新 Cauchy 伝説
Cauchy は ε-δ 論法を使ったのか

中根美知代

1. はじめに：Cauchy をめぐる「風説」

数学を専門にする者がその歴史に思いをはせる最初の機会は，講義や教科書で，過去の数学者の名前を冠された理論や定理に出会ったときであろう.「ユークリッド幾何学」・「リーマン積分」・「ケーリー・ハミルトンの定理」・「アーベルの定理」などという名前に触れたとき，私達はその理論や定理自体とともに過去の数学者を意識し，今学んでいる数学が数多くの数学者の手によって作られてきたことを理解するのである.

そうして出会った数学者のなかで，もっとも印象に残る人物のひとりが，Augustin-Louis Cauchy（1789-1857）であろう．微分積分学で習う ε-δ 論法は大学での数学の最初の難関のひとつである．これが導入された後，彼の名を冠するいくつもの定理が紹介されているのだから，彼の名前と ε-δ 論法とは私達のなかできわめて強く結びついている.

定理等に冠された名前はあくまでもその名称の一部であって，そこからその人の業績を推定することはできない.しかし微分積分学の教科書，たとえば一松著『解析学序説上巻』には，

> コーシーは，つぎのような定義を与えた.
> 「$x \to a$ のとき，$f(x) \to b$ とはつぎのことである．すなわち，任意に指定された正数 ε に対して，正の数 δ をうまくとって，$0 < |x-a| < \delta$ であるすべての x において $0 < |f(x)-b| < \varepsilon$ が成立するようにできる．」[1)]

という，Cauchy 自身の仕事に関する記述も見られる．こうした記述から，Cauchy は ε-δ 論法を使っているとのより確固たる認識が私達の間に生まれてくる.

数学の一般向け啓蒙書や解説書でも，Cauchy と ε-δ 論法に関する記述をいくつか見かける．たとえば遠山は，

> そうして出てきたのがコーシーの収束条件である．それはつぎのとおりで

ある.「無限数列 a_n がある.このとき任意のプラスの数 ε を与えてある整数 N から先のすべての番号 n に対して $0 < |a_n - a| < \delta$ となるようにいつでも N を適当に定めることができるならば数列 a_n は a に収束するといい,a を収束する数列の極限という.」(中略) コーシーの独創性は「いくらでも a に近づく」という事実の底にひそんでいる二者闘争の論理をえぐり出した点にある.[2)]

と記している.また溝畑も

フランス人は解析学の創始者としてコーシーをかつぐ.(中略)　いわゆる ε-δ 論法を持ち込み,極限,連続,定積分等の概念を明確にしたのも彼である.[3)]

としている.このような記述からも私達は,Cauchy こそあの難解な ε-δ 論法を用いて微分積分学を全面的に展開した人物であると思いこむのである.

しかも,小堀[4)],吉田[5)],近藤・井関[6)] らの手近に見られる「数学史」の和書もまた,ことごとく Cauchy が ε-δ 論法を用いたような記述を残しているので,私達の思いこみは強まるばかりである.

ところが Cauchy の代表的な教科書『解析教程』[7)] (1821 年) はそのようには書かれていない.そこでは ε-δ 論法で回避したはずの「限りなく近づく」という表現を全面的に打ち出して様々な概念が定義されているのみならず,無限小も概念を定義したうえで活用して,微積分の理論を展開している.その後に Cauchy が書いた教科書『微分積分学要論』[8)] (1823 年),『微分学講義』[9)] (1829 年) においてもこの状況はほとんど変わっていない.私達が期待したようなことを Cauchy はやっていないのである.

教科書や啓蒙書の歴史的な記述は,非専門家によるいい加減なものという見方もある.しかしこれから見ていくように,Cauchy の表現自体が,今日の ε-δ 論法に慣れている者を混乱させる要素を持っている.Cauchy が ε-δ 論法を使ったとする「風説」はいかにして数学者の間に生まれたのだろうか.本報告ではこのことを検討していく.

2 ε-δ 論法の成立過程における Cauchy の位置づけ

1) 数学史の先行研究の現状

Cauchy と ε-δ 論法との関連をめぐっての数学史の研究の現状の成果を確認

しておこう．

Cauchy は定義や定理を ε-δ 論法で表現するということはやっていない．しかし，ε や δ という文字できわめて小さな量を表し,「限りなく近づく」という概念を「極限値との差を上から押さえる」，すなわちで不等式に用いて極限に関する諸定理を証明している．数学史家の Grabiner や Fisher はこれが ε-δ 論法の始まりと評価している.[10] ただし Cauchy には，一様収束性の認識がなかった．したがって，Cauchy はあくまでその方向を用意しただけで，完成したのは Weierstrass であるというのが多くの数学史家の間の共通の理解であろう.[11]

しかしながら，これらの成果は私達の疑問に十分答えているとは言い難い．ε-δ 論法の本質をどの程度 Cauchy が捉えていたかが見えてこないからである．一松の教科書に見られるような ε-δ 論法による定義を学んだとき，私達はどこかでつぎのような説明に出会っているはずである.「あなたは正の数 ε をひとつとってきて固定しなさい．どんなに小さくてもいいですよ．私はその ε に対して上手に δ（あるいは N）を選んで，ここに示しているような不等式が成り立つようにしてみせますよ．その操作が一度完結した後，あなたは先ほどよりも小さい正数 ε を持ってくるかもしない．しかしそれに対しても，私はより小さい δ（あるいは大きい N）をとることができて，今度も不等式がなりたつようにできますよ．この繰り返しです」と．

ε-δ 論法とは，それまで「限りなく」という言葉で表現されていた極限の概念を「ε と δ のせめぎ合い」，上述の遠山の言葉では「二者闘争」で表現したものである．ε-δ 論法が用いられたということであれば，Cauchy が「せめぎ合い」の概念に達してことがはっきり示されなければならない．しかし，このことを明確に述べた数学史の先行研究は今のところない．専門的な研究書に書かれていないことを教科書では大胆に言い切っているのである．では Cauchy 自身の記述を確認しながら，その真偽のほどを探っていこう．

2) Cauchy の原典の確認

まず，Cauchy の最初の微積分学に関する教科書,『解析教程』で提示された，極限に関するいくつかの定義を確認していこう．原文は付録に収めてある．

<u>極限の定義</u>：ある変数の順次とる値が，ある一定の値に限りなく近づくとき，最終的には，それらの値の差が望むだけ小さくなるようにできるとき，この一定の値を極限と呼ぶ．(序文)

<u>無限小</u>：ある変数の連続する値が，限りなく減少し，与えられたどのような数

よりも小さくなるとき，この変数は無限小あるいは無限小量と呼ばれる．この種の変数は 0 を極限として持つ.[12] (序文)
関数の連続性：α を無限小とする．ある区間内のそれぞれの x について，差 $f(x+\alpha)-f(x)$ が α の値とともに減少するとき，関数 $f(x)$ は，この区間で，この変数について連続といわれる．別の言葉で言えば，(中略) その区間で，変数の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加をつねに作り出すことである．(第 2 章)
Cauchy の収束条件の提示：つねに増えていく n の値に対し，和 S_n がある極限値 s に限りなく近づくとき，この級数は収束するといわれ，問題としている極限は，級数の和と呼ばれる．(中略)

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c \ldots + u_{n-1}$$

が収束するための必要十分条件は，n の無限に大きい値に対し，和

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c \ldots$$

と極限値 s との差が，結果的にはそれらどうしの差が無限小になることである.[13] (第 6 章)

ここで見られるように，Cauchy は，極限の定義を「限りなく近づく」という表現を用いて定義しているうえ，無限小も積極的に利用している．彼がその後出版した『微分積分学要論』・『微分学講義』においても，ほぼ同様の定義が与えられている．1853 年の論文[14]においても，依然として無限小を用いて極限の定義を与えていることから，Cauchy はこれらの定義を生涯用いていたと考えてよいであろう．

ただし，Cauchy の定義は，ε-δ 論法を予見させるものがある．「限りなく近づく」あるいは「限りなく減少する」が「ある確定値との差が望むだけ小さくなるようにできる」と書きかえられているからである．後半部分を，「$\forall\varepsilon, \quad |s_n - s| < \varepsilon$」と表現することは，大きな飛躍があるように思えない．実際小堀は，Cauchy の定義をこのように表現し，そこに ε-δ 論法の意味を読みとっている.[15]

しかしながら，これだけで Cauchy が ε-δ 論法を使っていたと評価することは難しい．任意の正数 ε に対して適当な δ をとる，あるいは十分大きな番号 N をとるという，2 つの量の関連づけに相当する操作がこの時点では明確に見られないからである．これが初めて出てくるのが Fisher の指摘した『解析教

程』第2章第3節の定理1の証明であり，２つの量を ε と δ で記号づけたのが Grabiner が指摘した『微分積分学要論』第7課に見られる証明である．以下，それらを検討していこう．

『解析教程』で与えられているのは
「増加する x に対して，差 $f(x+1)-f(x)$ がある有限確定値 k に収束するとき，$\dfrac{f(x)}{x}$ も同じ極限値に収束する」
という定理である．Cauchy は，有限確定な極限値を k，望むだけ小さい数を ε と表し，十分大きな h をとれば，$x \geq h$ となる x について

$$k-\varepsilon < f(x+1)-f(x) < k+\varepsilon \tag{1}$$

となることを指摘する．そしてこの不等式を用いて，$k-\varepsilon < \dfrac{f(x)}{x} < k+\varepsilon$ を示したのであった．

『微分積分学要論』では，
「$f(x)$ が端点 $x=x_0$ と $x=X$ の間で連続とし，その区間内での関数の微分 $f'(x)$ の最大値を A，最小値 B とすると，有限な差の比

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

は必ず A と B の間に含まれる」
との定理が述べられている．ここで Cauchy は δ と ε を非常に小さな数とし，δ より小さい値 i と x_0 と X の間に含まれるすべての x に対し，比

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

が $f'(x)-\varepsilon$ より大きく $f'(x)+\varepsilon$ より小さい範囲にとどまっているようにする．そして，この関係は数 ε がどんなに小さくても成り立つことを示し，証明を終えている．

一見してこの２つの証明は，任意の正数 ε をどのように小さくとってもそれに応じて大きな h，あるいは小さな δ がとれるとするせめぎ合いの考え方を持ち込んでいるように思える．しかし，ここで問題になるのは，Cauchy のいう望むだけ小さい数，あるいは非常に小さい数 ε をそのように解釈してよいかということである．

Cauchyによれば，無限小とは「0を極限として持つ数」であった．これと極限の定義を照らし合わせると，無限小は「それと0との差が望むだけ小さくなる数」，すなわち「望むだけ小さくなる数」を意味しているとみなすこともできる．そうだとすれば，「望むだけ小さな数」とは無限小をさしていると考えられないだろうか．実際Cauchyは，『解析教程』では第2章第1節で，『解析学要論』第21課で，εという記号で無限小を表しているのである．この2つの定理の証明に出てくるεが無限小を意味していたとの可能性は否定できない．

仮にそうであったとすると，この2つの証明の意味がまったく変わってくる．たとえば『解析教程』の証明は，つぎのように解釈されよう．「xが増加する場合を考えているのだから，xの十分大きな値，十分大きなhに対して$x > h$となる範囲で考えよう．xが大きくなるに伴い，$f(x+1) - f(x)$はkに近づいていく．したがって$|(f(x+1) - f(x)) - k|$は0に近づくのだから，0を極限とする量，無限小εで押さえられる．」

εが無限小ならば，hにせめたてられることがなくても，ε自身がいくらでも小さくなれる．そのため，まずεを一度止め，それに応じてhを決める操作を繰り返すことを読みとらなくても，証明の意味が通じてしまう．このときεとδは伴って変化する量ではあるが，互いにせめぎ合う関係にはない．すなわちε-δ論法と読みとることができない．するとこの証明の主旨を説明するには「限りなく近づく」あるいはそれと似かよった表現をとらざるを得なくなってくるのである．『微分積分学要論』の証明でも同様のことがいえるだろう．

Cauchyがε-δ論法に達したか否かは，彼の記述をどう理解するかに大きく依存していく．そこでCauchyに原典の紹介を一度打ち切り，無限小とε-δ論法の関係を整理していこう．

3) Cauchyの記述と現代的な書きかえ

議論を見通しよく進めるため，極限値aに収束する数列a_nを例にとり，Cauchy自身の記述を現代的に書きかえることによってどのような問題が生じるのか整理してみよう．Cauchyによれば，数列が収束するとは

$$|a_n - a| = (\text{無限小})$$

ということである．彼の無限小の定義からは

$$|a_n - a| = (\text{望むだけ小さな数})$$

とも書くことができる．この２つは Cauchy のなかで等価である．後半部を現代的に書きかえると

$$\forall\varepsilon, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

ということになろう．この書きかえにより，Cauchy の意図が損なわれたとは思われない．しかし，

1) 十分大きな n に対して　$|a_n - a| = $(無限小)$ = $(望むだけ小さな数)

2) 十分大きな n に対して　$|a_n - a| < \varepsilon$，(ε は任意の正数)

とすると，1) と 2) ではそこから読みとれる内容が変わってくる．2) では，「十分大きく n をとれば，どのように小さく ε をとっても a_n と a との差は ε よりも小さくなる」，すなわち ε-δ 論法として理解できるのに対し，1) では，「n を大きくとれば，a_n と a との差はかぎりなく小さくなる」ことを意味しているとしか読みとれない．どんなに ε-δ 論法の形式が整っていても，そこから「せめぎ合う２つの量の関係」を読みとれるかどうかは，無限小を含んで議論が構成されているか否かにかかってくるのである．

Cauchy 自身の記述からは ε が無限小を表しているとも，そうでないとも読みとれる．この点が曖昧であることから，ε-δ 論法において無限小が含まれるか否かが大きな意味を持っていることを，彼は理解していなかったと判断できるだろう． Cauchy は ε-δ 論法の形式は導入したが，せめぎ合いの考え方には達していなかったと評価せざるを得ない．

ところが ε-δ 論法になじんでいる今日の数学者は，「望むだけ小さな数 ε」といわれた時点で，極端にいうと ε という記号が導入された時点で，無限小を直ちに排除してしまう．そこで，Cauchy の証明を「せめぎ合い」の関係をあらわすものとして，一意的に判読してしまう．「Cauchy がせめぎ合いの考え方に達した」との彼らの判断はここから生まれたのであろう．

3．教科書の歴史的記述の検討

1) 藤原松三郎の記述をめぐって

教科書に歴史的な記述を書き入れようとする場合，著者自身が原典までさかのぼって調べていくとは考えがたい．別の著作の受け売りが多くの部分を占めると察せられる．それまで出版された何冊かの教科書を参照しながら新たな教科書が作られていくとすれば，過去に書かれた教科書の歴史的記述も検討して

おく必要があろう.

まず検討すべきなのは，日本語で書かれた微積分学の教科書が必ず参考文献として提示する，高木貞治著『解析概論』[16)]と藤原松三郎著『微分積分学』[17)]であろう．高木のものは，歴史的な記述はさほど多くなく，Cauchy と ε-δ 論法の関係について論じている箇所はない．藤原のものもまた，歴史的な記述に多くの紙面が割かれているということはない．しかし，この本は参考文献がきわめて充実しており，定理の出典がしっかり書かれているという特徴を持っている．実際 Cauchy の『解析教程』からもつぎの２つの定理が引用されている．

(1)「定理 7

$$a_n > 0,\ \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_n \to +\infty \ \ (n \to +\infty)$$

トスレバ，$u_n \to s$ ナラバ

$$\frac{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \to s.$$

但シ s は $+\infty$ 又ハ $-\infty$ デアツテモヨイ．特ニ $a_n = 1$ トスレバ，$u_n \to s$ ナラバ

$$\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \to s.$$

後者ヲこーしーの定理トイフ．定理 7 ハしゅとるつの拡張デアル(*)．(p.30)

(2)　定理 3　(こーしーの判定条件)(*)．

$$a_n > 0, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

トスレバ，$\sum a_n$ ハ $\rho < 1$ ナラバ収束，$\rho > 1$ ナラバ発散スル．(p.49)

いずれも (*) 印の箇所に Cauchy 全集第２集第３巻の『解析教程』が引用されている．(2) は，121 ページとの記載があり，実際その箇所にこの定理がある．しかし，(1) は，収録されているページの記載はない．そして筆者が調べた限りでは，これに相当する定理は『解析教程』にはない．この引用は藤原自身が確認したものに基づいてなされたのではなく，通常 Cauchy の定理といわれているから『解析教程』にあるのだろうという見込みでなされた可能性が高い．

(2) は，藤原の教科書のなかでは ε-δ 論法で証明されている．しかし，Cauchy 自身は,「限りなく近づく」という言葉を全面的に用いて証明している．藤原の

証明は Cauchy のものを忠実に再現したわけではない．教科書の性質上そうする必然性がないことは十分理解できるが，『解析教程』のページまで記載された上，Cauchy の名を冠する定理が紹介されているとすれば，Cauchy 自身がこの証明を与えたと数学者が判断してもやむを得ないだろう．Cauchy と ε-δ 論法を結びつける伝説はこのようなことからも生まれうるのである．

2) Goursat の教科書の影響

日本の微分積分学の教科書に直接影響を与えた欧米の教科書についても検討しておこう．今回は，藤原が引用しているもののうち，比較的簡単に入手できた

1) G.H. Hardy *A course of pure mathematics*, 1908, Cambrige
2) C. Jordan *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, 1909, Paris
3) Goursat *Cours d'analyse mathématique*, 1924, Paris
4) J. Hadamard *Cours d'analyse*, 1927 Paris.

をとりあげる．3) は邦訳も出版されている．3)，4) は溝畑の教科書でも引用されている．これらは，藤原の著書を経ることなく，直接日本の教科書の著者が参照しうる本なのである．

まず注意しておきたいことは，1900 年代のはじめに書かれた微分積分学の教科書のすべてが ε-δ 論法で極限の概念を記述しているわけではないということとである．たとえば Hadamard の教科書は「限りなく近づく」・「無限小」を使って極限概念を定義しており，ε-δ 論法による定義は参考程度にかいてあるだけである．これはエコールポリテクニクで当時用いられた教科書の特徴でもある．[18] 曲線の 2 次接触等の問題を扱うには，無限小の概念を用いた方が教育上の効果的だったためであろう．

これらの教科書のうち，歴史的な記述が比較的多いのは，Paris 大学で採用されていた Goursat のものである．冒頭で，

変数 x が極限として確定した数 a を持つとか a に向かうというのは，差 $|x-a|$ が前もって与えられたすべての正数より小さくなる，あるいはそのようにとどまるときである．$a=0$ のとき，数 x は無限小という．

として無限小を定義しているが，これを用いて極限概念を定義することはなく，いわゆる ε-δ 論法が採用されている．Goursat は今日の連続性の定義は Cauchy

によるものとして以下のような定義を示す．原文は付録に収めてある．

h が 0 に近づくとき，差 $f(x_0+h)-f(x_0)$ が 0 に近づいていくならば，関数 $f(x)$ は $x=x_0$ で連続であるという．同様に極限を定義した後には，つぎのように定義することができるだろう．任意の正数 ε に対し，別の正数 η をとることができ，η より小さな h に対して

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

が成り立つ．

Goursat の場合，ε を無限小と解釈する余地はない．Cauchy 自身による連続性の定義を今日の ε-δ 論法で書きかえると確かにこのようになるだろう．しかし，先に述べたように，Cauchy 自身がこのような書きかえに達していたわけではない．この記述は，あくまでも Goursat による Cauchy の記述の解釈なのである．ただし，Goursat が，Cauchy 自身の記述と自分で書きかえた結果の間に飛躍があることを認識していたかどうか，疑わしい．Goursat 自身，今日の私達と同様，無限小を払拭した形での ε-δ 論法になじんでいたと想像されるからである．

しかしながら，読者の受け止め方は，Cauchy の記述と Goursat の書きかえの差異という以前の段階であろう．Cauchy による定義と書かれている以上，この箇所を読んだ読者が，これは Cauchy 自身の書きかえである，すなわち Cauchy が ε-δ 論法で連続性の定義を与えたと判断するのは自然であろう．そうであるとすれば，Cauchy の微積分学の教科書全体が ε-δ 論法で書かれているはずであると思いこむのは想像に難くない．Goursat の著作もまた，Cauchy 伝説の重要な要素だったのである．

4. おわりに

以上,「Cauchy が ε-δ 論法を用いた」との教科書の歴史的記述が生まれた原因について考察してきた．それは，ε-δ 論法の形式をとりながら無限小が使われているという Cauchy の記述をどう理解するかに大きく起因していた．実は Cauchy の意図したこととは異なることを今日の数学者は読みとり，彼を ε-δ 論法の創始者に祭り上げてしまったのである．原典とつきあわせて検討していく

限り，Cauchy はせめぎ合いの考え方には達していなかった．すなわち 彼が ε-δ 論法を用いたとは言い難いのである．

では，Cauchy に関する教科書の記述はでたらめだったのだろうか．教科書の著者はいちいち原典に当たって歴史的なことを書くわけではないから，その記述は信頼のおけないものなのだろうか．そうだとすれば，数学を学ぶ者にとってもっとも影響力が強い教科書の歴史的記述がいい加減であることに，なぜ強力な批判・指導がなされないのか．

数学の教科書や論文の誤りは，一定の素養のある者なら誰でもそうと見分けられる客観性を持っている．歴史的記述にも「Cauchy の『解析教程』の出版は，1990 年」というような明らかな事実関係の誤りはある．しかし一般に，歴史的な記述はそういう性格を持っていない．確かに本報告では，Cauchy 自身の記述が今日の ε-δ 論法からどのくらいかけ離れているかを見てきた．しかし，これはあくまでも筆者の見解である．筆者とちがう視点からみれば，Cauchy の記述は「せめぎ合い」と一意的に判読できるかもしれない．あるいは,「せめぎ合い」に達することではなく，形式が整うことこそ，ε-δ 論法の成立の要件と見る歴史家にとっては，この記号を導入した Cauchy こそ ε-δ 論法の創始者ということになる．

数学史の研究の場合には，著者が自分の立場をどう規定しているか，反論に対してどの程度説得的に応えられているかが，その論文を評価する最も重要な点となる．Cauchy が ε-δ 論法を用いていたか，いなかったかという真偽ではなく，どちらと考えた方が，彼の仕事に対してより説得的な説明がつくかが問題なのである．したがって反論もまた,「誤りである」というよりは,「それだけの論拠では説明が不十分」といったものになる．残念ながら，教科書の歴史的記述のレベルでは，そこまで十分な著者からの説明は期待できない．そうである以上反論や批判が難しく,「ε-δ 論法を用いた」という記述は不適切であるとはいいきれないのである．

読者に要求されるのは，数学と歴史の性格のちがう 2 つの記述を読み分けることである．数学的な事柄は，そのまま覚え，身につけてしまってよい．これに対し歴史的な記述は，その著者による一つの見方が書かれているだけであり，違う見解もありうることを承知した上で読んでいく必要がある．歴史への関心を呼び起こすという上で，教科書の歴史的記述はきわめて有効である．しかし数学の教科書本来の記述とはちがう性格を持つものであることを十分理解してかからないと，その後の研究・教育の場で大きな混乱が生じることになりかねない．

文献と注

1) 一松信『解析学序説上巻』，第21版，1978 年，裳華房，p.117.
2) 遠山啓『数学入門（下)』，岩波新書，1960 年，pp.70-71.
3) 溝畑茂『解析学小景』岩波書店，1997 年，pp.41-42.
4) 小堀憲『コーシー微分積分学要論』（翻訳・解説)，1969 年，p.217-219. では以下のように記されている.

これを受け継いだコーシーは（中略)『1つの変数の絶対値が限りなく減少し，どのような値を与えても，それより小さくなる，というときには，この変数は，「限りなく小さい量」であるとか，あるいは「無限小」であるとかいう』と定義した．これを，記号を用いて示すと『正の数 ε_0 を任意に与える．これがどのように小さな値であろうとも，いつでも $|x| < \varepsilon$ が成り立つ』ときに x は無限小である，というのである.

5) 吉田耕作『数学の歴史 IX 解析学 I』共立出版，1986 年，pp.7-8. には次のような記述が見られる.

コーシイは「函数の連続性を論ずる為には，極限の概念を与えなければならない」といって次のように論をすすめる.（中略)「一つの変数が順次とる値の絶対値がどこまでも減少し，任意に与えられた正数よりも小さくなるならば，その変数は無限小であるという．すなわち無限小は 0 を極限とする変数と見なす」のである.

このようにして，数列 $\{c_n\}$ が極限 a をもつ，すなわち $\lim a_n$ となる a が存在する為の条件として
「任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，m と n とが双方とも十分に大きいならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ が成り立つ」
が与えられた.

6) 近藤基吉・井関清志『近代数学（下)』，日本評論社，1986 年，p.60. には以下のような記述がある.

実数論が完成していなかった 19 世紀のはじめ頃コーシーとアーベルが級数の収束条件を与えた．つまり級数 $\sum a_n$ において任意の正数 ε に対して m をとり，すべての n に対して

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n}| < \varepsilon$$

が成立すれば $\sum a_n$ は収束するということであった.

7) *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, I^{re} partie : analyse algébrique*, Paris, 1821 = Oevres Series 2, vol 3, Paris, 1897.

8) *Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur la calcul infinitésimal*, vol 1, Paris, 1823= Oevres, Series 2, vol 4, pp. 5-261, Paris, 1899.

9) *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829=Oevres, Series 2, vol 4, pp. 263-609, Paris, 1899.

10) J. V. Grabiner, *The origin of Cauchy's Rigorous Calculus*, The MIT Press, 1981. および G. M. Fisher "Cauchy and the infinitely small," *Historia Mathematica* 5, (1978), pp.313-331.

11) たとえば U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, 1989, New York:Springer. Dugac, 「解析学の基礎」, Dieudonné 編『数学史 II』, 1985 年, pp.385-456 所収など. また, ε-δ 論法と直接関係しないが, Cauchy の連続関数の定義が Bolzano のものと酷似していることもこれらの本は指摘している.

12) Cauchy の無限小については たとえば D. Laugwitz, "Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks," *Historia Mathematica*, (1987), pp.258-274, および "Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820," *Archives for History of Exact Sciences*, **39**, (1988-99), pp.195-245.

13) 数列の収束の条件が「Cauchy の収束条件」と称して提示されることが多いが,『解析教程』で提示されているのは, 級数の収束の条件である.

14) Cauchy, "Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continutés d'une variable reélle ou imaginaire entre des limites données," *Comptes rendus*, 36(1853), pp.454-459.

15) 前出, p.217-219.

16) 高木貞治『解析概論』改訂第 3 版第 18 刷, 1976 年, 岩波書店.

17) 藤原松三郎『微分積分学第一巻』第 8 版, 1967 年, 内田老鶴圃新社

18) Bertrand (1864), Hermite (1873), Picard (1942) らの教科書は, いずれも無限小を導入して解析学を導入している.

付録

(Cauchy の極限の定義) : Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

(Cauchy の無限小の定義) : Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petit.* Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

(Cauchy の関数の連続性の定義) : Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différenence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valuer de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ rester-a continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

(「Cauchy の収束判定法」に相当する箇所) : D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \&c \tag{1}$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s: en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites.

(Goursat による 連続性の定義; *Cours d'analyse mathématique* (1924), p.13.)
Continuité- La définition moderne de la continuité est due également à Cauchy.

Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle *(a,b)*; prenons une valeur x_0 comprise dans cet intervalle et une value voisine $x_0 + h$ comprise dans le même intervalle. Si la différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$ tend vers zéro, lorsque la valeur absolue de h tend vers to zéro, la fonction $f(x)$ sera dite *continue pour la valeur* x_0. D'après la définition même de la limite, on peut dire encore qu'*une fonction* $f(x)$ *est continue pour* $x = x_0$, *si à tout nombre positif* ε, *aussi petit qu'on le suppose, on peut faire correspondre un autre numbre positiv* η *tel qu'on ait*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

pour toute valeur de h *moindre que* η *en valeur absolue.*