Jakob Bernoulli の確率とその後

飛田　武幸
名城大学

0. Bernoulli 前後

確率論における J. Bernoulli の業績を考える前に、いくらか背景となる史実を見ておくことが必要かと思われるが、確率論に専念した古い数学者は見当たらず、パイオニア的な業績を残したすぐれた数学者達が、数学の中で確率も考えたという自然な動向が目につくばかりである。その立場で眺めたい。歴史について単なる anecdote は避けて考えたい。

まづ、G. Cardano（1501 - 1576）をあげることができる。サイコロを投げる事例を用いて頻度（確率）について詳しく論じ,極限定理にも及んでいる（著書 Liber de ludo aleae: games of chance)。また虚数の命名者であったり、代数学に詳しく（著書 Ars magna）彼の名を冠した三次方程式の解法でも知られている。史家は、物理学者と位置付ける程物理の仕事も多いようだ。

J. Bernoulli の少し後になるが P.-S. Laplace については数学の幾多の業績の中で、1812 年初版の不朽の名著「確率の解析的理論」が光っているが、周知のように、彼はその他の分野でもそれに勝るとも劣らない成果を残している。

C.F. Gauss や、今世紀初頭の H. Poincaré もこの例にもれない。確率論は数学の中で大きな位置を占め、他の分野と連動しながら発展して来たという正しい史実の認識は極めて重要である。 Bernoulli の仕事もこういった数学の発展の流れの中で見てみる必要があろう。

1. The Bernoulli

確率論の発展を考えるとき、どうしても振り返ってみなければならない数学者群として Bernoulli 一家がある。特に、Jacob Bernoulli についてである。Bernoulli 家は三代にわたり８－９人の数学者を輩出したスイスの Basel における名門であり、そのうち４人が確率論に貢献している。少し家系をたどってみよう。

Niklaus Bernoulli

Jakob I 1659-1705	Niklaus (Nikolaus)	Johann I 1667-1748		
	Niklaus I 1687-1759	Niklaus 1695-1726	Daniel 1700-1782	Johann II 1710-1790
			Johann 1744-1807	Jakob 1759-1789

この家系の中で確率・統計に貢献したのは、Jakob I, Johann I, Niklaus I, Daniel I で、その中で最も有名なのが Jakob　I である。確率・統計関係の学会の総元締めとも言うべき Bernoulli Society（本稿末の「註」参照）の Bernoulli はこの Jacob I の姓をとったものである。彼の経歴は輝かしいもので、その数学における成果と思想は今も語り継がれている。今回の報告は、現在に活きる彼の確率論に対する思想を辿ってみようとするものである。

彼についての通常に言うところの経歴は省略する。

2. Jakob Bernoulli の stochastics

Jakob は始め Leipnitz との交流のもとで等周問題を扱い変分の原理を論じている。確率の話で注目すべきは、彼の著書

Ars　Conjectandi

で、彼の没後１７１３年に刊行された（ラテン語、直訳すれば The practice of conjecturing か？）。Jakob の全集の第３巻 pp.107-259, にその全文が収められている．確率論の始めの書物として歴史的に重要な意味を持つものである。

「註」全集（Werke）はこれまで全５巻が刊行されている。

Ars Conjectandi というタイトルを確率論（Theory of Proability）と訳す向きもあるようだが、むしろ ”Ｓｔｏｃｈａｓｔｉｃ” とするのが好ましいようである。文字通り「予測」すなわち偶然現象の予測の理論を十分意識したものといえよう。

私が原語から解読したものではなくて、孫引きであるが、この本の各節のタイトルを列挙してみよう。

第１節は Huygens のゲームに関する理論、
第２節は組み合わせ論、ベルヌイ数など、
第３節はゲームの期待値に関する多くの例、
第４節は確率の考え方、事前・事後確率、（弱）大数の法則など、
最終節は paume のゲーム（テニスの一種）など　となっている。

ここに述べられたような確率論についての Jakob のアイデイアはその後の発展に大きな影響を与えた。A. de Moivre の Doctorine of Chance に引き継がれているという。弱法則であるにもせよ、大数の法則は確率論における極限定理の基礎であり、ここで提唱されているのは意義深い。それは、弱義のものであるとはいえ、極限定理を扱うことの意義や重要さを示した点は偉大なことと高く評価される。事前確率が論じられているも興味深い。

3. Jakob Bernoulli と解析学

修学時代には 天文学を修め、1682 年には彗星の理論を唱えた。さらに 1683 年の重力の理論は高く評価された。その後固体および流体の力学の研究にも進んだが、次第に数学の分野に深入りすることになった。

周知のように Jakob は解析学についても大きな貢献をしており、それは確率論の発展と無関係ではない。　交流のあった Leibniz などの影響で、無限小解析の理論の深い認識にいたる。

無限級数の和、積分論などについての成果をあげ、1690 年代には微積分による曲線の決定に興味をもった。極座標を使った曲線の研究もある。確率にも関係する有名な Bernoulli number も彼によるものである。(Euler は独立にこれを発見したと言われている。) これらの研究には弟の Johann の協力もあったようだ。

Jakob Bernoulli の数学についての研究は、体系作りというよりは、むしろ個々の問題に特別なアイデイアを出すことに中心があったと思われる。一方で分野にとらわれず研究を進めて行った自由な発想も羨ましく感じられるところである。

4. Millenial Symposium

今年の10月4日ー6日ドイツの Wuerzburg の郊外において Bernoulli Society 後援のもとで Jakob Bernoulli 記念の

Millenial Symposium

"Defining the Science Stochastics"

が開催された。Organizer は Wuerzburg 大学の Elart von Collani 教授であった。

この機会に J. Bernoulli のオリジナルな "Stochastic" に対する考えを見なおそうというのである。彼はランダム性と不確実性の世界に注目し、それは科学的解析の基になると言った。現在にも生きる考えであろう。このシンポジウムはまさに、温故知新のよい機会であった。会場も Wuerzburg から車で1時間程の郊外にある Bermoulli ゆかりの Zeilitzheim 古城が選ばれた.

顧みると、P. Lévy は 1948 年の著書 [8] の第2章で Bernoulli の立場からの確率過程の定義をとりあげていたのである。途中、多くの数学者により、また時代を経て Bernoulli の思想が継承されたのであろうか？ それとも20世紀半ばになって確率過程の意義が再認識されたのかわからない。この考えについては後述するが、結果からいえば、私達の進めているホワイトノイズ解析の立場、あるいは Innovation approach はその線上にあるものとして位置づけられる。

一方2000年の American Math. Soc. の Mathematics Subject Classification に 60H40 White Noise Theory として、新たにとりあげられた事などがあり Organizer の注目するところとなったのであろうか？、筆者もこのシンポジュウムで報告することとなった。要望されたタイトルは

" White Noise Theory and Physics"

で, 物理学への展開も述べることになった。

Proceedings は近く出版されるので、会議の内容については、ここでは述べないが、その折の私の話の参考資料に基づいた表を下に掲げる。直接あるいは間接に Bernoulli の思想と関係すると思われる歴史的事実を拾い出してみたものである。両者の時間的推移を比較するのは興味がある。

Table 1. **Probability Theory**

1903	Lebesgue integral was established; completely additive measure.
1905	A. Einstein, Brownian motion. Exact formulation of the physical phenomenon as a mathematical object.
1909	E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.
1910 -	Classical functional analysis. Hadamard, Volterra, Lévy, and others.
1919	P. Lévy, Les loi de probabilité dans les ensembles abstrait. 完全加法的な確率測度からヒルベルト空間上の解析まで。
1923	N. Wiener, Differential space. Wiener measure was introduced with some connection with functional analysis.
1933	S. Bernstein, Principle of the theory of stochastic differential equations. Steklov Inst. see Actualités sci. et ind. no.738, 1938.
1933	A.N. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wharscheinlichkeitsrechnung.
1948	P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars. 2nd ed. with complement 1965. 特に第２章.
1950	L. Schwartz, Théorie des distibutions. Hermann.
1951	P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthioer-Villars.
1955	I.M. Gel'fand, Generalized random processes (in Russian). Doklady Acad. Nauk, SSSR, 100, 853-856. Levy の立場から。
1956	P. Lévy, A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. Proc. 3rd Berkeley Symp. vol.2. 133-175. .
1961	I.M. Gel'fand and S.V. Fomin, Variational calculus (in Russian), Physico-Math. Lit. Moscow.
1962	M.D. Donsker and J.L. Lions, Fréchet-Volterra variational equations, boundary value problems, and function space integrals. Acta Math. vol. 108, 147-228.
1975	T. Hida, Analysis of Brownian functionals. Carleton Mathematical Lecture Notes no.13.
1992	L. Accardi, P. Gibilisco and I.V. Volovich, The Lévy Laplacian and the Yang-Mills equation. Volterra Center Publication, Univ. Roma 2, no.129.
1993	T. Hida, H.-H. kuo, J. Potthoff and L. Streit, White noise. An infinite dimensional calculus. Kluwer Academic Pub. Co.
2000	Mathematics Subject Classification : ６０Ｈ４０ White Npoise Theory

Table 2. **Quantum Mechanics.**

1900 Max Planck, Thermal radiation. Departure of quantum theory.

1915 Max Planck Eight lectures in Theoretical Physics at Columbia University.

1925-1928 W. Pauli proposed the exclusion principle,
W. Heisenberg discovered the matrix mechanics,
E. Schroedinger invented the wave mechanics.

1928 H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik.

1930 P.A.M. Dirac, The principles of quantum mechanics. standard textbook. 現在に活きている。

1933 P.A.M. Dirac, The Lagrangian inquantum mechanics. 量子場の Path integral formulation を示唆している。

1946 S. Tomonaga, On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields, Progress of Theoretical Physics vol.1. 教えられる所が多い。

1948 R.P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Reviews of Modern Physics, vol.20

1949 J. Schwinger, Quantum electrodynamics III. The electromagnetic properties of the electron-radiative corrections to scattering. Physical review, vol.76.790-817.

1954 C.N. Yang and I. Mills, Physical Review vol.96.
参考： K. Moriyasu, An elementary primer for gauge theory. World Sci. Pub. 1983.

1956 I.M. Gel'fand and A.M. Yaglom, Integration in function space and its application in quantum physics. (in Russian) Y.M.N. vol.11, 77-114.

1961 J. Schwinger, Brownian motion of a quantum oscillator. J. of Mathematical Physics. vol.2, 407-432.

1970 Y. Nambu, Lectures at Copenhagen Summer Syposium. Superstring theory. Its development in 1970's and even after by many physicists, S. Mandelstam et al.

1977 T. Hida and L. Streit, On quantum theory in terms of white noise. Nagoya Math. J. vol.68, 21-34.

1981 A.P. Polyakov, Quantum geometry of Bosonic strings. Physics Letters. vol. 103B, no.3, 207-210.

1981 T. Hida and L. Streit, Generalized Brownian functionals. Proc. Berlin Conference on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Proposed a new formulation of Feynman path integral. 詳細は[10]参照。

5. 確率過程に関する P. Lévy の考え方について。

彼は 1948 年の著書 [8] 特にその第２章で解説的な記述をしている。すなわち、確率過程とは時刻 t に依存する確率関数で**毎時刻に新たな（過去と独立な）偶然が関与する**ものとしている。Bernstein の仕事などを経て Bernoulli の Conjectandi（予測）の思想が流れてきているように思える。このような考え方が無ければガウス過程の表現のような問題は起こらなかったであろう。Wiener measure を分布に持つ確率過程はどれもブラウン運動であるが、それが決める事象の全体には、いろいろな選択があり、比較して真に狭いものがいくらでもあることは驚きである。この例からでも、各時刻に現れる過去と独立な偶然量を決めることの意義が理解されよう。

当然、Lévy は確率過程の分布としてとらえるべき関数空間上の確率測度を、確率過程そのものとして認識する立場はとらない。 しかし compatibility を充たす同時分布の族を与える E. Slutsky の立場には理解を示しながら、t についての連続性に注意して interporation の方法による確率過程の構成法も論じている。それは、確率過程の存在を示すのによく用いられる方法である。

また、マルコフ過程の定義には、Huyghens の原理との類似を注意しているが、これも Bernoulli の思想に通じている。さらに 解析的定義として推移確率を用いる方法も示しているが、加法過程の定義も視野にいれながら、**確率微分方程式** を導入している。その立場は dX(t) に対するものではなくて、微小な時間区間における変分 $\delta X(t)$ に対するものである。マルコフ性を持たない、未来の分布が現在のみならず過去にも依存する場合は hereditaire であるという。特にマルコフ過程の一般化とみなされるときは、それを規定する 変分方程式は **確率積分微分方程式** となる。

この考えからマルコフ性を一般化するための具現化として二つのことがあげられる。
1）離散パラメータの stochastic chain について、未来の分布が直前の p 個の時点での値に依存するものを p 重マルコフとして、時間間隔を細かくして、連続パラメータの場合の定義としようとしているが、直接には成功せず、別な方向への展開になったようである。すなわち 1953 の California publication [8] で stochastic infinitesimal equation として

$$X(t) = \Phi(X(s), s \leq t, Y(t), t, dt)$$

を提唱している。ここで {Y(t)} が **innovation** で時刻 t で現れる偶然量を記述している。

これは極めて示唆に富むもので、実はこれが **ホワイトノイズ解析の立場** である。
innovation がホワイトノイズになるときが重要で、idealized elemental random variables の系といえる。それを基にする解析はスマートとは言い難いが、より profound である。

2）ガウス過程に限って、多重マルコフ性を論文 [6] で提唱した。従属性のあり方を規定する（多重）マルコフ性という観点からは、受け入れられる定義だと思っている。
この考えはある種の non-Gaussian の場合にも適用できることがわかった。

Lévy はさらに、Bernoulli の立場と称して、確率微分方程式の解法の精神を述べている。

［文献］

［1］ L. Accardi, T. Hida and Win Win Htay, Fock Boson-representation of stochastic processes (in Russian). Math. Notes. 67, no.1, 2000, 3-14.

［2］ S. Bernstein, Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques. Trud. Steklov Inst. Phys. Math. 5 (1933), 95-124.
講義録的なものとしては次の文献がある。
S. Bernstein, Équations différentielles stochastiques. Actualites Scien. et Ind. 723, Hermann, 1938.

［3］ D.M. Chung, U.C. Ji and K. Saito, Cauchy problems associated with the Lévy Laplacian in white noise analysis. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. vol.2. 131-153.

［4］ R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill, 1965.

［5］ I.M. Gel'fand and N.Ya. Vilenkin, Generalized functions (in Russian), vol.4. 1961. English translation 1964, Academic Press.

［6］ T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications. Mem. Univ. Kyoto. 1960, 109-155.

［7］ T. Hida, Brownian motion. Springer-Verlag. 1980. 日本語原本 岩波書店 1975.

［8］ P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1848. 増補 第2版 1965. および 1953 年の Univ. California Berkeley での次の講義録がある。
P. Lévy, Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions.

［9］ N. Obata, White noise calculus and Fock space. Springer Lec. Notes in Math. no.1577, 1994

［10］ L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian functionals and the Feynman integral. Stochastic Processes and their Applications vol.16, 1983, 55-69.

［11］ Si Si, Topics on random fields. Quantum Information. eds. Hida-Saito, 1999. 179-194.

［12］ V. Volterra, Opere Matematiche, vol.5, 1926-1940. in particular, see the paper (1937) proposing the Lotka-Volterra equation.

［13］ T. Hida, Innovation approach to random complex phenomena. Publication Univ. Roma 2. 2000.

「参考」**Bernoulli Society**　(BS) について。

The Bernoulli Society for mathematical Statistics and Probability

は確率と統計の両分野における国際的な最も重要な学会である。この方面で格別な功績のあった Jakob Bernoulli の名を頂いて命名された。

その目的は、国際的な交流と協力によって、廣い意味での確率と統計とを発展させることにある。したがって、理論的な研究と応用、およびその知識を広めることや教育法の発展も目指している。最近は

研究報告の雑誌 "Bernoulli" も刊行している。

自由参加の個人会員のみからなり、ISI (国際統計学会) の傘下にある。Bernoulli Society が今日の制度になったのは１９７５年からであり、これは１９６３年に創設された

International Association for Statistics in the Physical Sciences (IASPS)

を受け継ぐものである。

Bernoulli Society の具体的な活動の一つ (最も活発なもの！) として

Conference on Stochastic Processes and their Applications (SPA)

があり、１９８５年には名古屋で開催した (第１５回)。アジア地区の若手を多数招くことができて、国外から１００名を超え、３３０余名の参加による盛会となった。

なお、親学会の**第５３回 ISI** (International Statistical Institute) は 2001 年 8 月 22-29, Seoul で開催されることになった。

今後、わが国の研究者のＢＳへの積極的な参加と協力が切望される。

おわり