ケイリーとデデキント――1850年代の群概念

赤堀　庸子

1．序

多くの現代代数学教科書においては、ガロアが群概念を創始したということになっている。しかし、これは必ずしも正しいとはいえない。ガロアは「群」という用語を提出したものの、実際は方程式論の範疇の中で思考していた。つまりガロアが定義したといわれる「群」は、方程式論における道具としての役割がまだ強かった。そのうえまだ「置換」という具体的な対象にとらわれていた。

具体的な対象に束縛されない、解釈フリーな抽象群論が出てきたのは、1850年代のケイリー(Arthur Cayley, 1821-1895)とデデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916 ）によってである。本論では、1850年代のケイリーとデデキントを、商群概念への態度という立場から比較する。

ケイリーは論文「記号方程式$\theta^n=1$によって決まる群の理論について」（1854）[(1)]において一般の記号から成る群を定義した。デデキントは1850年代にゲッティンゲン大学で代数学講義を行い、この中で、置換論の範疇内にあるとはいえ、公理だけから規定される群の定義を初めて行った。[(2)]両者とも初めて抽象群の定義を行ったとして、既に二次資料では高い評価を得ている。[(3)]

両者の仕事を商群の立場からみてみると、面白いことが分かる。まず、ケイリーは驚くべきことに商群概念を拒否している。一方、デデキントにおいては、商群概念への理解と、群の定義の公理的な把握が、同時に行われていくのがみてとれる。ケイリーの態度の謎を追求し、そこで得たことをデデキントの思想の理解にも役立てて、この時代の群概念の分析の仕方を模索するのが本論の試みである。

さて、分析に際して「商群概念が把握されている」ということの判断基準を述べておくべきだろうか。普通は次のように考えるであろう。まず商群の元であるところの剰余類が、把握されているかどうかをみる。そして、それらの間に演算が定義されているという状況が把握されているかどうかみる。そして、それらを正当化する議論がきちんと行われているかどうかをみる。

しかし、本論では、必ずしもこのような固定的な判断基準は採用しない。な

ぜなら、商群概念を独立したものとして分析することは不可能だからだ。商群概念の理解は、そもそも群概念をどう捉えているか、もっと根本的に代数学を（数学を）どのような学問と思っているかということに深く関わっている。まずは彼らの書いたものを記号法に至るまでそのまま追い、そして背後にある思想を探っていくという方法を試みてみることにする。

ここで一つ注意しておきたいことがある。商群概念の歴史を追うという考え方は、ニコルソンの論文「商群概念の発達と理解」に啓発されたものである。このことを強く強調しておきたい。しかし、残念ながら、本論文の扱う範囲内においては、ニコルソンの見解にはあまり賛成できないであろう。[4]

２．ケイリー

ガロア(Evaliste Galois, 1811-1832)の遺稿は 1846 年に出版された[5]が、その読まれ方についてはしばらく模索の時期が続いた。一方、1844 年に出版されたコーシー(Augstin-Louis Cauchy, 1789-1857)の置換論[6]は、広く読まれていた。イギリスではたとえばブール(George Boole, 1815-1864)の「思考の法則」[7]に代表されるように、抽象的な代数学の探求がなされていた。これら大陸での研究、イギリス記号代数学派の影響、そして自らの研究（不変式論や行列、代数幾何）を下地にして、ケイリーは 1854 年に論文「記号方程式 $\theta^n=1$ によって決まる群の理論について」を発表した。[8]ここにおいて一般の記号から成る群が初めて定義された。

まず「操作」を記号で表わし、その「合成」を考える、という形で積演算が定義される。(「操作」が群の元に当たる）そして、基本演算法則（結合法則は成り立つが可換法則が成り立たないなど）に言及される。次に、積で閉じた集合が群であるという定義があげられる。(ガロアの名が言及されている）そして、群に群の元をかけても同じ群が再生されるだけということが述べられたのち、いわゆる群表があげられる。そして、生成元と関係式によって群が決定されるという考え方のもと、位数の小さい（位数が４，６の場合の）群の分類が行われている。ケイリーは群論が二次形式や楕円関数への応用されるということを述べている。記号代数の研究が多くの分野への応用を持つということに対して自覚的である様子が窺える。

この論文は、発表当時はあまり影響力を持たなかった。だが、先見的な仕事であるので、標準的な代数学史において高く評価されている。[9]

この論文が新しい思考法を開拓したものであるのは確かだろう。しかしながら、ケイリーの思考法には、意外な一面があるのである。すなわち商群概念に相当するものを拒否しているのである。

2．1．意外な事実——1893 年論文

ケイリーは 1893 年に「群論において、商Ｇ／Ｈと呼ばれているものに関する注意」(10)という論文を発表する。この論文の冒頭において、ケイリーはまず、ヘルダー(Otto Ludwig Hölder, 1859-1937)の論文「任意の代数方程式を方程式の連鎖に還元することについて」(1889) (11)における商群というものは確かに重要な概念であるが、その意味が十分明快に説明されていないとし、より適切な方法を採用したいと主張する。

より適切な方法とは積表示を使うという意味である。たとえばG/Γの代わりに$\Gamma\cdot QG_1$または$QG_1\cdot\Gamma$と記そう、ということであり、以下この解説がなされているが、正直にいってあまり見通しのよいものではない。ここでは次の問いを追求してみよう。ヘルダーの論文はケイリーが主張するように分かりにくいものなのだろうか。

ヘルダーの論文を一瞥してみよう。群論を扱った前半部の第４節と第５節において、商群に関する説明がなされている。

まず第４節。B，B_1，B_2，……を部分群Hの元としたとき、全体の群Gは、次の図式に書ける、と説明される。

$$\begin{array}{cccc} B & B_1 & B_2 & \cdots\cdots \\ S_1\ B & S_1\ B_1 & S_1\ B_2 & \cdots\cdots \\ S_2\ B & S_2\ B_1 & S_2\ B_2 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S_{n-1}\ B & S_{n-1}\ B_1 & S_{n-1}\ B_2 & \cdots\cdots \end{array}$$

（ここで、最上の（横）列を（部分群）H，２番目の列をS_1H，…とみるとわかりやすい。これは剰余類分解の図式化と思ってよいだろう。）上のような図式において、Hが優部分群（正規部分群）ならば、２つの横列から任意にとった二つの元の合成（積のこと）が、決まった列の元を与える。つまり、

$$\begin{aligned} S_\nu B_\rho S_\mu B_\sigma &= S_\nu S_\mu B_{\rho'} B_\sigma \\ &= S_\chi B_\tau B_{\rho'} B_\sigma \end{aligned}$$

こうして列どうしの合成（積）が得られ、新しい元とそれら（新しい元たち）のなす群が得られる。これを群の商（Quotient）とよび、G／Hと表そう、とヘルダーは述べる。

第５節においても商群の解説が続く。ここで、２つの元が同値であるとは、正規部分群Hの元をかけて互いに移り合うことである、という定義が導入される。同値な元たちを同じ類に入れ、同値でない元たちを違う類に入れることによって、Gは類に分かれ、この類たちの集まりが群の性質をもつ、とヘルダーは述べる。

ヘルダーの記述は我々には明快そのものに見える。商群の元すなわち剰余類の意味、それらの間に演算を施すことの意味、そしてそれらの正当性が明快にとらえられているといってよい。

新しい思考法を開拓するだけの才能のあったケイリーがこれを拒否したのは、我々にとって謎にほかならない。ケイリーは晩年になって思想を変えたのだろうか。実は、1854 年当時からケイリーの思想はあまり変わっていないことがわかるのである。

２．２．1854 年の思想再考

２．２．１．第二論文

「記号方程式$\theta^n=1$によって決まる群の理論について。第２部」(12)において、（これは初めにあげた論文の続編にあたる。以下初めにあげた論文を第一論文、この論文を第二論文と称することにする。）ケイリーは、剰余類分解に相当する事柄を述べている。逐語的に追っていってみよう。

まず、記号の集まり$L, M, N, \dots\dots$が、$L^{-1}L, L^{-1}M, L^{-1}N, \dots\dots$が群$(1, \alpha, \beta, \dots\dots)$であるという性質をもつときに、$L, M, N, \dots\dots$をホルダーと定義する。$L^{-1}$の代わりに、$M^{-1}$をかけても、同じ群が得られる。なぜなら、たとえば$M^{-1}N=(L\alpha)^{-1}L\beta=\alpha^{-1}L^{-1}L\beta=\alpha^{-1}\beta$となり、$M^{-1}L, M^{-1}M, M^{-1}N, \dots\dots$も同じ群$(1, \alpha, \beta, \dots\dots)$となるからである。（$L, M, N, \dots\dots$などは、群の元であることに注意）

さて、$LL^{-1}, LM^{-1}, LN^{-1}, \dots\dots$ (＊) もまた、群をなすことが分かる。なぜなら、$M=L\alpha, N=L\beta, \dots\dots$を代入すれば、(＊) は$LL^{-1}, L\alpha L^{-1}, L\beta L^{-1}, \dots\dots$となり、これが積で閉じていることはすぐわかるからである。この群は、先程の群と同じものになるとは限らない。同じものになるとき、こ

れをシンメトリカルホルダーと定義する。

（現代数学の表現を使うならば、（Hを部分群、ａをGの元として）ホルダーとはａHの元たちのことであり、シンメトリカルホルダーとは、Hが正規部分群の場合のａHの元たちのことをさしている。）

実例として、群　1，α，α^2，γ，$\gamma\alpha$，$\gamma\alpha^2$ があがっている。$\alpha\gamma=\gamma\alpha$が成り立っている場合（位数６の巡回群となる）は、シンメトリカルホルダーは二つだが、$\alpha\gamma=\gamma\alpha^2$が成り立っている場合（３次対称群となる）は、シンメトリカルホルダーは一つしかないということが述べられる。

ここでケイリーの記述を評価してみよう。ここに剰余類分解に相当する記述があることは確かである。剰余類が代表元の取り方によらないということも指摘されているし、正規部分群による剰余類分解に対してシンメトリカルホルダーと命名した点も、商群概念についての把握につながるものと解釈できるかもしれない。

しかし、我々の目からみるとケイリーの記述は分かりにくい。その原因は、記号法ないし記述の方法にあるといえる。ケイリーは、ａHの元たちを記述の出発点においている。一方我々はHを一括してとらえて記述の出発点とする。ケイリーは集合論的理解に弱いのではないだろうか。こうした点からみると、ケイリーの剰余類分解に対する把握の程度はいささか低いといわざるをえないのではないか。

理論の記述の分かりにくさに反して、実例の記述に対しては、我々は親近感を感じることが出来る。具体的に群の元を記述していくという研究においては、ケイリーの記述法で十分うまくいくことが分かる。ここから推測すると、ケイリーの思考法は、実際の研究に適したものであるのだ。

２．２．２．コーシーとの比較

さらに次の事実がある。ケイリーは 1844 年のコーシーの置換論の論文を参照している。そこに先程のヘルダーの論文にあったものと同じ剰余類分解の図式がのっている。（ヘルダーの方が添字の利用を効果的に行っているが。）コーシーはこの図式を用いつつ、「共役置換の集まり」（現在の群概念に相当するもの）の「位数」（現在と同じ意味）は、すべての置換の個数（ｎ！）の約数である、という定理を証明した。コーシーの証明は、横列の元たちは互いに異なっている（共通な元を全く持たないかすべて一致するかのどちらか）ということに基づいたものである。[(13)]

コーシーの記述は、置換論の範囲にとどまっているので、議論の一般性という点でケイリーより不十分にみえるかもしれない。しかし、横列の元たちを一括してとらえようという姿勢は明快であるといえる。元の集まりに対して一括した記号を当てはめてはいないものの、集合論的理解はケイリーよりあるといってよいのではないか。[14]

そして、ここで明らかになるのは、ケイリーがコーシーの議論をふまえていないということである。コーシーの図式をふまえていたならば、わざわざ自分でホルダーなどというものを定義する必要はない。ケイリーはここで無意識のうちにコーシーの議論を拒否しているといえる。

実はヘルダーの図式がコーシーのそれと同じなのは全く当然のことなのである。ヘルダーはコーシーの論文に依拠して（名も挙げて）上記の記述を行っているからだ。これをケイリーの側からみると、1850年代と1890年代の両方で、コーシーの剰余類分解の記述を受け容れていないことになる。

ケイリーは一般に理論的取り扱いに弱かったということは、すでに指摘されていることである。ここで明らかになったのは、集合論的理解に弱いという点であろう。ケイリーの思考法を確認するためもういちど第一論文をみておこう。

２．２．３．第一論文

第一論文を注意深く読むと、新たな発見をすることができる。ケイリーは、群全体をＧと表わすといったような、群を一括して捉える記号を使っていない。さきほど我々は、剰余類分解の記述において、ケイリーが部分群を一括して捉えていないのをみたが、それは第一論文でも同じである。

さらに気づくのは、基本的な演算法則について述べてはいるが、それらは基本性質として述べられているのであって、成り立つことが要請されているのではない、ということである。結合律について述べられているのも、たとえば行列が、可換法則を満たさないということの関連で述べられているといってよいだろう。つまり、ケイリーの定義した群は、演算だけに規定される意味を持たない集合、という現代代数学の出発点とは、似ているようで本質的に異なる部分があるといってよい。

ケイリーは確かに新しい分野を切り開いたが、それは現代代数学の先取りをしたという点で意義深いのではないといえよう。ケイリーの記号代数学の意義は、様々な分野に応用可能であることに自覚的であった点であろう。

２．３．結論

ケイリーは確かに一般の記号から成る群を定義し、この新しい概念によって新分野の可能性を切り開いた。しかし、この概念は我々の商群概念をカヴァー出来なかった。ケイリーの定義した群は、法則だけから規定される意味のない集合という現代の抽象群とは異なっていた。理論的な取り扱いに弱いのはケイリーの一般的傾向であったが、ここでは特に集合論的思考に弱いことが明らかになったといえる。

ここでひとつ注意をしなければならない。ニコルソンの論文「商群概念の歴史」におけるケイリーの 1893 論文の扱いについてである。ケイリーの論文はヘルダーが商群概念の決定的な確立者であることを証明するためにあげられているのみであり、ケイリーが商群概念を拒否しているということに関しては何もコメントがされていないのである。なぜだろうか。(15)

おそらくこれは、ケイリーの理論に対する弱さ（もっと一般にイギリス代数学派のアルゴリズミックな性格、証明の欠如）という限界が既に良く知られているからではないかと思われる。ケイリーの負の評価自体が、数学史的には大して新しいことではないと判断されたのだろう。

本論考ではしかしこのつまらない論文にあえてこだわった。ヘルダー、コーシーと見比べてみて、ケイリーの論考に我々は確かに違和感を感じる。この違和感に対する適当な説明が見つかるならば、そちらのほうが歴史分析に適ったものとなるのではないだろうか。

３．デデキント

1850 年代に抽象群について言及したもう一人の人物は、デデキントである。彼はゲッティンゲン大学で 1856-57 年と 1857-58 年の冬学期に代数学講義を行った。(16)講義は全部で４節構成になっている。第１節が置換論の基礎、第２節がラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736-1813 ）の理論、第３節と第４節がガロアの論文に関するものとなっている。群論に相当する第１節において、群の公理と商群概念に相当するもののの承認がある。実はここの記述はかなり現代数学の様式と似たものになっている。群概念と商群概念に相当する記述は次の通りである。

出発点で、「置換」と「置換の積」の定義がなされる。次に二つの定理――

一つ目は結合律、二つ目は簡約律（右左）――が証明される。定理が証明されたあと、次のような主張――ある領域が演算で閉じており、しかも二つの法則を満たす場合には、現実の置換に限らないものにも置換論の結果を応用できるという主張――が述べられる。この部分は群の公理に相当するものが述べられている箇所といってよいだろう。（第１、２項）

商群概念に相当するものの記述は、第６項にある。まず、本来的約子（正規部分群）の定義がなされ、群Ｇを本来的約子Ｋで類別した剰余類同志K_p，K_q……の間に合成（演算）が定義されることが定理として述べられる。そして、この合成に対して第２項であげた二つの法則、つまり結合律と簡約律が成り立つことが示される。そしてK_p，K_q，……たちを（つまりＧ／Ｋにあたるものを）「置換体」（Substitutions-Körper）という名で呼んでいる。

ここでは明らかに、商群概念に相当するものが、群の公理に相当するものによって承認されていることがわかる。

デデキントの代数学講義は、存在そのものは知られていたが、生前には発表されず、全集にも所収されず、1981 年に初めて発表された。この講義はデデキントが 1850 年代から２０世紀的アブストラクトな思考法を持っていたことの証拠として、様々な二次資料で高く評価されている。[(17)]方程式の解法にこだわらず、背後の理論（根たちの置換と、根たちの作る数領域との関係）に注目したという点は当時としては斬新であり、上記のような群の抽象的理解ともあいまって時代を先取りしていたとの評価を受けるのは一応正当といえるだろう。

しかしながら、である。デデキントの抽象思考は何もないところから忽然と現れたのではないだろう。思考錯誤の跡があるとするのが自然ではないだろうか。単純に肯定的な評価を与えるだけではまずいのではないか。

とはいえ、思考錯誤の跡をたどるという問題は難しいには違いない。本論でケイリーとの比較を試みているのは、とりあえず、分析の足がかりをつかむためでもある。ここでひとつ問題の提起をしてみたい。

それは、ケイリーの思考法が踏襲されていないということである。遺稿によればデデキントはケイリーの 1854 年論文を読んでおり、位数の小さい群の分類問題に取り組んでいることが分かる。[(18)]しかし、「一般の記号から成る群」という思考法は、代数学講義では採用されていないのだ。代わりに「置換」が

全体の出発点になっている。いかにして「置換」が拡張されたかということは自明なことではない。なぜ置換が出発点となっているのか。そしていかなる理論のもとに置換概念が拡張されていくのか。

ここでは、ガロア論文の読解と 1854 年に行われた就任講演[19]とを参考にしつつ、いかに置換概念が群論的なものに拡張されていくのかを考察してみたい。

先に、デデキントの剰余類分解の記述をみて、ケイリーの先程の記述との直接比較を行っておこう。

3．1．剰余類分解の記述

剰余類分解に相当する概念が述べられているのは、第４項である。述べられていることを追っていってみよう。

まず積で閉じた（置換の）集まりが群と定義される。この「群」に、デデキントはＧという記号を当てている。(「群」という用語の意味に注意されたい。[20])

そして、次のような記号が導入される。

Ａを置換の集まり（Complex ）としたとき、

$\phi A \phi = \phi \theta \phi + \phi \theta' \phi + \phi \theta'' \phi + \text{etc.}$

と定義される。(ちなみに、＋と書かれているのは、代数的な加法演算のことではなくて、集合的な演算のことである。)

そして、Ｇが群であるとき、$G\phi'$ と $G\phi''$ とは、共通の元をもたないか、すべて一致するかのどちらかである、という定理が証明される。

この定理にもとづいて、「ＧとＫの両方が群であり、ＫがＧに含まれるならば、Ｋの度数（Grad）はＧの度数の約数である」という定理（部分群の位数は、群の位数の約数である、ということに相当する定理）が証明される。その際、デデキントは剰余類分解を次のように書き下している。

$G = K + K\theta_1 + K\theta_2 + \cdots\cdots + K\theta_{n-1}$

ここで、デデキントの記述を評価してみよう。

デデキントの記述法は、一見して明らかにケイリーのそれとは違っている。ケイリーはａＨの元たちを議論の出発点としていたが、デデキントはａＨを一括したものとして捉えている。のみならず、ａにＨをかける、という演算も意識的に行っているといえる。

実は、G＝H＋HS＋HS’＋…，あるいは　G＝H＋TH＋T’H＋…，といった記号は、デデキントの独創ではない。ガロアがまさしくその記号を使っているからである。[21]しかし、ガロアの論文をを見たはずのケイリーがこの記号を使っていないこと、ヘルダーでさえも使っていないことなどを見ると、ここの記述は評価されてよいのではないか。また、出発点においてφＡφの定義を行っているというのも、よく見れば注目に値する。定義を、群ばかりでなく一般の集合Ａに対して行っている点、両側からの積に対して行っている点などは、理論構成に対するデデキントの神経の細やかさを示すものである。

また、定理の証明も、コーシーの方法をふまえつつ、一般化出来るところは一般化するというように、自分の言葉でよく整理しているといえよう。独創的というより、編集者として優れているというデデキントの特質が、この小さな一節にもよく現れているといえよう。

３．２．置換体の拡張

さて、デデキントがなぜ「置換」を出発点とし、「置換」を拡張してゆくことを考えたかという問題に移ろう。それは、一言でいえばガロア論文の読解に即して考察していたからと思われる。ここで、ガロア論文の理論の流れを簡単に追っておこう。

ガロアが定義した「群」は、置換たちの部分集合であり、個々の方程式に対して定まるものだ。そして、方程式の根に付加をすると「方程式の群」が縮約されることを述べた。デデキントはそれに対して次のような追加考察を行った。（第３節第６項）それは、根に付加をされた量に対して、それの満たす既約方程式を求め、さらにその既約方程式に対する群を求めるというものだ。これは、大雑把に言えば、もとの方程式の群を縮約された群で割ったものになる。（これは本当は大嘘で、正規拡大のときにしかこうはならない。大雑把といったのはそういう意味である。デデキントはそこの考察も行っている。しかし、群を群でわるといった思考に注目するため、この点をあえて削った。）

実はここに問題が生じる。置換を置換で割ったものは、もはや置換としての性質を持たなくなるのだ。数の剰余類は、まだ数であるという印象をとどめているが、置換の場合はそうではないのだ。[22]しかし、「方程式の群」である以上、何かの形でそれを置換のようなものであると認めなくてはならない。すなわちここで置換概念を拡張する必要性が出てきたと思ってよいだろう。

デデキントは、何とかここでこの新しい数学的対象を定式化しようとした。そこで、「置換体」の元の定義、乗法の定義をおこなった。講義の内容でいえば、第３節第６項の後半部分がそうした考察にあたる。そして、置換体の演算が結合律と簡約律を満たすことを確認し、それらが何とか置換と同じようなものとして認められることをめざした。この記述が第１節第６項とみてよいだろう。

講義の編者の指摘によると、第３節第６項も、第１節の第５項以降も、後に付け加えられた部分に属するということである。(23)つまり、ガロア読解の進展につれて置換体の概念が確立していったといってよいのではないか。

ここでひとつ注意をしておきたい。先行研究においては、ガロア読解がデデキントの群論概念を促したというような記述は少なくとも明示的にはみられない。しかし、第３節の記述がいささか模索的であるのに比べ、第１節の記述が完成度が高いことをみると、第１節の記述を第３節の記述とみることもそんなに的外れではないと思われる。もっとも、第３節に関しては、（第２節のラグランジュ解釈の研究とともに）さらに詳細な研究を要すところではあると思うのだが。

３．３．就任講演との関連

さて、デデキントが集合論的把握にも強く、ガロア論文の読解作業によって商群概念の定式化に迫られたことをみてきたところで、群の公理に相当する部分をもう一度見直してみよう。問題の一節は、第２項の最後、結合律と簡約律を証明した直後にある。

“これから続く研究は、今証明した両定理と、置換の数が有限である、ことのみに基づくのである。同じ結果が、有限の要素、又は事物、又は概念θ，θ’，θ”…，の領域――θ，θ’から定義された積の様なものθθ’が、同じ領域の元になり、かつこの積が上記二法則に従う、そういう積の定まった領域――に対しあてはまる。

数学の多くの分野で、すなわち数論や代数においては、この理論に対する無尽蔵ともいえるほどの例を見出せる。証明の方法は、さきに述べたと同じでよい。しかし、簡単のため、我々は置換論の語はそのままにしておこう。ただし、

後に（第６項）この一般的解釈を使うのであるが。”[24]

ここで、第６項、つまり商群概念に相当する箇所に言及されていることに注意しよう。デデキントにおいて、商群概念に相当するものと、群の公理に相当するものとは、密接な関係があるのである。ここでしばしとどまって考察してみよう。

第２項の二つの定理は、定理が証明された時点ではただの「法則」であるに過ぎなかった。定理の後の上記コメントによって、意識的に「公理」への昇格の可能性が示唆されているといってよい。そして、その「昇格」のもっとも強い原動力となるのが、商群概念の承認であるらしい。

ここで確認しておこう。群の公理に相当するものによって、置換体が（商群概念が）承認されていく、というのが通常の論理的帰結である。しかしながら、ここには逆の流れがみてとれないだろうか。すなわち、「商群の承認が、法則を公理に昇格させる役割を果たした」のではないだろうか。

これは決して筆者のその場限りの思いつきではない。実は 1854 年の就任講演に、こうした発想にかなった思想がみられるのである。デデキントはここで、学問において重要なのは概念の拡大であり、数学も例外ではないが、概念の拡大の際に、「法則」が拘束力をもつ、といったことを述べている。これを少しみてみよう。[25]

表題は「数学に新しい関数を導入することについて」である。まずここで、学問（科学）において重要なのは、概念の拡大であるということが述べられる。「ごく限られた形のものからより広い領域での有効性を得るため」、初めに導入された定義が変遷していくことが、学問の発展にとって重要なのである。

数学の場合も事情は同じである、とデデキントはいう。定義は、初めは限られた形において現れ、そのあとさらなる発展によって、その定義の一般化が生じる。しかし、数学は、他の科学（学問）と違って、その一般化（概念の拡大）の仕方は恣意的ではない。「法則」が概念の拡大に際して拘束力を持つ。つまり、法則は初期の定義から生じ、その定義によって記述された概念にとって特徴的なものである。その法則を新しい概念においても妥当するとみなすのである。

デデキントは数の拡大に即してこの「概念の拡大」の例を述べてゆく。つまり、自然数に負の数、分数、無理数、虚数が付け加えられていく様子を述べる。

数の概念が拡大されていくとき、演算の定義はどのようにして拡張されていくか、ということについても、デデキントは例をあげて丁寧に述べている。たとえば、負の数に対して乗法を定義してゆくには、分配の法則を負の数においても成り立つとし、そのうえで乗法の定義を拡張してゆくのである。

我々の目には、デデキントはこの時期から公理的な思考法をもっていたように見える。しかし、面白いことに、デデキントはこの講演で自分が述べた方法論を「帰納の方法」だと表現している。[26]公理的方法は、デデキントの内部では帰納の方法と表裏一体のものであったようだ。

商群の話題に帰ろう。商群概念を承認することによって、法則が公理に昇格する、ということがあったといってよいかどうかを考えていたのであった。これは肯定的に答えてよいのではないだろうか。デデキントの群概念理解は、個別的な代数学分野にとどまるものではなくて、方法論をふまえた戦略的なものだったのではないだろうか。

ガロア論文の読解、編集、そして数学方法論、それらが有機的に関連しあって、デデキントの群概念は深まっていったといってよいだろう。この過程によって、商群概念の承認と群の公理の明言が同時になされていったとみてよいのではないだろうか。

3．4．結論

ケイリーのところで行ってきた議論を想起してみよう。我々は、ケイリーが意外にも商群概念を拒否しているという謎から出発し、ケイリーが集合論的把握に弱いことをみてきた。そのうえでケイリーの群論概念を見直してみると、言及されている結合法則などには公理的性格はなく、演算だけから規定されるただの集合、という抽象代数系の思想には至っていないということが見出せた。

さて、一方のデデキントについてはどうであろうか。デデキントはケイリーと違って、理論的思考を丁寧に行うタイプで、集合論的理解にも強かった。そして、ガロア論文の読解、編集、そして数学方法論、それらすべての有機的な関連の結果として、商群概念の承認と群の公理の明言が同時になされたのではないかということが分かってきた。

ここで注意しておくべきことがある。デデキントのガロア講義の出版に関わった編者たちの言及には上記のことはあまり取り上げられていない。もちろん、

群の公理、商群の承認、また就任講演などは個別に高く評価されている。しかしこれらの間の有機的な関係については明示的には述べられていない。なぜだろうか。

デデキントはこの時期にしては珍しいほどのアブストラクトな思考をしていた。ガロア論文の解釈にしても、具体的な方程式の解法に注目するというより、体の拡大と群との関係に着目するという方向をとっているわけで、その点がたとえばクロネッカー（Leopold Kronecker, 1823-1891 ）などとは違っている。[27]こうしたデデキントの、いわば先進性がやはり強調されるべき事柄であり、ガロア、コーシー、ケイリーの論文を、具体的にどんな記号を使ってどう読み解いていったかということは、グローバルな目でみたときの「数学思想」にとって些細な事柄であるのに過ぎない。おそらくそのように編者たちには判断されたのだろう。[28]

しかし、ケイリーの分析でもみてきたように、時代の制約というのは意外に大きい。我々は、この時代の群概念が、やがて意味を剥奪された抽象代数学に発展変遷していくということを知っているが、それは１９世紀の研究者達には預かり知らぬことなのである。また、デデキントの特質のひとつが、「編集」にある以上、些細なことにこだわるのも、意味があるのではないかと思われるのである。

デデキントの代数学講義に関しては、ラグランジュやガロアとの綿密な比較研究や、リーマンとの関連など、研究を要されるべきことは多くあると思うが、もう少し些細な点に注目されるべきだということを主張しておきたい。

４．結び

主要な結論はすでに述べてきた。最後に一言だけ補充をしておきたい。

本論文では、いささか変わった議論の仕方をしてきた。通常ならば、使われている記号などは数学の本質ににとっては二次的なものであるとし、たとえば正規部分群の概念が読み取れるかどうか、商群における演算の妥当性（well-definedness）が証明されているかどうか、などを分析してゆくのがまともなやり方であるだろう。

本論で行ってきた議論は、「群」を「群」で「割る」という思考法が文献に現れているかを、記号法などにこだわって分析してゆくというものであった。これは素朴な方法であるといえる。

あえてこのような方法をとったのは、群概念の歴史が、数学の基礎に関わるテーマだからである。数学の基礎は、数学の内容はもちろんだが、数学者の思想、社会的立場、といった多くの要素から成り立っている。これらを理解して行くのに、あえて素朴な方法をとってみるのも一つの行き方ではないかと思う。

注

（１） A. Cayley, "On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n=1$." Philosophical Magazine, (1854) pp. 40-47.

（２）Richard Dedekind, "Eine Vorlesung über Algebra" in:W. Scharlau, hrsg., Richard Dedekind 1831-1981 , (Braunschweig/Wiesbaden, 1981). S. 59-100.

（３） １９世紀の代数学史で代表的なものは、次の二つである。
H. Wussing, The Genesis of the Abstract Group Concept (Berlin, 1969): English. trans. (MIT Press, 1984)
L. Novy, Origins of Modern Algebra, (Leyden, 1973).
L. Corry, Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures (Birkhäuser, 1996).
初めの二著はデデキントの代数学講義が出版される以前のものである。デデキントに対する評価は、注（１７）にもある。

（４） Julia Nicholson, "The Development and Understanding of the Concept of Quotient Group", Historia Mathematica 20(1993), pp. 68-88.

（５） E. Galois, "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" (1846): Oeuvres M. E. Picard ed., (Paris, 1897), pp. 33-50.
E. Galois, "Des équations primitives qui sont solubles par radicaux." (1846) Oeuvres. pp. 51-61.

（６） A. L. Cauchy, "Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données et surles permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre" (1844); Oeuvres (2) 13, pp. 171-282.

（７） G. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities (London, 1854).

（８） 上掲注（１）.

(9) H. Wussing, op. cit., pp. 230-233.

L. Novy, op. cit., pp. 215-218.

(10) A. Cayley, "Note on the so-called quotient G/H in the theory of groups", American Journal of Mathematics 15(1893), pp. 387-388.

(11) O. Hölder, "Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen", Mathematische Annalen 34(1889), S. 26-56.

(12) A. Cayley, "On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n=1$. Second Part", Philosophical Magazine(1854), pp. 408-409.

(13) A. L. Cauchy, op. cit., pp. 206-208.

(14) L. Novy, op. cit., pp. 216.

(15) J. Nicholson, op. cit., p, 84.

(16) 上掲注 (2).

(17) W. Sharlau, "Erläuterungen zu Dedekinds Manuskript über Algbra". S. 101-108.

W. Purkert, "Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie", NTM 13 (1976), S. 1-16.

W. Scharlau, "Unveröffentliche algebrishe Arbeiten Richard Dedekinds aus seiner Göttinger Zeit 1855-1858", Archive for History of Exact Science, 27(1982), pp. 335-367

(18) R. Dedekind, "Aus der Gruppen-Studien 1855-1858", G. M. A., III, S. 439-446

(19) R. Dedekind, "Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik", G. M. A. III, S. 428-438.

(20) (ガロアの場合もケイリーの場合もそうであったが、) 置換の部分集合であって、演算で閉じているものが群であると定義されている。であるから、19世紀の文献における「群」は現代の「部分群」に相当するものになる。群概念の歴史を追求する際に、"group" の定義だけに注目してしまうと、間違いを犯すことになる。

(21) E. Galois, op. cit., pp. 25-26.

(22) この点は以前足立先生から御指摘いただいた。

(23) W. Sharlau, "Erläuterungen zu Dedekinds Manuskript über

Algbra",S.102.

（２４）Richard Dedekind,"Eine Vorlesung über Algebra",S.63.

（２５）R.Dedekind, "Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik",S.428-432.

（２６）Ibid.,S.430,S.438.

（２７）L.Corry,op.cit.,pp.75-76.
H.Wussing,op.cit.,pp.120-121.

（２８）たとえば、ニコルソンは、デデキントが同値類の概念を研究していたことをとりあげ､これがデデキントの商群概念把握につながると指摘している。(pp.76-77) だが、デデキントの商群概念理解は、ガロア論文読解という具体的な問題の場を抜きにしては語れないものであると思う。同値類概念の考察は論理的には商群概念理解を導くかもしれないが、それだけでは数学思想の分析には不足なのではないかと思う。