リーマン論文集』（仮題）が企画されて久しいが，一昨年秋，収録予定の論文「アーベル関数論」の訳稿をようやく仕上げ，解説に代えて「ヤコビの逆問題形成史」という主旨の年譜を作成した．その後もおりに触れて改稿を重ねたが，一年後の昨年秋10月，津田塾大学での数学史シンポジ

ウムの時点でもなお『リーマン論文集』は未刊であった（平成12年4月末日の今も未刊である）．そこでその段階での年譜を公表し，併せて所見を表明することにした．

ヤコビの逆問題形成史にはなお研究の余地が残されている．近代数学史におけるこの逆問題の重要性に鑑みて，最善をめざし，『リーマン論文集』が刊行される日まで年譜の改稿の試みを継続したいと思う．

［平成13年（2001年）4月26日］