定理から定義へ：
ε-δ論法による極限概念の基礎づけ

中根美知代[1]

1. はじめに：ε-δ論法とはなにか

昨年の研究集会では，ε-δ論法を使ったといわれる Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) が，その著作『解析学教程』で，実は「無限小」や「限りなく近づく」といった表現を使っていることを紹介した.1) そして,「Cauchy が ε-δ 論法を使った」とする教科書の歴史的記述が疑わしいことを指摘するとともに，こうした記述が生まれるのは，教科書の著者の孫引き，思いこみもさることながら，Cauchy 自身の記述が ε-δ 論法であるとも，そうでないとも読めることを論じた.2) 今回は，この議論を発展させ，数学史の専門的な研究での，Cauchy と ε-δ 論法にかんする見解を考察していきたいと思う.

実は，数学史の専門的研究においても Cauchy は ε-δ 論法の創始者，そうとはいわないまでも，もっとも初期にその論法を用いた人物として評価されている.3) Weierstrass が「解析学の厳密化」という考え方のもとで Cauchy のやり方を押し進め，ε-δ 論法は完成したとするのが，先行研究の見解である.

数学史の専門家が，原論文を実際に分析した上で導いた結論とはいえ，今日 ε-δ 論法を学んだ者から見ると，依然として疑問を持たざるを得ない.「無限小」や「限りなく」といった曖昧な概念を使わず，２つの正数 ε と δ の「せめぎあい」で極限に関する諸性質を規定することこそ ε-δ 論法であると学んできたからである．これらの概念を疑問もなく導入している Cauchy が，ε-δ 論法を用いたと言ってしまっていいのだろうか．しかも，Cauchy から Weierstrass までの過程は「数学の厳密化」の精神でなされたという以上の考察はなされていない.4)

Cauchy の成果は，今日から見てどのように評価されるのか，Weierstrass が Cauchy の仕事を整備していくにあたっては，どのような経緯があったのか．本報告では，この点を検討したいと思う．

ε-δ 論法の完成と一口に言っても，様々な論点がある．今日の微積分の教科書では，関数の連続性の定義を,「限りなく」や「無限小」の概念を用いず，せめぎ合う２つの数の関係で捉えることから，ε-δ 論法による微分積分学が始まって

[1]michiyo.nakane@nifty.ne.jp

いる．そこで，本報告においては，関数の連続性がどのように表現されてきたかに焦点を当てて，ε-δ 論法の発展過程を見ていく．

せめぎ合う２数の関係で関数の連続性を捉えるという考え方は，Cauchy に先だって Lagrange が気づいてはいた．ところが Cauchy は，関数の連続性を無限小という言葉を使って表し，ε-δ 論法で記述していない．しかし，彼が ε-δ 論法を用いたといわれるには，理由がある．今日のものとはやや異なる「Cauchy の ε-δ 論法」は，実は無限小と両立するのである．Cauchy と同様の理解の状態を保ちつつ，Dirichlet や Riemann は，関数の連続性を ε-δ 論法で表現し，これを定理としていた．彼らの定理を定義に差し替えたのが Weierstrass であった．本報告では，なぜこのような移行がなされたのかも考察していきたいと思う．

これまで，この方面の研究があまりなされてこなかったのは，数学者のどのような手続きも「解析学を厳密化しようとしてなされた」の一言で片づけられてしまったためであろう．もちろん，それまでの理論を厳密にしていくのは，数学者の重要な仕事であるが，あまりにも一般的すぎる捉え方である．彼らがどのような目的意識を持ち，何をどのように厳密にしていったのかを明らかにすることにより，ε-δ 論法の形成過程を，より具体的に論じていきたいと思う．

2. Lagrange の連続関数の捉え方：ε-δ 論法の萌芽

18 世紀半ばに起こった振動弦の論争は，連続・不連続関数の概念を確立するための大きな契機となったことはよく知られている．[5)] たとえば Euler (1708-83) は，連続関数があらわす曲線は，曲線のあらゆる部分が，連結しているという状態を保ちつつ結びつけられていると捉えていた．すなわちつながっているグラフで表すことができる関数が連続関数だったのである．Arbogast (1759-1803) の「変数が連続的に増加すると考えると，関数は対応する変動を受けるだろうが，それは，すべての中間の値をとることなく一つの値から他の値にいくことは出来ない」のような，より解析的な表現もあるが，いずれにせよ直観的な理解の域は出ていない．

こうした状況のなか，ε-δ 論法の「はしり」とも言うべき表現で，連続関数を表したのが，Joseph Louis Lagrange (1736-1813) である．18 世紀の無限小解析学に登場する「無限小」は，定義がはっきりせず，それが時には 0 でないものとして分母に置かれ，時には 0 として扱われるという矛盾を抱えた量だった．

この扱い方に疑問を持っていた Lagrange は，任意の関数 $f(x)$ が

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots,$$

と展開できるとし，$p, q, r, \cdots$ で１次，２次，３次，$\cdots$ の導関数を定義した．このようにすれば，極限概念や無限小を導入することなく微分が定義でき，解析学が構成できるというのが彼の主張であった．今日の目から見れば，関数のべき級数展開の一意性，級数の収束を無条件に認めるなど，極めて曖昧かつ不十分なものとしか思えない理論であるが，Lagrange の意図は貫かれている．Lagrange の２冊の解析学の教科書,『解析関数の理論』,『関数解析講義』は，以上のような主旨のもとで書かれたものである.[6)]

『関数解析講義』には，以下のような，興味深い言明が見られる．

$f(x)$ は

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + iV,$$

($V(i)$ は i が 0になるとき，ともに0 となる)

と表せる．ここで,「$V(i)$ は i が 0になるとき，ともに0 となる」とは,「与えられた任意の正の D に対して，十分小さい i を選び，$|V(i)|$ を D よりも小さくすることができる」との意味である．ゆえに　$i[f'(x)-D] < f(x+i)-f(x) < i[f'(x)-D]$.

関数 $V(i)$ は，直観的にいえば,「i が限りなく 0 に近づくと V も限りなく 0 に近づき，最終的には $V(0)=0$ となる」ような関数であろう．Lagrange の主旨からして，D も i も無限小量とは成り得ないので，彼は，$i=0$ で連続な関数 $V=V(i)$ を i と D のせめぎ合い，すなわち ε-δ 論法で表現していたのでといえるだろう．

『関数解析講義』でも強調しているように，Lagrange が求めたのは，解析学の議論を代数的な操作，加減乗除に帰着することであった．変量が 0 に近づくとともに関数値が 0 になるという状況を表現するためには，今日しばしば矢印で表わされる極限操作が不可欠であるが，これは，等式や不等式で表される概念に比べて，形式的に扱いにくい．たとえば矢印の左右に有限確定値 α を加えても矢印は成り立つかどうかについては，やや慎重にならねばならない．極限操作を２つの数のせめぎ合いで評価できれば，この概念を代数的な操作に帰着で

きる．これが Lagrange の意図であった．逆にいえば，極限操作で規定されるような関数を扱う都度に，このような表現を用いればよいのであって，Lagrange が連続関数を一般をこのように捉えていたとは考えられない．彼が，連続関数をこのように定義したということもない．

確かに，ε-δ 形式の表現は，極限操作を「厳密」に捉えるうえで有用ではある．しかしこのことと，無限小を排除し解析学に厳密な基礎づけを与えることは，Lagrange のなかでは独立である．彼が与えた基礎づけは，あくまでもべき級数展開であった．

3. Cauchy の ε-δ 論法

では，ε-δ 論法の創始者といわれる Cauchy の仕事を見ていこう．無限小・関数の連続性・微分は以下のように定義されている．

無限小：ある変量の順次とる値が，限りなく減少し，与えられたどのような数よりも小さくなるとき，この変量は無限小あるいは無限小量と呼ばれる．この種の変量は 0 を極限として持つ．(『解析学教程』序文)

関数の連続性：α を無限小とする．ある区間内のそれぞれの x について，差 $f(x+\alpha)-f(x)$ が α の値とともに減少するとき，関数 $f(x)$ は，この区間で，この変量について連続といわれる．別の言葉で言えば，(中略) その区間で，変量の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加をつねに作り出すことである．(同第 2 章)

微分の定義：i は無限小量，h は有限の値であるとする．$i=\alpha h$ としておけば，α はまた無限小量である．そして

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$

が恒等的に成り立つので

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h \tag{C1}$$

が出てくる．h が定数であるとして，α が限りなく 0 に近づいた時の (C1) の左辺の極限は，関数 $y=f(x)$ の微分と呼ばれているものである．(『微分積分学要論』[7] 第 4 講)

Cauchy は連続関数や微分を定義する際に,「無限小」も「限りなく近づく」も

使っている．それらを排除した Lagrange と比べると，むしろ時代をさかのぼったかのような印象すら受ける．これらの概念は，その後にかかれた教科書『微分学講義』でもそのままである．[8] 晩年の 1853 年の論文でもこれらの表現を用いていることから，彼は終身この概念を用いていたと考えられる．[9] Cauchy が無限小や「限りなく近づく」という概念を払拭し，$\varepsilon-\delta$ 論法で解析学の基礎づけを与えたという事実はない．

そうであるにも関わらず，数学史の先行研究が Cauchy を ε-δ 論法の創始者と位置づけるのは，つぎのような証明が見られるからである．[10]

（定理）（『微分積分学要論』第７講） $f(x)$ が端点 $x = x_0$ と $x = X$ の間で連続とし，その区間内での関数の微分 $f'(x)$ の最大値を A，最小値 B とすると，有限な差の比

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

は必ず A と B の間に含まれる．
（証明） δ と ε で非常に小さな数を表す．δ はそれより小さい i の値と x_0 と X の間に含まれるすべての x に対し，比

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

は $f'(x) - \varepsilon$ より大きく $f'(x) + \varepsilon$ より小さい範囲にとどまっているようにとる．
（中略）この結論は数 ε がどんなに小さくても成り立つ．

確かに Cauchy は，極限操作をふたつの正数のせめぎあいで規定する ε-δ 論法をとっている．ここで，ε と δ という記号が使われていることが，彼をこの論法の創始者と呼ぶ理由であろう．[11] Grabiner は，Cauchy のこの証明の手法は，先に示した Lagrange の記述から影響を受けたものとしている．

極限操作をせめぎ合う２数の考え方を用いて不等式で表現し，極限に関する厳密な理論を展開するのが ε-δ 論法である，とするのが先行研究の立場であるならば，Cauchy，場合によっては Lagrange を ε-δ 論法の創始者とするのは自然であろう．しかし，今日の微積分学を学んだ者からすると，Cauchy のなしたことと今日の ε-δ 論法との間に，大きな飛躍があるとの感は否めない．

私達は「無限小や極限概念を排除し，かわりに ε-δ 論法で極限の概念を規定

することにより，解析学を厳密に議論する」と学んできた．ところが Cauchy は無限小を導入している．彼のなかでは，$\varepsilon-\delta$ 論法とともに「無限小」や「限りなく近づく」という概念も共存するのである．彼の解析学の根底に横たわるのはこれらの概念であり，ε-δ 論法はごく限られた場面で，部分的に用いられているにすぎない．

もちろん数学史の研究書は，Cauchy が，私達が期待するような解析学を厳密に基礎づけるための ε-δ 論法を構成したとはいっていない．Cauchy はこの論法のあくまでも創始者，完成したのは Weierstrass と位置づけている．しかし，Cauchy から Weierstrass への道のりは,「解析学の厳密化」という考え方から自然に導かれるとされ，具体的には示されていない．ここで,「厳密化」といったとき，多くの人々が思い浮かべるのは「解析学を厳密に基礎づける」，すなわち，無限小に代えて，ε-δ 論法で連続関数の定義を与えることであろう．確かにせめぎ合いの考え方を適用すれば，無限小を含む Cauchy の連続関数の定義を ε-δ 論法でかきかえることはさほど難しくないので，議論するほどのことではないというのが先行研究の立場であろう．

だが，そこには問題がある．無限小を排除することにより Cauchy の理論を厳密にしようとする意図が出てくる余地が，実際にあるのだろうか．Lagrange が問題にした 18 世紀の無限小と異なり，Cauchy の無限小はきちんと定義された変量である．Cauchy の読者が 18 世紀の数学者と同じような不安を感じていたとは考えがたい．ε-δ 論法の形式で極限操作を表現することから，それによって解析学の基礎づけが与えられる，すなわち，連続関数の定義が ε-δ 論法で与えられるまでの過程を今一度見直していこう．

4. 定理としての ε-δ 形式:Dirichlet と Riemann の扱い方

Cauchy に引き続き，Peter Lejeune Dirichlet (1805-59) もまた早い時期に，ε-δ 形式による不等式の表現を用いて，極限概念を表現している．この手法は，フーリエ級数の収束性を論じ，いわゆる Dirichlet 関数の概念を提示した 1829 年の論文で，級数の収束性を論じる際にとられている．Dirichlet も Cauchy 同様，無限小は積極的に導入している．

Dirichlet は，最も初期の段階で ε-δ 形式による表現を講義に導入した人物とも評価されている.[12] 実際，Dirichlet は，1854 年・58 年に定積分論に関する講義を行ない，連続関数を Cauchy と同じように定義した後，それから導かれ

る性質，あるいは重要な「定理」として,「関数 $y=f(x)$ が $x=a$ から $x=b$ で連続関数であるならば，任意に小さく選ばれた ρ の絶対値に対して，小さな σ を見出すことができ，幅が σ 以下の区間で，関数値が高々 ρ しか変化しない」ことを提示し，証明している.[13] 今日，連続関数の定義として与えられているものは，まず定理として登場したのである.

54 年の講義で与えられた「証明」と称するものは，連続関数のグラフの説明といったほうが適当なものである．c_1 を含むある区間を考える．$x=c_1$ で関数 $f(c_1)$ と出発点の関数値 $f(a)$ の値の差が ρ に等しくなったとしよう．このとき，区間 $|a-c_1|$ を σ とおけばよい．Dirichlet はこの「定理」を用い，定積分の値を上下から評価して，確定している.

Dirichlet がもくろんだのは，このような不等式の表現により，定積分の評価を正確に示すことだった．きわめて具体的な目標を持ったうえでの，連続関数の ε-δ 論法による表現だった．しかもこれは，Cauchy の連続関数の定義から無限小を排除して導かれたものではなく，18 世紀的な意味での連続関数のグラフを思い浮かべれば直ちに得られるものなのである．もちろんこの講義で Dirichlet は,「限りなく小さい」量を使っている．また，議論の出発点を Cauchy の連続性の定義に置いていることからもわかるように，無限小にかわる解析学の基礎として，ε-δ 論法を捉えているわけではない．Dirichlet が望んだのは，連続関数を ε-δ 論法で表現することによって得られる厳密な定積分の評価であって，厳密な解析学の基礎付けではなかった.

Dirichlet の 29 年論文で ε-δ 論法に触れたとされる Riemann もまた，ε-δ 形式による連続性の規定をメモの形で残している.[14]　1851 年論文に添えられている注では $w=w(z)$ が連続であることを「量 w が $z=a$ と $z=b$ の間でともに連続的に変わる」として定義しているが，この表現はつぎのことを表すものとする，として,「その区間の中で，z に対する無限小の変化が w の無限小の変化を生じる：任意の与えられた ε に対して，z の区間の内部で z が α よりも小さいとき，w のふたつの値の差が ε より大きくならないように α をとることができる.[15]

さらに，遺稿のなかから発見された 1855 年づけメモには，積分論に関して言及したうえで,「関数の連続性は不等式を用いて表現されねばならない．そうすることによりはじめて計算の方法を完全にすることができるからである」との記述も見られるのである.[16]

いずれもメモにすぎなく，これから Riemann 自身の考えを探るのは難しい

が，Dirichlet の場合と照らし合わせれば，少なくとも後者に関しては，積分の評価を明確に示すことを期すためと考えるのが自然であろう．

彼らはのみならず当時の何人かの数学者にとって，連続関数の ε-δ 形式での定義は，自然に導けた可能性はある．そして，その形式の有用さは少なくとも定積分の理論で示されている．そうであるとすれば，なぜ彼らは，Cauchy の無限小を含む，連続関数の定義を保持しようとするのか．なぜ，無限小を排除して，ε-δ 形式の定義を与えようとしないのか．逆に言えば，Weierstrass が定義を書き換えたのはなぜなのだろうか．Weierstrass 自身の記述を検討していこう．

5．定理から定義へ：Weierstrass の 1861 年講義

今日見るような ε-δ 形式は Karl Weierstrass (1815-97) によって完成されたとされている．実際，1861 年，Berlin の Gewerbeinstitut での講義で，Weierstrass は ε-δ 形式による連続性の定義を与えている．H.A. Schwartz によって記されたこの講義録は，1971 年，Dugac によって部分的に公刊された．[17)]

Weierstrass は独立変数 x と y との対応として，関数 $y=f(x)$ を定義する．そして，「h に対してある限界 δ が定められ，絶対値が δ より小さいすべての h について $f(x+h)-f(x)$ が任意に小さい h よりも小さくなりうるならば，独立変数の無限小の変化が関数の無限小の変化に対応するという」とし，「独立変数の無限小の変化に対して関数の無限小の変化が対応するとき，その変数に関して連続関数あるいは，その変数について連続的に変化するという」としている．Weierstrass は，このようにして「無限小の変化」を定義することにより，無限小という概念を持ち込むことなく，連続関数を定義したのであった．Dirichlet にとっては定理，Riemann にとっては覚え書きであった連続関数のこの性質は，ここで，連続関数の定義となった．

Weierstrass は 1854 年の Dirichlet の講義を聴いているので，この定義を導入するにあたっての Dirichlet からの影響は無視できない．ただし，Weierstrass と Cauchy，Dirichlet, Riemann らの間には明らかな違いがある．それは，極限操作のみならず，「無限小の変化」を ε-δ 形式で表現したことである．そして，「無限小」そのもの自体を問題にするのではなく，「無限小の変化」から議論がはじまっていることである．

Cauchy の場合は，微分を定義するにあたって，「無限小の変化」ではなく，「無

限小」自身を導入する必要があった．変量の無限小の増加とそれに応じる関数値の増加との比を問題にする Cauchy の定義にしたがうのならば，どうしても無限小自身を導入しないわけにはいかない．しかし，Weierstrass は無限小を用いず，以下のように微分を定義している．まず独立変数 h とともに 0 に近づく関数 $\varphi(h)$ を「小さい ε が与えられると，δ が定まり，絶対値が δ より小さいとき，$\varphi(h) < \varepsilon$ となる」と定義する．つぎに，この関数を用いて，関数 $f(x)$ は

$$f(x+h) - f(x) = ph + h \cdot \varphi(h), \tag{W1}$$

($\varphi(h)$ は h とともに0 に近づく関数)

と分解されることを指摘した後，

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x), \tag{W2}$$

として微分を定義するのである．このように定義すれば，無限小を導入する必要はなくなる．

Weierstrass の議論は，先に見た Lagrange の教科書を思い起こさせる．べき級数展開によって，微分を定義しているからである．Weierstrass の定義においては，Cauchy の無限小のかわりに，今日で言えば $o(1)$ の記号で表現される $\varphi(h)$ が必要である．そして，これは Lagrange がやったように，ε-δ 形式で無限小を導入することなく定義できるものである．すなわち解析学を展開するにあたって，Cauchy の無限小は必要なくなってしまうのである．なお今日の微積分の教科書では，Weierstrass の $\varphi(h)$ のことを無限小と呼んでいる．

ε-δ 論法の要点は，ε と δ のせめぎ合いにより，お互いをより小さい数へと追い込んでいくことにあった．したがって，関数の極限に関する諸性質や数列・級数の極限といった，独立変数や番号と関数や各項の値というように，2つの数の間の関係で捉えられるものには適用できる．しかし，「無限小」は自分自身が単独で小さくなっていく量である．「任意の正数より小さい数」として捉えたところで，任意の正数をより小さい数へと追い込んでいくものがない．そのため Cauchy の無限小を ε-δ 形式で書くことはできないが，「単独の無限小」に代えて，無限小の変化の関係を問題にする「関数の連続性」から話を始め，$\varphi(h)$ を導入することにより，ε-δ 論法で微分積分学を貫徹させることが可能なのである．

ただし，Weierstrass は，無限小を回避するために，$(W2)$ のような微分の定義を導入したわけではない．Dugac は，Weierstrass が後に微分可能性と連続性を持たない連続関数を構成した際に，こちらの定義の方が，従来の $f(x+h)-f(x)$ を h で割ったものの比の極限とする定義よりも使い勝手がよかったことを指摘している.[18] これが．この定義を採用したひとつの要素であろう．また，今日の微積分学の知識からすれば，多変数関数の微分を定義するとき，Weierstrass の定義が有用なのは，明らかであろう．Lagrange は無限小や極限の概念を払拭し，解析学を代数的に扱うために，べき級数展開による微分の定義を導入した．Weierstrass は，Lagrange と類似した定義を導入しているとはいえ，彼の目的はまったく別のところにあったのである.

Weierstrass が，この微分の定義を導入したときにはすでに，ε-δ 論法で書かれた連続関数の性質が，定積分を定義するうえで有用であることは示されていた．連続関数の定義も，微分の定義も，使いやすいのはε-δ の形式で書かれたもの，あるいはそれを伴うものである．そうであるとすれば，Weierstrass が微分積分学の体系を「無限小」にかえて,「無限小の変化」を基礎において書き換えたのは，自然であろう．Weierstrass 自身,「無限小」という言葉は使っている．無限小は曖昧なものだとか，それを排除して解析学を厳密に基礎づけたいとの意志表示は，少なくとも表だってはしていない．新しい定義を導入したことと，無限小は曖昧だから排除したということは，さしあたり関係がないように思われる．彼が微分積分学を論じるうえで必要なかったから無限小を使わなかったというのが，率直なところであろう.

6. おわりに

本報告では,「無限小や限りなく近づくといった曖昧な表現にかわる ε-δ 論法」の形成過程を２つの段階に分けて論じてきた．第１段階は，極限操作，すなわち「限りなく近づく」という概念を不等式で表現することで，おそらくは Lagrange がはじめ，Cauchy，Dirichlet, Riemann らが認識していたものである．ε-δ の形式をとれば，不等式による評価が与えられ，連続関数をめぐる諸性質を代数的に表現することができた．ただし，極限操作を ε-δ 形式で与えることと無限小を排除することは独立であった．Lagrange は無限小を用いていないが，Cauchy，Dirichlet, Riemann らは 無限小を導入しているし，連続関数の定義自体は，無限小を用いてなされている．Cauchy らの無限小は 18 世紀的な

ものとは異なるが,「限りなく小さくなる量」であるから,「限りなく」を曖昧だとする今日の立場からすれば，このような量を認めている彼らの時点で，厳密に基礎づけられた解析学が成立したとは言い難い．連続関数の定理・性質として ε-δ 形式の記述に達しながら，これを定理にとどめ，無限小の入った定義を依然として認めている Dirichlet, Riemann らの態度からは，今日の微分積分学とは大きく異なったものが見て取れる．

今日見るような ε-δ 論法は，Weierstrass が与えた．確かにそこでは，ε-δ 形式でなされた連続関数の定義から出発し，無限小を導入することなく，微分積分学が展開されている．ただし，Weierstrass は，微分積分学に厳密な基礎づけを与える目的で，そうしたのではなかった．当時の理論の発展に応じた，Cauchy とは異なる新たな微分の定義を導入することにより，無限小を導入しなくても，微分積分学を体系的に論じることができた．これが，今日の ε-δ 論法のもとになる Weierstrass の体系が生まれた経緯と推定される．すなわち，微分の概念をより一般的に与えるという具体的な課題が，その契機となったのである．

もちろん，新しい微分の概念の導入は，ひとつの可能性にすぎないが,「厳密な基礎を与える」という漠然とした目的ではなく，より具体的な課題を Weierstrass が持っていたことは，疑いなかろう．

今日，ε-δ 論法は解析学の厳密な基礎を与えるものとされている．したがって，この論法が完成される過程は，解析学の厳密化の運動と密接に関わってきたであろうことを想像するのは自然なことである．確かに，18-19 世紀の数学者たちは，解析学の理論をより厳密にするべく努力するなかから，ε-δ 論法を発展させてきた．ただし，それは，無限小という曖昧な量を追放し，解析学を厳密に基礎づけようという意味ではなかった．むしろ，ε-δ 形式がもたらす，不等式による評価といった様々な具体的な利点によって，しっかりした議論を構築しようという意図のほうが大きかった．このような経緯で生まれた ε-δ 論法が,「解析学の厳密な基礎づけを与える」と評価されるようになった経緯については，機会を改めて論じたい．

文献と注

1) A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, I^re^ partie :*

analyse algébrique, Paris, 1821 = Œuvres Series 2, vol 3, Paris, 1897.
2) 中根美知代, “新 Cauchy 伝説：Cauchy は ε-δ 論法を使ったのか”,『津田塾大学数学計算機科学研究所報』**20**, pp.1-15.
3) たとえば J. V. Grabiner, *The origin of Cauchy's Rigorous Calculus*, The MIT Press, 1981.
4) たとえば I. Grattan-Guinness, *The Fontana History of the Mathematical Sciences*,Fontana Press, 1997, U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, 1989, New York:Springer. (邦訳『解析学の歴史』, 好田順治訳, 1990, 現代数学社).
5) たとえば前出 (4), Bottazzini.
6) J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, 1797, Paris = Œuvres **9**, および *Leçons sur le calcul des fonctions*, new ed. Paris: Courcier 1806. = Œuvres **10**.
7) A.L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur la calcul infinitésimal*, vol 1, Paris, 1823= Oeuvres, Series 2, vol 4, pp. 5-261, Paris, 1899.
8) A.L. Cauchy,*Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829=Oeuvres, Series 2, vol 4, pp. 263-609, Paris, 1899.
9) A.L. Cauchy, “Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continutés d'une variable reélle ou imaginaire entre des limites données,” *Comptes rendus*, 36(1853), pp.454-459.
10) たとえば 前出 (3), Grabiner. 他にも, たとえば G. M. Fisher “Cauchy and the infinitely small,” *Historia Mathematica* 5, (1978), pp.313-331 にも同様な論考が見られる. 他の数学史家の見解もほぼ一致している.
11) ただし, Cauchy は ε で無限小を指している可能性がある. このことについては, 中根美知代「$\varepsilon-\delta$ 論法と無限小」,『科学基礎論研究』, 2001 年に出版予定, で論じた.
12) D.Laugwitz *Bernhard Riemann 1826-1866; Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, 1996, Birkhäuser, 邦訳『リーマン：人と業績』, 山本敦之訳, 1997 年.
13) P.G.L. Dirichlet, *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen*, (G.F. Mayer ed.,1858) Leipzig, 1871 年出版. *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Inte-*

gralen (L.Arendt ed., 1854), Braubschweig, 1904 年出版.
14) 前出 (12) , Laugwitz の指摘による. P.G.L. Dirichlet, 'Sur Convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données",J. Reine Angew. Math., vol 4, pp.157-169. ＝*Werke 1*, pp.238-306. を指している。
15) B. Riemann, "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse."＝*Werke* , pp.3-48. Anmerkungen として Riemann 全集に収録されている.
16) Riemann 全集 *Nachträge*, p.111.
17) P. Dugac, "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass", *Archives for History of Exact Sciences*, **10**, pp.41-176. なお, これに関連した Dugac の論文,「解析学の基礎」, Dieudonné 編『数学史 II』, 1985 年, pp.385-456 所収, "Problèmes d'histoire de l'analyse mathématique au XIX siecle. Cas de Weierstrass et Dedekind, *Historia Mathematica* 3, (1976), pp.5-19. も参考にした.
18) イタリア人数学者 Casorati は Kronecker と Weierstrass の議論の記録を残している. これによれば, 関数の連続性と微分可能可能性をどのように識別するかが, 1860 年代に問題になっていた. 64 年には関数 $\phi(x)$ が連続であるためには, いかなる関数 $f(k)$ に対して $\lim \dfrac{\phi(x+k)-\phi(x)}{f(k)}$ が有限確定値となるかが論じられている. E. Neuenschwander, "Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia", *Archives for History of Exact Sciences*, **19**, pp.1-89. Weierstrass の定義は, このような事情も反映していると察せられる.