一つの確率論史

飛田　武幸

§0．はじめに。

まづ、俗説を捨てることから始めなければならない。

歴史を語るにあたって、確かめられることのみを信じ、自己の立場と視点を明らかにして述べることが大切だと思う。それは、多分偏ったものになろうが、内容が普遍的であり、かつ古今に通ずるような歴史の記述が困難である以上は、それもやむを得まい。

確率論の始点をどこに置くかも随意でよかろう。17 世紀の B. Pascal と P. de Fermat の論争が始めだという人もあるが、それには議論もあろう。それなら 15 世紀の Galileo Galilei の論説もあるとか、16 世紀の G. Cardano の扱った偶然によるゲームも確率の起源として取り上げてもよいであろう。また拡散現象に興味が深ければ紀元前のルクレチウスに遡ってもよかろう。また現代的な公理的設定に重点を置くならば Kolmogorov の著書「確率論の基礎概念」から始めてもよい。ここでは、そのような議論も凍結して勝手に考えたい。気持ちとしては、学問として独り立ちをしたというのをどのように理解するができまることであり、詮索は凍結しようということである。

あえて私の立場を言うならば、このレポートでは、Feller の言うように、確率論を解析学とつながった純粋数学の一分野にしようとする観点に立って、確率論の古き歴史を訪ね、将来の発展の方向を模索しながら、その流れの一つの側面を歴史として述べてみたいのである。

伊藤清教授が 1944 年の著書の序文で”確率とはルベーグ測度である”と喝破している。その意気込みが現代確率論を隆盛に導いた原動力となったのではなかろうか。

そのように見た確率論発展の歴史は、あるいは独善的な見方だというお叱りを受けるかもしれない。しかし、それは承知の上である。

今回は **Reductionism** の立場から近代確率論の歴史を概観する試みをしたい。 それは **Atomism** から来るといってもよい。確率論の対象は元来偶然現象（抽象的なものも含めて）の数学的モデルの取り扱いである。複雑な現象を、最も素（elemental）なものの関数として表し、素なものの確率論的な性質と、現象を表す関数の解析的性質とを合わせて、もとの複雑な偶然現象を説明しようというのである。Lévy や Wiener の仕事の中にそれを見出すことができる。

§1。年表。

本稿の趣旨から確率論の基礎について、注目すべき史実を取り上げて，それらを年代順に並べてみよう。

1809	C.F. Gauss	「天体の運動論」
1812	P.S. Laplace	「確率の解析的理論」
1814	P.S. Laplace	「確率の哲学的試論」
1821	C.F. Gauss	「誤差論」
1827	R. Brown	ブラウン運動の発見
1899	H. Poincaré	Réflexions sur le calcul des probabilités.
1900	M.L. Bachelier	Théorie de la spéculation.
1902	H. Lebesgue *	学位論文「積分、長さ、および面積」
1905	A. Einstein	ブラウン運動
1907	H. Poincaré	Le hasard, c.f. 1903 「科学と仮説」
1907	E. Borel	Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.
1912	H. Poincaré	Calcul des probabilités (2ème ed.)
1919,1924	P. Lévy	Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits.
1922	P. Lévy *	Leçons d'analyse fonctionnelle. 1951 増補改訂
1922	J. Hadamard,	Les axiomes du calcul des probabilités.
1023	N. Wiener	Differential space

1924	E. Borel	A propos d'un traité de probabilités
1925	P. Lévy	Calcul des probabilités.
1931	A.N. Kolmogorov	Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
1933	A.N. Kolmogorov	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnumg.
1937	P. Lévy	Théorie de l'additions des variables aléatoires.
1938	S. Bernstein	Équations différentielles stochastiques. Actualités, no.738.
1940	R. von Mises	On the foundations of probability and statistics.
1944	K. Itô	「確率論の基礎」
1948	Bertrand Russell*	Human Knowledge. Its scope and limits. Part V
1948	P. Lévy	Processus stochastiques et mouvement brownien.
1950	W. Feller	An introduction to probability theory and its applicationms. vol.1. 3rd ed. 1968.
1953	J.L. Doob	Stochastic processes.
1953	K. Itô	「確率論」

* 印は解析的内容その他であるが、深く確率論につながるとみられるもの。ここで、特に Lebesgue 積分が出た直後と確率の完全加法性が定式化された頃との一致に注意したい。

§ 2. 各論

２．１．１９世紀から始めよう。

P. S. Laplace（1749 - 1827）

何といっても、Laplace のこの著書を最初にあげたい。　系統的に確率論を解析的手法で論じた最初のものと言えよう。

” Théorie analytiques des probabilités” .　（邦訳：伊藤、樋口）

初版は 1812 年であるが版を重ねている。

Livre I,　母関数の理論、　算法

Livre II,　確率の一般理論および応用

C. F. Gauss
”天体の運動論”や”誤差論”など具体的な対象の中に確率の理論を発見している。最小２乗法の理論を構築する際に、統計学的な立場からガウス分布の特徴づけをしたりして、確率論の特色ある，しかも望ましい発展を実現している。 一様分布さえ解析的な特徴づけがされているのも興味がある。
「註」Göttingen にあるガウスの天文台を訪問した際、台長の Vogt 博士の案内でそこに残っている膨大な手書きの計算の記録を見せて頂いた。そこから生まれた最小二乗法であり、確率統計の理論であることに深い感銘を受けた。またそこで、電磁石による 2-state coding の装置を見て情報理論の「さきがけ」を垣間見たような気がした。

２．２．２０世紀前半は確率論にとって本格的な胎動の時期であった。

A. Einstein （1879 - 1955）
ブラウン運動を最初に数学（確率論）の対象にしたという意味できわめて意義深い。水中の一点から出発して散らばっていく粒子の t 時間後の密度 $u(t,x)$ が次の拡散方程式をみたすことを理論的に示した。

$$\partial u/\partial t = D\,\partial^2 u/\partial x^2, \qquad D = (RT/N)(1/6\pi kP), \qquad P:\text{半径}$$

H. Poincaré （1854 - 1912）
確率論に対するエッセイが多い。具体的な問題から出た課題と哲学的な思考の両面にわたり確率を論じている。

E. Borel
極限定理を強調している。

P. Lévy（1886 - 1971）
東西を通じて現代確率論に最大の貢献をした数学者といってよかろう。その経歴から、関数解析が大きな支えとなっていると考えられる。

École Polytechnique で Poincaré の影響をうけて Gauss の誤差法則に興味を持ったが、そこで講義を始めたのは 1919 年（1920 ?）からであった。すでに Lebesgue の積分論が知られており、確率の完全加法性が受け入れられていた頃である。彼の確率論に関する最初の著書は
"Calcul des probabilités" 1925.
で、自伝（28 節）や L. Schwartz の言葉にあるように、まさに retrouver した内容といえる。特に興味深いのはその巻末の［Note］
"Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits"
全 21 ページであって、それは 1919 年と 1924 年の論説の再生である。そこでは抽象空間の濃度や位相などを述べた後に、Lebesgue 測度としての確率を導入している。当時の学会の風潮を反映しているのではなかろうか。
1922 年の著書 "Leçons d'analyse fonctionnelle" を引用して、ヒルベルト空間の一様な測度（実は空間を拡張して）の導入からガウス測度が自然に出てくることを示し、$L^2[0,1]$ 上の解析を提唱している。今日の確率解析、特にホワイトノイズの立場から　みて先見の明を感じさせるものがある。
本文におけるガウス法則,誤差法則、確率法則の算術、特性関数、大数の法則, Maxwell 法則、不可逆性など、いづれも pioneer 的なものである。

続いて、1937 年の書物では,加法過程の Lévy-Itô 分解は周知のとうりである。第 6 章には短い記述ながら”innovation”（現在の我々の用語で）の問題を提起していることに注意したい。
ここで冒頭に述べた reductionism を思い出したい。基本的なもの（innovation）を選び、 それを基本にして確率過程を明らかにして行きたいとする姿勢が明らかに見られる（離散時間の場合であるが)。その上で次ぎに述べる 1948 年の書物の始めの部分を見れば、それが良く理解される。
なお、ブラウン運動の見本関数の連続性など、確率過程の基本的な性質の解明がつずけられている。

確率論三部作の最後は 1948 年の「確率過程とブラウン運動」の本である。確率過程の構成、マルコフ過程や加法過程の構造、ブラウン運動の詳しい研究、多次元パラメータを持つブラウン運動（これは、私が 1968 年

に逢った折、確率変分と共に Lévy が重要だと強調したところである）等である。始めの章の確率過程の定義や構成などでも、易しいと考えずに、注意深くフォローしたいところである。そこに著者の思想を読み取ることができる。

また 1965 年には多くのページの補足（ガウス過程の表現の理論を含む）をつけて再版された。

ここで、また Lévy の関数解析のことに触れたい。
1922 年の書物は 1951 年に改訂版が出されたが特に汎関数解析の部分は大きく発展した。その部分はより確率解析に近いものと理解される。又、真に無限次元的なもの、さらに変分解析の理論の展開など、現在に活かされる内容が多く、極めて示唆に富む内容である。

ところで、Lévy にとっては Hadamard equation の一般化の理論体系の構築は一つの念願であったのではないだろうか。

N. Wiener（1894 - 1965）

よく知られた 1923 年の論文
"Differential spacee"
では、始めに Lévy の関数解析に影響を受けたと記している。碩学達の着眼点の一致というべきであろうか？
" Cybernetics（1948）"
" Stationary time series",
" Nonlinear problems in random theory（1958）"
など 、いづれも確率論の内容を豊にし、将来の方向を提唱している。
さらに　物理学、生物学、工学と多方面にわたる分野との交流の道を広げた功績は大きい。
1958 年の著書では coding や decoding の問題を通じて、始めの節で述べた reductionism の思想を推察することができる。

A.N. Kolmogoroff （1903 - 1987）
1931 年の論文「確率論における解析的方法」は以後の確率論研究に極めて大きな影響を与えた。拡散過程の研究ということと、解析的なマルコフ過程の扱いはまさに王道を行くものであった。

確率論の力学系（flow の理論など）への展開、情報理論への発展など pioneer 的な業績は称える言葉を知らないほどである。それらについては別な機会に譲りたい。

S. Bernstein（1938）の、確率過程そのものの確率微分方程式による扱い（$\sqrt{dt}$ が出る、Lévy と同様）も対比して位置づけられてよかろう。この理論はその後、大きく発展した内容である。

その他、力学系、情報理論をはじめ自然科学の他の分野との融合をはかる等確率論のみならず科学の進歩に与えた貢献は極めて大きい。

K. Itô
1944 年の「確率論の基礎」の序文には前述のように、
”確率トハるべーぐ測度デアル”
と記されている。この言葉ほど強い影響を与えた言葉はないであろう。

その後の同教授の業績は確率論全般に亘っており、ここで述べるには余りにも偉大であるのみならず現在も発展しつつあるところで、歴史として論ずるには早過ぎる。

W. Feller （1906 - 1971）
解析的方法による確率論の発展に貢献した功績は極めて大きい。その思想は 1950 年の著書の序文によく表現されている。

個人的な情報であるが、早くから（少なくとも 1965 年頃から）確率論の分子生物学への応用、あるいは遺伝学など生物学からの数学への問題提起に努力していた先駆者の一人である。

J.L. Doob
1953 年の著書で測度論に立脚した確率論の厳密な基礎づけを行い、さらに彼の創始したマルチンゲールの理論を展開した。その認識は次第に深まっているようであり、影響するところは大きい。
elementary Gaussian process の仕事も評価したい。

「補足　1.」　" innovation"　について。Lévy　や Wiener の仕事に現れる。random な複雑系を、時間に依存させながら「確率素子」によって表すこと(reductionism, atomism といってもよい）の基礎を与えるものである。

「補足　2.」　確率論の諸科学における重要性が認識されてきた故が、最近確率論についての歴史を研究すようとする国際学会が盛んである。
たとえば
1. Würzzburg (germany)　October 4 - 6, 2000.　Jacob Bernoulli の業績を評価して、確率論の歴史の研究。
2. Vaxjo (Sweden)　November 27 - December 1.　Foundation of Probability and Physics
確率論史も含む由。
Proceedings を期待したい

終わり