実単純リー環の分類
(故村上信吾氏に)

杉浦光夫

はじめに

実単純リー環の分類論は，E.カルタンに始まる．彼は1914年の論文[5]において，実単純リー環は，複素単純リー環$\mathfrak{g}$を実リー環$\mathfrak{g}_R$と考えたものと，$\mathfrak{g}$の実形$\mathfrak{l}$となるもの($\mathfrak{l}^C=\mathfrak{g}$となるもの)の二種類があることを示した．複素単純リー環$\mathfrak{g}$の分類は，キリング[21]とカルタン[4]によって与えられているから，前者は既知であり，問題となるのは，$\mathfrak{g}$の実形$\mathfrak{l}$の分類である．カルタンはこの実形の分類を，$\mathfrak{l}$に関する$\mathfrak{g}$の複素共役写像の形を決定することによって実行した．ただしこの決定は，計算によって共役写像の可能な形を定めたものであって，これを遂行したカルタンの計算能力は強力であることが実証されたが，理論的には共役写像の定まり方が，計算というブラックボックス中に隠れていて明示されていないという不満が後になって提出された．このカルタンの研究によって，実単純リー環がどれだけあるかは確定したのであるが，実単純リー環の分類論は，これによって終りにはならなかった．上記の不満を追求して行くことになり，新しい分類の方法がいくつか発見されて行ったからである．

実単純リー環の分類
(故村上信吾氏に)

杉浦光夫

はじめに

実単純リー環の分類論は，E.カルタンに始まる．彼は1914年の論文[5]において，実単純リー環は，複素単純リー環$\mathfrak{g}$を実リー環$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$と考えたものと，$\mathfrak{g}$の実形$\mathfrak{l}$となるもの($\mathfrak{l}^c=\mathfrak{g}$となるもの)の二種類があることを示した．複素単純リー環$\mathfrak{g}$の分類は，キリング[21]とカルタン[4]によって与えられているから，前者は既知であり，問題となるのは，$\mathfrak{g}$の実形$\mathfrak{l}$の分類である．カルタンはこの実形の分類を，$\mathfrak{l}$に関する$\mathfrak{g}$の複素共役写像の形を決定することによって実行した．ただしこの決定は，計算によって共役写像の可能な形を定めたのであって，これを遂行したカルタンの計算能力は強力であることが実証されたが，理論的には共役写像の定まり方が，計算というブラックボックス中に隠れていて明示されていないという不満が後になって提出された．このカルタンの研究によって，実単純リー環がどれだけあるかは確定したのであるが，実単純リー環の分類論は，これによって終りにはならなかった。上記の不満を追求して行くことになり，新しい分類の方法がいくつか発見されて行ったからである．

カルタン自身も後になってもう一つの実形の分類法を発見した。彼は[7]において、対称リーマン空間の概念を発見し、その組織的研究に乗出し、数年の間に大きな理論を建設した。

それによると、運動群が半単純群である、既約対称リーマン空間では、コンパクトなものと、非コンパクトなものとが対になっているのである。非ユークリッド空間に楕円型のものと双曲型のものとがあるという発見は、このカルタンの見出した双対性の最初の例なのであった。もう少し具体的に述べると、この対になっている空間の運動群のリー環の間には次の関係がある。コンパクトな既約対称空間Mの運動群Gはコンパクト半単純群で、そのリー環$\mathfrak{g}$の位数2の自己同型τが存在し、τの固有値$+1, -1$に対応する固有空間を$\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$とするとき、$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$であり、$\mathfrak{g}_0$は$G$の一点に関する固定部分群のリー環である。このとき、$\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_0\oplus i\mathfrak{g}_1$を作ると、これは$\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{k}$の非コンパクト実形であり、$\mathfrak{l}$はカルタンの双対性により$M$に対応する非コンパクト対称空間の運動群のリー環となる。このとき$\mathfrak{g}$が単純でないのは、上の$\mathfrak{l}$が複素単純リー環を実リー環と見たものであるときに限る。それ以外のときは$\mathfrak{g}$は単純リー環で、対応する$\mathfrak{l}$は、$\mathfrak{g}^c=\mathfrak{k}$の非コンパクト実形となる。

このように運動群が半単純であるような既約対称リーマン空間の分類は、実単純リー環の分類と一対一に対応している

タであった.

このことから，カルタンは[10]において，複素単純リー環$\mathfrak{g}$の非コンパクト実形$\mathfrak{l}$を同型を除いてすべて決定するには，$\mathfrak{g}$の一つのコンパクト実形$\mathfrak{u}$の位数2の自己同型τによる固有空間分解$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0\oplus\mathfrak{u}_1$から，$\mathfrak{l}=\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1$を作ればよいことを指摘した.

さらにこうして得られる二つの非コンパクト実形$\mathfrak{l},\mathfrak{l}'$が同型となるのは，出発点の対合的自己同型$\tau,\tau'$が$\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}$内で共役であるときでありそのときに限ることもカルタンは示している。このコンパクト実形$\mathfrak{u}$の位数2の自己同型を定めるというのが，カルタンによる実形分類の第二の方法である.（$\mathfrak{g}$のコンパクト実形は，$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$により互いに共役であり同型を除いて一意に定まることは，ワイル[51]が示した.)

本稿では，実単純リー環の分類について重要な研究をした次の五人の分類の方法を紹介することを目的としている.

1. E. カルタン，　2. ガントマッヘル

3. 村上信吾，　4. 荒木捷朗，　5. カッツ.

この内カルタンの第一の方法である，実形$\mathfrak{l}$に関する複素共役写像σの決定を用いているのは，荒木[1]である。荒木はそのベクトル部分最大のカルタン部分環に関するルート系に対するσの作用（ガロア群$Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$の作用と考えられる）を考え，それをルート系のディンキン図形へのσの作用として可視化し

な佐武図形を用いて分類を実行した. これによってカルタン[5]のブラックボックスの部分はなくなり, どのような機構によって, 対称空間の可能な形が決定されるのかが明示されるようになったのである.

ガントマッヘル, 村上, カッツの三人は, カルタンの第二の方法に従い, コンパクト実形の位数2の自己同型を共役を除き決定している. またこの三人は, 非コンパクト実形のトーラス部分最大のカルタン部分環に対応する$\mathfrak{k}$のカルタン部分環に関するルートを考えている. この三人の方法を比較すると共通な点も多いが, 後の著者程整理されて居り, リー群の構造に対する依存度が少くなっている. 詳しくは各人の項を見られたい.

本稿では, 複素単純リー環の理論は既知として話を進めているが, 実単純リー環の理論は複素単純リー環と密接に関連して居り, 前者の理論の進展は直ちに後者に影響を与えることを注意しておきたい. 例えばガントマッヘルの研究[16][17]には, ワイル[51]の影響が著しい. またディンキン[14]の単純ルートとディンキン図形の概念は, 以後の3人の研究全部の基礎となっている. ガントマッヘルには, まだ単純ルートの概念がないので, それに近い概念を導入しているが, 単純ルート程うまくは働いていない. またカッツ[23]では, 複素半単純リー

環の生成元とその間の基本関係に関するシュヴァレー[12]，ハリッシュ-チャンドラ[19]，セール[37]の定理が重要な役割を演じている．

荒木[1]の方法は，佐武[33]やティッツ[46]の，代数的閉体でない体上の単純線型代数群の分類理論の実数体の場合と見なすことができる．またカッツ[2]の方法は，アフィン型のカッツ・ムーディ・リー環(以下アフィン・リー環という)の理論に基づいている．

1914年にカルタン[5]が実単純リー環がどれだけあるかを決定したとき，実単純リー環の分類理論は終結したのではなく，その後にも多くの研究が行われたこととの必然性を，読者が了解して下されれば，本稿の第一の目的は達せられたことになる．

第3節の村上の方法の記述は，村上氏が阪大で講義をされたときのノートに基づいている．村上の原論文[29]では，特に前半の内部自己同型の対合に関する部分では，ボレル・ド・ジーベンタール[2]の結果だとして証明が省略されているが，村上の証明は[2]と異なって居るので，記録して置くことも無駄ではないと考える．ただし命題1，2は杉浦が補ったものである．

村上氏は昨年亡くなられたので，記念に本稿を村上氏に捧げる．

3，4，5節では，細部の証明まで書いたので大変長くなったことを読者にお詫びする．

1. E.カルタン

E.カルタンは，1914年に発表した論文「有限次元実単純連続群」[5]において，今日の言葉で言えば，実単純リー環の分類に成功した。カルタンの結果が正しいことは，ラルディ[26]が検算して確めた。2節以下で述べる諸研究もこれを確認した。

カルタンの1925年以前の論文で，「有限次元連続群」という時には，実際に扱っているのは，リーの理論によってそれを定める無限小変換達なのである。群がr次元であるとき，r個の無限小変換が現われるが，その1次結合の全体が，今日のリー環を作るのである。リー環という言葉は，ワイルが「典型群」(1939)の中で始めて用いたので，1914年のカルタンの論文に用いるのは，時代錯誤なのだが，便宜上簡単のために，ここでこの言葉を用いる。カルタンの実際やっていることは，今日リー環でやっているのと同じなので，言葉だけ群と言って見ても始まらないからである。

カルタンの出発点は，キリングの研究[24]の不完全な所や誤りを訂正した彼の学位論文[4]において，複素単純リー環の分類を手中にしていたことであった。カルタンは最初に次のことに注意する

定理　任意の r 次元複素単純リー環 M に対し，M を実リー環と考えたものを $M_{\mathbb{R}}$ とすれば，$M_{\mathbb{R}}$ は $2r$ 次元実単純リー環である．

カルタンの証明は，ルート空間への分解を用いるものであるが，初等的に証明できる。（$M_{\mathbb{R}}$ のイデアル $\neq 0$中次元最小のものの J を一つとるとき，$J+iJ=M$ となる。iJ も $M_{\mathbb{R}}$ のイデアルだから $B=J\cap iJ$ もそうで $B\subset A$ だから，$B=0$ または $B=A$ である。$B=0$ とすると，$[J,iJ]\subset J\cap iJ=0$ となり，$L=J+iJ$ は可換となり単純という仮定に反する。従って $B=J$ だから，$iJ=J$ となり J は単純な M のイデアル $\neq 0$ 故，$J=M=M_{\mathbb{R}}$ で，$M_{\mathbb{R}}$ は単純．）

こうして実単純リー環の大きなクラスとして，複素単純リー環を実リー環と見なしたものがあることがわかった。これは既知のものである。

別の形の実単純リー環も存在する。$SL(n,\mathbb{C})=\{g\in M_n(\mathbb{C})\mid \det g=1\}$ のリー環 $sl(n,\mathbb{C})=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid \mathrm{Tr}\,X=0\}$ は，複素単純リー環であるが，ここで行列成分をすべて実数として得られる実部分リー環 $sl(n,\mathbb{R})=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid \mathrm{Tr}\,X=0\}$ は，実単純リー環である。

一般に次のように定義する．

定義　複素リー環 M に対し，L が次の (a) (b) をみたすとき，L は M の<u>実形</u>であるという：

(a)　L は実リー環 $M_{\mathbb{R}}$ の部分リー環である。

(b) 実ベクトル空間として，$M_R = L \oplus iL$ (直和) である．

これは L の複素化が M と一致するということに他ならない．

カルタンは，キリングの与えた複素単純リー環 M の基底 (X_i) $(1 \leq i \leq r)$ の間の構造定数 c_{ij}^{k} （$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k} X_k$）がすべて実数であることに注意し，この基底 (X_i) の実係数一次結合の全体 L は，実単純リー環になることを知った。L は M の実形の一つであり，カルタンはこれを正規実形と呼んだ．$sl(n, R)$ は，$sl(n, C)$ の正規実形である．

しかし正規実形以外の実形も存在する。カルタンは，M の種々の実形を区別するための数値不変量として特性数(caractère)を導入した。これはキリング形式 $Q(X) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}X)^2$ の符号定数を (p, q) とするとき，その差 $\delta = p - q$ のことである。

正規実形の特性数は，その階数 l に等しい。一方カルタンは，各複素単純リー環 M (r 次元とする)は，特性数が $-r$ であるような実形 L_u を持つことを注意している。L_u は，そのキリング形式が負値定符号となるような M の実形であり，今日コンパクト実形と呼ばれているものである。

カルタンは，「同一の複素単純リー環の実形達は，一般に(en général)その特性数によって完全に分類される」と述べている．

大部分の場合同型でない二つの実形の特性数は異なるが，ヘルガソン[20] は，$o(18, C)$ の二つの実形 $o(12, 6)$ と $so^*(18)$ は，

共に特性数は−9であるが同型でないことを注意した。

さてカルタンのこの論文での基本方針は，任意の実単純リー環Lは，次の(a)または(b)のどちらかであり，(a)の場合は学位論文[4]によって既知だから，(b)の場合だけを考えるというのである。

(a) Lは複素単純リー環Mを実リー環と考えたものである。

(b) Lは複素単純リー環Mの実形である：$L^c = M$.

つまりカルタンは，実単純リー環は(a)または(b)のどちらかだといっているのである。

このことはそれ程難しいことではなく初等的な証明ができるので，次にその証明を述べておこう。これは本質的にカルタンの証明と同じである。

これを示すには，任意の実単純リー環Lに対し，その複素化L^cを考えればよい。L^cは次の(c)(d)の一方をみたす。

(c) L^cは複素単純リー環である。

(d) L^cは複素単純リー環ではない。

(c)の場合には，Lは(b)をみたす。(d)の場合には

$$L^c = A \oplus B,\ A, B\text{は単純イデアル},$$

となる。そしてAまたはBのどちらかを$\mathbb{R}$上のリー環と考えたものが，最初に与えられLと同型になる。従ってこの場合Lは(a)をみたす。

そこで以下では(b)の場合を考える。(b)の場合 $L^c = M$ だから、Mの任意の元Zは、前の実形の定義の条件(b)により

$$Z = X + iY, \quad X, Y \in L$$

と一意的に表わされる。このとき写像 $\sigma : M \to M$ を

$$\sigma Z = X - iY, \quad X, Y \in L$$

によって定義する。このとき σ は半線型写像で

(1) $\quad \sigma(Z + W) = \sigma Z + \sigma W, \quad \sigma(aZ) = \bar{a}(\sigma Z), \quad a \in \mathbb{C}$

をみたす。さらに

(2) $\quad \sigma([Z, W]) = [\sigma Z, \sigma W], \quad \sigma^2 = I$

をみたすことも直ちに確められる。この σ を、実形 L に関する $L^c = M$ の複素共役写像という。σ によって、$L^c = M$ の中で L は

(3) $\quad L = \{ Z \in M \mid \sigma Z = Z \}$

によって特徴付けられる。逆に $\sigma : M \to M$ が(1)(2)をみたせば、σ は(3)によって定義される M の実形 L に関する複素共役写像である。

そこでカルタンは、各複素単純リー環 M の実形をすべて求めることを、M の可能な複素共役写像をすべて求めることにより実行したのである。ただし M の実形を同型を除きすべて求めることが目標であるから、M の実形中同型でないものを求めればよい。

具体的には、Mのルート空間分解を用いて、共役写像σを基底によって表現し、σの引起すルートの互換（位数2の置換）と、ルート・ベクトルX_αの因子λ_α（$\sigma X_\alpha = \lambda_\alpha X_{\sigma\alpha}$）によって$\sigma$を捕える。

今複素単純リー環Mとその一つの実形Lを考える。Lのカルタン部分環L_0の複素化L_0^cは、Mの一つのカルタン部分環M_0である。一次形式$\alpha : M_0 \to \mathbb{C}$で、$M_\alpha = \{X \in M \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (\forall H \in M_0)\} \neq 0$となるものを、$M$の$M_0$に関するルートといい、その全体を$\Delta$とすると、次の直和分解（ルート空間分解）が生ずる：

(4) $$M = M_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta}{}^{\oplus} M_\alpha, \quad \dim M_\alpha = 1 \quad (\forall \alpha \in \Delta)$$

(5) このとき $$[M_\alpha, M_\beta] \subset M_{\alpha+\beta}, \quad (\forall \alpha, \forall \beta \in \Delta_0 = \Delta \cup \{0\})$$

が成立つ。特に

(6) $$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha, \quad (\forall H \in M_0, \ \forall X_\alpha \in M_\alpha)$$

である。今特に$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$を$M$のキリング形式とし、

(7) $$X_\alpha \in M_\alpha, \ X_{-\alpha} \in M_{-\alpha} \text{ を } B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$$

をみたすようにとるとき、

(8) $$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \in M_0$$

となるが、$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$であるから、(6)(7)により

(9) $$B(H, H_\alpha) = B([H, X_\alpha], X_{-\alpha}) = \alpha(H), \quad (\forall H \in M_0, \forall \alpha \in \Delta)$$

となる。今Mの実形Lに関する共役写像をσとし、各$\alpha \in \Delta$に対して、$\sigma\alpha : M_0 \to \mathbb{C}$ を

$$(10)\qquad (\sigma\alpha)(H)=\overline{\alpha(\sigma H)}\ ,\quad (\forall H\in M_0)$$

によって定義するとき，(6)の両辺にσを作用させて，

$$(11)\qquad \sigma\alpha\in\Delta\ \ (\forall\alpha\in\Delta)\ ,\quad \sigma M_\alpha=M_{\sigma\alpha}$$

となることがわかる。そこで各$\alpha\in\Delta$に対して(7)をみたすように$0\neq X_\alpha\in M_\alpha$を選んでおくとき，

$$(12)\qquad \sigma X_\alpha=\lambda_\alpha X_{\sigma\alpha}\ ,\quad 0\neq\lambda_\alpha\in\mathbb{C}\ .\ (\forall\alpha\in\Delta)$$

となるλ_αが定まる。すぐわかるように，(12)から

$$(13)\qquad \mathrm{ad}(\sigma X)=\sigma\circ\mathrm{ad}X\circ\sigma^{-1}$$

である。そして$\mathrm{ad}X$のMの基底(X_i)に関する行列が$A=(a_{ij})$であるとすれば，$\mathrm{ad}(\sigma X)$の基底(σX_i)に関する行列は$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$である。このことから

$$(14)\qquad B(\sigma X,\sigma Y)=\overline{B(X,Y)}\ ,\quad (\forall X,\forall Y\in M)$$

となる。従って(7)(12)から

$$(15)\qquad \lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1\quad (\forall\alpha\in\Delta)$$

である。また$\sigma^2=I$だから

$$(16)\qquad \overline{\lambda}_\alpha\lambda_{\sigma\alpha}=1\ ,\quad \lambda_\alpha\cdot\overline{\lambda}_{\sigma\alpha}=1\quad (\forall\alpha\in\Delta)$$

となる。さらに

$$(17)\qquad B(H,\sigma H_\alpha)=\overline{B(\sigma H,H_\alpha)}=\overline{\alpha(\sigma H)}=(\sigma\alpha)(H)=B(H,H_{\sigma\alpha})\ (\forall H\in M_0)$$

である。$B\,|\,M_0\times M_0$は正則だから，(17)より

$$(18)\qquad \sigma H_\alpha=H_{\sigma\alpha}\qquad (\forall\alpha\in\Delta)$$

が成立つ。$V=\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}H_\alpha$は$M_0$の一つの実形である。そこでσ

のM_0上への作用は、(18)により　σの引起すΔの互換(位数2の置換) $\alpha\mapsto\sigma\alpha$ によって一意的に定まる。またσの $\sum_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ 上への作用は、互換 $\alpha\mapsto\sigma\alpha$ と(12)の因子 λ_α $(\alpha\in\Delta)$ で定まる。

そこでカルタンは、可能な互換 $\alpha\mapsto\sigma\alpha$ と因子系 (λ_α) を定めて行くのであるが、それは相当面倒な計算と場合分けを必要とする。以下最小次元の単純リー環 $M=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})=\{X\in M_2(\mathbb{C})\mid \mathrm{Tr}\,X=0\}$ に対して、σの決定される様子を見て見よう。

$M=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底として

$$(19)\qquad H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

をとることができる。その間の括弧積は次のようになる。

$$(20)\qquad [H,X]=X,\quad [H,Y]=-Y,\quad [X,Y]=H.$$

従って $M_0=\mathbb{C}H$ が、Mのカルタン部分環で、(19)第一式のHに対して

(21)　　$\alpha(H)=1$ となる M_0 上の一次形式をとると $\Delta=\{\alpha,-\alpha\}$ がルート系である。今Mの実形Lを一つとり、Lに関するMの共役写像をσとする。このとき(11)により $\sigma\alpha\in\Delta=\{\alpha,-\alpha\}$ だから、

(22)　　(a) $\sigma\alpha=\alpha$,　　(b) $\sigma\alpha=-\alpha$

のどちらかになる。

(a)の場合。

(23)　　$\sigma X=\lambda_\alpha X$,　$\sigma Y=\lambda_{-\alpha} Y$,　但し $\lambda_{\pm\alpha}\in\mathbb{C}$

となる。このとき(15)(16)が成立つ。今 $\sigma\alpha=\alpha$ だから(16)は

(24) $\quad \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\alpha = 1 \,, \quad |\lambda_\alpha| = 1$

λ_αの平方根の一つをρ_αとするとρ_α^{-1}は$\lambda_{-\alpha}$の平方根である。

(25) $\quad U = \rho_\alpha X \,, \quad V = \rho_\alpha^{-1} Y$

とおくとき、(H, U, V)はMの基底で、σで不変である。そして

(26) $\quad [H, U] = U \,, \quad [H, V] = -V \,, \quad [U, V] = H$

となる。そこでこの場合の実形Lは、

(21) $\quad L = \mathbb{R}U + \mathbb{R}V + \mathbb{R}H$

であり、(26)の括弧積の形が(20)と同じだから

(22) $\quad L \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}H$

である。

(b)の場合.

今度は、$\sigma M_\alpha = M_{-\alpha}$, $\sigma M_{-\alpha} = M_\alpha$となるから、

(23) $\quad \sigma X = \lambda_\alpha Y \,, \quad \sigma Y = \lambda_{-\alpha} X \,, \quad 0 \neq \lambda_{\pm\alpha} \in \mathbb{C}$

となる$\lambda_{\pm\alpha}$がある。この$\lambda_{\pm\alpha}$も(15) $\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1$と(16) $\bar{\lambda}_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1$をみたすから、$\lambda_\alpha / \bar{\lambda}_\alpha = 1$すなわち

(24) $\quad \lambda_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

をみたす。従ってこの場合

(イ) $\lambda_\alpha > 0$, (ロ) $\lambda_\alpha < 0$

の二つの場合がある。

(イ)の場合.

(25) $\quad U = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X = \sqrt{\lambda_{-\alpha}} X \,, \quad V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{-\alpha}}} Y = \sqrt{\lambda_\alpha} Y$

(26) $$\sigma U = V,\quad \sigma V = U,\quad \sigma H = -H$$

となるから，

(27) $$W = \frac{1}{\sqrt{2}}(U+V),\quad Z = \frac{i}{\sqrt{2}}(U-V)$$

とおくとき，

(28) $$\sigma W = W,\quad \sigma Z = Z,\quad \sigma(iH) = iH$$

となる。従ってこのとき，σに対応するMの実形L_1は

(29) $$L_1 = \mathbb{R}W + \mathbb{R}Z + \mathbb{R}\cdot iH$$

である。そして基底の間の括弧積は

(30) $$[iH, W] = Z,\quad [iH, Z] = -W,\quad [W, Z] = -iH$$

となる。

この場合の実形L_1は，不定符号エルミット形式$z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$を不変にする$\mathbb{C}^2$の1次変換全体の作る群$U(1,1)$の交換子群$SU(1,1)$のリー環$\mathfrak{su}(1,1)$と同型である。$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$とおくとき，

(31) $$\mathfrak{su}(1,1) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^*H + HX = 0,\ \mathrm{Tr}\,X = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ b-ic & -ia \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

となるから，

(32) $$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

が，$\mathfrak{su}(1,1)$の基底であり，その間の括弧積は，

(33) $$[A, B] = C,\quad [A, C] = -B,\quad [B, C] = -A$$

となる。(30)と(33)を比較すると，$\varphi: \mathfrak{su}(1,1) \to L_1$を，

(34) $\varphi(A) = iH, \quad \varphi(A) = W, \quad \varphi(C) = Z$

となる一次写像 φ が、リー環の同型写像となる：

(35) $\mathfrak{su}(1,1) \cong L_1$

実は $n=2$ の場合の特殊性により、

(36) $\mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$

が成立つ。よく知られているように $SL(2,\mathbb{R})$ は上半平面のポアンカレ計量による運動群で、$SU(1,1)$ は単位円板のポアンカレ計量による運動群である。上半平面と単位円板は、いわゆるケイリー変換 $w = \frac{z-i}{z+i}$ によって写り合う。そこでその運動群のリー環について、次の関係が成立つ：

(37) $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ とするとき、$C^{-1} \circ \mathfrak{su}(1,1) \circ C = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

(ロ) のとき、

(38) $U = -\sqrt{-\lambda_\alpha}\, X, \quad V = -\sqrt{-\lambda_\alpha}\, Y$

とおくと、$\sigma U = -V$, $\sigma V = -U$, $\sigma H = -H$ となるので

(39) $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(U - V)$, $Q = \frac{i}{\sqrt{2}}(U + V)$, $R = iH$ とおくとき

(40) $\sigma P = P, \quad \sigma Q = Q, \quad \sigma R = R$

となるから、

(41) $L_2 = \mathbb{R}P + \mathbb{R}Q + \mathbb{R}R$

は、M の一つの実形である。そしてその間の括弧積は

(42) $[R, P] = Q, \quad [R, Q] = -P, \quad [P, Q] = R$

この実形 L_2 は，定符号エルミット形式 $z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$ を不変にする $\mathbb{C}^2$ の1次変換の全体 $U(2)$ の交換子群 $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ と同型である。

(43) $$\mathfrak{su}(2)=\{X\in M_2(\mathbb{C})\mid X^*+X=0,\ \mathrm{Tr}\,X=0\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} ia & b+ci \\ -b+ci & -ia\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

であるから

(44) $$D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix},\quad E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad F=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$$

が $\mathfrak{su}(2)$ の基底である。その間の括弧積は，

(45) $$[D,E]=F,\quad [D,F]=-E,\quad [E,F]=D$$

となる。従って(42)と(45)を比較すると

$$\varphi(R)=D,\quad \varphi(P)=E,\quad \varphi(Q)=F$$

となる1次変換 φ により，

(46) $$L_2\cong\mathfrak{su}(2)$$

となることがわかる。以上により $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の実形は，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ か $\mathfrak{su}(2)$ のどちらかに同型になることが証明された。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の正規実形で，$\mathfrak{su}(2)$ はコンパクト実形（キリング形式が負値定符号）である。この二つの実形の指性数は，それぞれ $\delta=1$，$\delta=-3$ であり，この二つは同型でない。

カルタンは，すべての複素単純リー環 M の可能な実現をすべて決定することに成功した。それは彼の強靭な計算

タによるものであった。計算は確かに強力であるが，見通しがきかないという難点があった。キリング・カルタンの理論では，複素単純リー環を決定する不変量として，ルート系またはカルタン整数という単純明快なものを提出することができた。複素単純リー環の実形を分類する問題では，カルタンは，実形を決定するものとして対合写像を取上げたのであったが，これは実形の概念を言い換えたものにすぎず，ルート系のような明証性を持たない。後の研究者が，カルタンのこの論文の結果には感嘆しながらも，その方法に不満を抱いたのは，専らこの点にあった。彼等は実形の分類を，複素単純リー環Mのルート系と直接結びつけた形で，明快に記述する道を求めた。以下の数節でそのような研究を紹介する。

一方カルタンの計算自体を，現代化し分り易くした研究としてハウスナー・J.T.シュワルツ[53]の本がある。

ここではカルタンの得た結果だけを述べておこう。各実形を区別するために，カルタンが後に対称リーマン空間に関する論文[9]で導入し，現在でも用られる AI, AII 等の記号を用いる。(細いことを言うと[9]では，運動群が単純リー群であるような非コンパクト既約対称リーマン空間を対象としているので，コンパクト実形が入っていない。ここでは便宜上例えばコンパクト実形 $\mathfrak{su}(2)$ は AIII 型の中に入れておく。)

A 型

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ $(n\geqq 2)$ の実形には，次の三つのタイプのものがある。

AI. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid \mathrm{Tr}\,X=0\}$. 正規実形.

AII $n=2m$ （偶数）のときのみ. 4元数一般線型群 $GL(m,\mathbb{H})$ の交換子群 $SL(m,\mathbb{H})$ のリー環. $\mathbb{H}^m=\mathbb{C}^{2m}=\mathbb{C}^n$ と考えて $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の部分リー環として実現される.

AIII$_p$ $p+q=n$ となる $p,q\geqq 0$ に対して. エルミット形式 $\sum_{i=1}^{p}z_i\bar{z}_i-\sum_{j=p+1}^{n}z_j\bar{z}_j$ を不変にする1次変換全体の作る群 $U(p,q)$ の交換子群 $SU(p,q)$ のリー環 $=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X^*H_p+H_pX=0,\ \mathrm{Tr}\,X=0\}$ $H_p=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}$.
$X^*={}^t\overline{X}$. $SU(p,q)\cong SU(q,p)$ だから $[\frac{n}{2}]\geqq q\geqq 0$ の範囲だけでよい.

B 型

$\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C})=\{X\in M_{2n+1}(\mathbb{C})\mid {}^tX+X=0\}$ の実形.

BI$_p$ $p+q=2n+1$ となる整数 $p,q\geqq 0$ に対して. 2次形式 $\sum_{j=1}^{p}x_j^2-\sum_{k=p+1}^{n}x_k^2$ を不変にする実1次変換全体の作る群 $O(p,q)$ のリー環 $=\{X\in M_{2n+1}(\mathbb{R})\mid {}^tXH_p+H_pX=0\}$. $H_p=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}$.

C 型

n 次複素斜交群 $Sp(n,\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})=\{X\in M_{2n}(\mathbb{C})\mid {}^tXJ+JX=0\}$ の実形. ただし $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$. （$I_n$ は n 次単位行列）

CI. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})=\{X\in M_{2n}(\mathbb{R})\mid {}^tXJ+JX=0\}$. 正規実形.

CII　$\mathbb{H}^n$上の符号定数(p,q)のエルミット形式を不変にする1次変換全体の作る群$Sp(p,q)$のリー環。カルタンは$\mathbb{C}^{2n}$上で一つの正則交代双一次形式と一つのエルミット形式を不変にする一次変換群としてとらえている。

D型

$O(2n,\mathbb{C})$の実形。

DI.　$\mathbb{R}^{2n}$上で符号定数(p,q)の正則2次形式を不変する1次変換全体の作る群$O(p,q)$のリー環。

DIII　$\mathbb{H}^n$上の正則交代エルミット形式を不変にする一次変換全体の作る群のリー環。カルタンは$\mathbb{C}^{2n}$上の、極大指数の正則2次形式および正則エルミット形式を不変にする1次変換全体の作る群のリー環としてとらえている。

〔カルタンは、DIの中で$p=1$または$q=1$となるものをDIIとした、これは対応する対称リーマン空間が定曲率となるため、特別扱いしたのである。〕

例外リー環

カルタンは、各複素例外単純リー環Mに対し、その実形を具体的にすべて与えている。これはカルタンの大きな業績であるが、ここでは結果のみを記す。

Lの内部自己同型群の一つの極大コンパクト部分群のリー環をK，キリング形式Bに関するその直交空間をPとするとき $L=K\oplus P$ で，BはK上負値，P上正値定符号である(カルタン分解).

例外リー環の実形の表

L	$L^c=M$	dim P	dim K	δ	dim L
EI	E_6	36	42	−6	78
EII		38	40	−2	78
EIII		46	32	14	78
EIV		52	26	26	78
e_6		0	78	−78	78
EV	E_7	63	70	−7	133
EVI		69	64	5	133
EVII		79	54	25	133
e_7		0	133	−133	133
EVIII	E_8	120	128	−8	248
EIX		136	112	24	248
e_8		0	248	−248	248
FI	F_4	24	28	−4	52
FII		36	16	20	52
f_4		0	52	−52	52
GI	G_2	8	6	2	14
g_2		0	14	−14	14

訂正　実単純リー環の分類　杉浦光夫

(津田塾大学 数学計算機科学研究所報 20)

この論文の中の「例外リー環の実形の表」(178ページ)を下の如く訂正する.

例外リー環の実形の表

L	L^c	dim K	dim P	δ	dim L
EI	E_6	36	42	6	78
EII		38	40	2	78
EIII		46	32	−14	78
EIV		52	26	−26	78
e_6		78	0	−78	78
EV	E_7	63	70	7	133
EVI		69	64	−5	133
EVII		79	54	−25	133
e_7		133	0	−133	133
EVIII	E_8	120	128	8	248
EIX		136	112	−24	248
e_8		248	0	−248	248
FI	F_4	24	28	4	52
FII		36	16	−20	52
f_4		52	0	−52	52
GI	G_2	6	8	2	14
g_2		14	0	−14	14

例外リー群およびリー環を，ケイリー環，ジョルダン環等の非結合環を用いて具体的に構成することについては，フロイデンタール[15]，ジェイコブソン[21]，シェファー[34]，横田[52]等を見られたい

カルタンは，1926年に「平行移動が曲率を不変にするリーマン空間について」[7]という論文を発表したが，これは彼の対称リーマン空間についての大きな研究の始まりであった。この第一論文において既にカルタンは，既約な対称リーマン空間がどれだけあるかという問題は，実単純リー群がどれだけあるかという問題と同値であることを指摘している。これによって彼の1914年の論文は，新たに重要な意義を持つことが示されたのであった。

また対称空間の理論は，実単純リー環の分類に関して，新しい方法を与えた。ユークリッド空間のような平坦な空間を除くと，対称リーマン空間の運動群は，半単純リー群である.

そしてそのような空間の中で，既約なもの（局所的に直積に分解できないもの）は，断面曲率が正のものと負のものとが（局所同型類として）一対一に対応して居り，前者はコンパクト，後者は非コンパクトである。楕円型と双曲型の非ユークリッド空間は，この対応の最初の例なのであった。これが対称リーマン空間の双対性と呼ばれる事実である。この双対性に

よって対応する空間 X, X' の運動群 G, G' のリー環を L, L' とするとき, L と L' の間には次のような著しい関係がある。適当に X, X' の点 p, p' を選ぶとき, p, p' に関する G, G' の固定部分群のリー環は一致する。それを K とし, L, L' におけるキリング形式に関する直交空間を N, P とするとき, 次の(47)(48)

(47) $\qquad L = K \oplus N, \quad L' = K \oplus P, \quad P = \sqrt{-1}N.$

(48) $\qquad [K, K] \subset K, \ [K, N] \subset N, \ [N, N] \subset K, \ [K, P] \subset P, \ [P, P] \subset K$

このことは, L, L' の直和分解(47)が, L, L' の位数2の自己同型写像で, θ の固有値 $1, -1$ に対する固有空間分解となっていることを意味する。そしてコンパクト半単純群 G のリー環の任意の位数2の自己同型写像での固有空間分解は, 必らずあるコンパクト対称リーマン空間に上のような関係で対応する。

L がコンパクト単純リー環(キリング形式が負値定符号であるような実単純リー環)であるとき, 上の(47)(48)をみたすような L' は, L の複素化 $L^c = M$ の非コンパクト実形である(てすいと33)。

そして M のすべての非コンパクト実形は, 上のようにコンパクト実形 L の位数2の自己同型写像から, L' として得られる。それは1914年の論文との関連で言えば, L' に関する M の共役写像 σ は必らず M のあるコンパクト実形 U を不変にし, かつ M の二つのコンパクト実形 U と L は, M の内部自己同型群 $\mathrm{Int}\, M$ のある元 α によって, $\alpha U = L$ となることから導かれる。

このことをカルタンは，1929年の論文「閉単純群と開単純群」[10]で示した。こうして複素単純リー環 M のすべての非コンパクト実形を求める問題は，M のコンパクト実形の位数2の自己同型を定める問題に帰着された。しかしカルタンは，この方法で実形を分類するやり方を[10]では示していない。この第二の方法を実行することは後の数学者にまかされたのである。

2　ガントマッヘル

前節に述べたような，カルタンの実単純リー環 L の分類論の欠点を克服し，分類を L の複素化の構造特にそのルート系に結びつけて記述するという方向は，1939年のF.ガントマッヘルの論文[17]で，第一歩が踏み出された。

[17]ではリー環という言葉は用いられていないが，無限小リー群という言葉で，リー環が代数系として定義されているので，リー環という言葉を用いる。

ガントマッヘルの出発点は，カルタン[5]でも事実上基礎となっていた次の定理1である。

定理1.

任意の複素単純リー環 M に対して，次のA)またはB)という操作を施すことによって，すべての実単純リー環 L が得られる:

A) Mのすべての相異なる実形を求める。

B) MをR上のリー環$M_{\mathbb{R}}$と考える.

Mはカルタンの学位論文[4]により，分類されているから，Mの実形をすべて求めればよい。以下ガントマッヘルはA)の答を与える。その原理はカルタンが[10]で与えた定理で，前節最後に述べたように，Mのすべての実形を求めるのに，Mの一つのコンパクト実形L_uの位数2の自己同型写像をすべて求めることに帰着させる。ガントマッヘルは，この原理を対称空間の理論によらず，線型代数だけから導いた。

$\mathbb{C}$上の半単純リー環Mの一つのコンパクト実形L_uを固定する。Mのキリング形式を$B(X,Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$とする。Bを$L_u\times L_u$上に限定したものは，$L_u$のキリング形式で，負値定符号である。いま$L_u$のBに関する正規直交基底$e_1,\cdots,e_n$をとる。

(1) $$B(e_i,e_j)=-\delta_{ij}\ ,\quad 1\leqq i,j\leqq n$$

である。

今任意の正則一次変換$P\in GL(M)$をとり，$g_i=Pe_i\ (1\leqq i\leqq n)$とすると，$(g_i)_{1\leqq i\leqq n}$は，Mのもう一つの基底である。この基底$(g_i)$に関する構造定数$c_{ik}^{\ l}\ (1\leqq i,k,l\leqq n)$が

(2) $$[g_i,g_k]=\sum_{l=1}^{n}c_{ik}^{\ l}g_l$$

によって定義される。一般に$c_{ik}^{\ l}\in\mathbb{C}$であるが，特にすべて

の $c_{ik}^{l} \in R$ となる場合には，$L = \sum_{i=1}^{n} R g_i$ は M の実形である。また M のすべての実形はこうして得られる。

ここで二つの問題が生ずる。

1. 1次変換 P に対し，PL_u が M の実形となる条件は何か。
2. 二つの1次変換 P, P_1 が同型な実形を与える条件は何か。

この二つの問題の答は，それぞれ定理2，定理3で与えられる。

1次変換 $P \in GL(M)$ の，L_u の正規直交基底 (e_i) に関する行列表示を (p_{ki}) とする：

$$(3) \qquad Pe_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k .$$

以下基底 (e_i) を固定し，1次変換 P と行列 (p_{ki}) を同一視する：

$$P = (p_{ki})$$

今この1次変換 P から，もう一つの1次変換 $\bar{P}$ を

$$(4) \qquad \bar{P} e_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_{ki} e_k$$

によって定義する。$\bar{P} e_i = h_i \ (1 \leq i \leq n)$ とし，(h_i) に関する構造定数を (d_{ik}^{l}) とする：

$$(5) \qquad [h_i, h_k] = \sum_{l=1}^{n} d_{ik}^{l} h_l .$$

L_u の基底 (e_i) に関する構造定数を a_{ik}^{l} とするとき，L_u は実形だから $a_{ik}^{l} \in R$ である。

$(p_{ki})^{-1} = (q_{ki})$ とおくとき，

(6) $$c_{ik}^{s} = \sum_{j,r,l=1}^{n} p_{ji}\, p_{rk}\, a_{jr}^{l}\, g_{sl}$$

となる。d_{ik}^{s} も同様の式で表わされるが，p_{ji} の代りに $\bar{p}_{ji}$，g_{sl} の代りに $\overline{g_{s,l}}$ が入る。そこで $a_{jr}^{l} \in \mathbb{R}$ から

(7) $$d_{ik}^{l} = \bar{c}_{ik}^{l}, \quad 1 \leqq i, k, l \leqq n$$

となる。従って特に $PL_u = L$ が M の実形である場合には，すべての $c_{ik}^{l} \in \mathbb{R}$ であるから，(7) より

(8) $$d_{ik}^{l} = c_{ik}^{l} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqq i, k, l \leqq n$$

となる。このとき，$P^{-1} g_i = e_i \ (1 \leqq i \leqq n)$ だから

(9) $$\bar{P} P^{-1} g_i = \bar{P} e_i = h_i, \quad 1 \leqq i \leqq n$$

である。従ってこのとき，正則1次変換 $A = \bar{P}P^{-1}$ は，$L = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R} g_i$ を $L_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R} h_i$ に写す。この場合 (8) から L_1 も M の実形で構造定数が等しいから，L と同型であって，A は L を L_1 に写す同型写像であり，従って M の自己同型写像である。

定理 2

次の (a) と (b) は同値である。

(a) $P \in GL(M)$ に対し，PL_u は M の実形である。

(b) $\bar{P} \cdot P^{-1} = A$ は，M の自己同型写像である：$A \in \mathrm{Aut}\, M$

証明 (a) ⇒ (b) は上述。

(b) ⇒ (a) (9) により $A = \bar{P} \cdot P^{-1}$ は，(g_i) を (h_i) に写す。$A \in \mathrm{Aut}\, M$ だから，A は構造定数を変えない。従って $c_{ik}^{l} = d_{ik}^{l} = \bar{c}_{ik}^{l}$ $(1 \leqq i, k, l \leqq n)$ となるから，PL_u は M の実形である。∎

次に上の問題2の答を与える．二つの正則一次変換 $P, P_1 \in GL(M)$ が L_u の基底 (e_i) を $(g_i), (h_i)$ に写すとする：

(10) $$Pe_i = g_i, \quad P_1 e_i = h_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

いま $(g_i), (h_i)$ に関する構造定数をそれぞれ $(c_{ik}^{\ell}), (d_{ik}^{\ell})$ とする（すなわち (2), (5) が成立つとする）．いま次の (11) を仮定する：

(11) $L = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R} g_i$, $L_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R} h_i$ は M の実形で，$L \cong L_1$ である．

従って L_1 の基底

(12) $$\ell_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} h_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad r_{ij} \in \mathbb{R}$$

を適当にとれば，(ℓ_i) に関する構造定数は，(c_{ik}^{ℓ}) となる：

(13) $$[\ell_i, \ell_k] = \sum_{t=1}^{n} c_{ik}^{t} \ell_t.$$

(10), (13) から

(14) $$\ell_i = P_1 \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} e_j\right), \quad 1 \leq i \leq n$$

である。いま

(15) $$Re_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} e_j$$

となる1次変換 $R \in GL(M)$ をとると，$r_{ji} \in \mathbb{R}$ だから $\overline{R} = R$ である。(14)(15) から，次の (16) が成立つ：

(16) $$\ell_i = P_1 R e_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$P^{-1} g_i = e_i$ だから，(16) は次の (17) になる：

(17) $$\ell_i = P_1 R P^{-1} g_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(g_i) と (ℓ_i) に関する構造定数は，共に (c_{ik}^{ℓ}) であるから

(18) $$P_1 R P^{-1} = A_1 \in \mathrm{Aut}\, M$$

となる。$A_1^{-1}=A$ とおくと $A\in \mathrm{Aut}\,M$ であって、次の(19)が成立つ:

(19) $$P=AP_1R,\quad A\in \mathrm{Aut}\,M,\quad R=\overline{R}\in GL(M).$$

そこで次の定理3の(a)⇒(b)が証明された。

定理3

$P, P_1\in GL(M)$が、共に定理2の条件(b)をみたしているものとする。$PL_u=L$, $P_1L_u=L_1$ とおくとき、次の条件(a), (b)は同値である:

(a) 二つの実形 L と L_1は同型である: $L\cong L_1$

(b) $P=AP_1R$, $A\in \mathrm{Aut}\,M$, $R=\overline{R}\in GL(M)$ となるAとRが存在する。

証明. (a) ⇒ (b) 上述.

(b) ⇒ (a). いま条件(b)から $\overline{R}=R$ だから、$\overline{R}R^{-1}=I\in \mathrm{Aut}\,M$である。従って定理2により、$RL_u$ はMの実形である。一方 $\overline{R}=R$ だから、$Re_i\in L_u$ $(1\leqq i\leqq n)$ となるので、$RL_u=L_u$である。

そこで条件(b)から

$$L_1=P_1L_u=P_1RL_u,\quad AL_1=AP_1RL_u=PL_u=L$$

となる。ここで $A\in \mathrm{Aut}\,M$だから、$AL_1\cong L_1$であり、従って上式(第二式)より、$L_1\cong L$となる。∎

次に複素半単純リー環Mの実形の分類に関するカルタン[10]の基本定理を定理6として、線型代数により初等的に証明する。準備として定理2に現われた $A=\overline{P}\cdot P^{-1}$ の形の自己同型写像の極表示を証明する。

任意の $A\in \mathrm{Aut}\,M$ は，キリング形式を不変にするから，L_u（従って M）の正規直交基底 (e_i) に関して行列表示すれば

(20) $$\mathrm{Aut}\,M \subset O(n,\mathbb{C})$$

となる。いま $A\in \mathrm{Aut}\,M$ が，定理2の条件(b)をみたすとする：

(21) $$A=\bar{P}\cdot P^{-1}\in \mathrm{Aut}\,M,\quad P\in GL(M)$$

このとき，$A\cdot\bar{A}=\bar{P}P^{-1}P\bar{P}^{-1}=I$ だから，

(22) $$\bar{A}=A^{-1}$$

となる。一方 (20) により，$A\in O(n,\mathbb{C})$ だから

(23) $${}^tA=A^{-1}$$

であるから，(22)(23) より ${}^tA=\bar{A}$ である。${}^t\bar{A}=A^*$ とおくと

(24) $$A^*=A$$

である。すなわち A はエルミット行列であり，(23) から複素直交行列でもある。$H(n)$ で n 次エルミット行列全体の集合を表わす。

定理4.

任意の $A\in H(n)\cap O(n,\mathbb{C})$ は，

(25) $$A=Se^{i\Phi},\qquad S=\bar{S},\ {}^tS=S^{-1},\ S^2=I$$
$$\Phi=\bar{\Phi},\ {}^t\Phi=-\Phi,\ \Phi S=S\Phi$$

と表わすことができる。

証明　$A=F+iK$，$F,K\in M_n(\mathbb{R})$ と分解するとき，$A^*=F^*-iK^*$ だから，実行列 F，K は，次の (26) をみたす

(26) $${}^tF=F,\quad {}^tK=-K.$$

となる。すなわち F は実対称行列，K は交代(反対称)行列である。

一方 (22) により，$A\bar{A} = I$ だから，$(F+iK)(F-iK) = F^2+K^2+i(KF-FK)$ $= I$ となるから，次の (27) が成立つ：

(27) $$F^2 + K^2 = I, \quad KF = FK$$

F, K は可換な正規行列だから，ある一つの実直交行列 Q によって標準形に変換できる：すなわち次の (28)(29) が成立つ：

(28) $$F_0 = QFQ^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & & & 0 \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_n \end{pmatrix}, \quad f_m \in R, \ 1 \leqq m \leqq n,$$

(29) $$K_0 = QKQ^{-1} = \begin{pmatrix} K_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & K_\nu & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_m = \begin{pmatrix} 0 & -k_m \\ k_m & 0 \end{pmatrix}, \ 0 \neq k_m \in R \ (1 \leqq m \leqq \nu)$$

$F_0^2 + K_0^2 = Q(F^2+K^2)Q^{-1} = QQ^{-1} = I$ だから，

$$K_m^2 = \begin{pmatrix} -k_m^2 & 0 \\ 0 & -k_m^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{2m-1} & 0 \\ 0 & f_{2m} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} f_{2m-1}^2 & 0 \\ 0 & f_{2m}^2 \end{pmatrix}$$

により，次の (30) が成立つ：

$$f_{2m-1}^2 - k_m^2 = 1 = f_{2m}^2 - k_m^2, \quad 1 \leqq m \leqq \nu$$

(30) $$f_{2m-1}^2 = 1 + k_m^2 = f_{2m}^2, \quad f_{2m} = \pm f_{2m-1}$$

さらに $F_0K_0 = K_0F_0$ だから，$\begin{pmatrix} f_{2m-1} & 0 \\ 0 & f_{2m} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & -k_m \\ k_m & 0 \end{pmatrix}$ が可換なので $f_{2m}k_m = f_{2m-1}k_m$ となり，$k_m \neq 0$ により，次の (31) が成立つ．

(31) $$f_{2m-1} = f_{2m}, \quad 1 \leqq 2m \leqq \nu$$

また次の (32) が成立つ．

(32) $$2\nu < n \text{ のとき}, \quad f_n^2 = 1, \ f_m = \pm 1$$

そこで行列 F_0 は次の形になる：

(33) $$F_0 = D(f_1, f_1, f_3, f_3, \cdots, f_{2\nu-1}, f_{2\nu-1}, \pm 1, \cdots, \pm 1) \quad (対角行列)$$

そこで $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = A \dotplus B$ のように書くとき，次の(34)が成立つ：

(34) $$A_0 = F_0 + iK_0 = \begin{pmatrix} f_1 & -ik_1 \\ ik_1 & f_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} f_{2\nu-1} & -ik_\nu \\ ik_\nu & f_{2\nu-1} \end{pmatrix} \dotplus (\pm 1) \dotplus \cdots \dotplus (\pm 1)$$

いま(30)により $f_{2m-1}^2 - k_m^2 = 1$ だから，

(35) $$|f_{2m-1}| = \cosh \varphi_m, \quad \pm k_m = \sinh \varphi_m$$ となる $\varphi_m \in R$ が唯一つ存在する。ただし $\pm 1 = \operatorname{sign} f_{2m-1}$ である。

このとき，

(36) $$\begin{pmatrix} f_{2m-1} & -ik_m \\ ik_m & f_{2m-1} \end{pmatrix} = \pm \exp\left(i \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_m \\ \varphi_m & 0 \end{pmatrix}\right)$$

となる。従って(34)(36)から，次の(37)が成立つ。

(37) $$A_0 = \left(\pm \exp\left(i\begin{pmatrix} 0 & -\varphi_1 \\ \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \dotplus \cdots \dotplus \left(\pm \exp\left(i\begin{pmatrix} 0 & -\varphi_\nu \\ \varphi_\nu & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \dotplus (\pm 1) \dotplus \cdots \dotplus (\pm 1)$$

いま(37)の $\pm$ をそのままとって

(38) $$S_0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

とおき，また

(39) $$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_1 \\ \varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_\nu \\ \varphi_\nu & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0_{n-2\nu}$$

とおく。このとき，次の(40)(41)が成立つ：

(40) $$S_0 \Phi_0 = \Phi_0 S_0$$

(41) $$A_0 = S_0 e^{i\Phi_0}$$

S_0, Φ_0, A_0 を，S, Φ, A にもどして

(42) $$Q^{-1}A_0 Q = A,\quad Q^{-1}S_0 Q = S,\quad Q^{-1}\Phi_0 Q = \Phi$$ とすると，

(41)(40)から

(43) $$A = S e^{i\Phi}$$

(44) $$S\Phi = \Phi S$$

となる。$\overline{S}_0 = S_0,\ {}^tS_0 = S_0 = S_0^{-1}$ だから，$Q \in O(n)$ により

(45) $$\overline{S} = S,\quad {}^tS = S^{-1} = S,\quad S^2 = I$$

となる。また $\overline{\Phi}_0 = \Phi_0,\ {}^t\Phi_0 = -\Phi_0$ から

(46) $$\overline{\Phi} = \Phi,\quad {}^t\Phi = -\Phi$$

となる。(43)―(46) により，定理4は証明された。■

定理4の S に対し，行列

(47) $$T = \frac{1-i}{2}S + \frac{1+i}{2}I$$

を考える。この T の定義から

(48) $$T^2 = \frac{1-1-2i}{4}S^2 + \frac{1-1+2i}{4}I + 2\frac{1+1}{4}S$$
$$= \frac{2i}{4}(I - S^2) + S = S$$

となる。すなわち，T は S の平方根である。以下

(49) $$\sqrt{S} = \frac{1-i}{2}S + \frac{1+i}{2}I$$

と記す。いま $\overline{\sqrt{S}}\sqrt{S}$ を計算すると、$\bar{S}=S$ だから

(50) $$\overline{\sqrt{S}}\sqrt{S} = \left(\frac{1+i}{2}S+\frac{1-i}{2}I\right)\left(\frac{1-i}{2}S+\frac{1+i}{2}I\right) = \frac{1+1}{4}S^2+\frac{1+1}{4}I+\frac{-2i}{4}S+\frac{2i}{4}S = I$$

となる。従って次の(51)が成立つ:

(51) $$\overline{\sqrt{S}} = \sqrt{S}^{-1}.$$

定理 5

複素半単純リー環 M の自己同型写像 $A\in \mathrm{Aut}\,M$ に対し、

(52) $$\bar{P}\cdot P^{-1}=A, \quad P\in GL(M)$$

となる P が存在するための必要十分条件は、

(53) $$A = Se^{i\Phi}$$

の形であって、かつ S, Φ は、次の(54)(55)をみたすことである:

(54) $$S\in \mathrm{Aut}\,M, \quad \Phi\in \mathrm{ad}\,L_u,$$

(55) $$S^2=I,\ \bar{S}=S,\ {}^tS=S^{-1},\ \bar{\Phi}=\Phi=-{}^t\Phi,\ S\Phi=\Phi S$$

S, Φ が(53)(54)(55)をみたすとき、(52)をみたす任意の P は、

(56) ある $R\in GL(n,\mathbb{R})$ により

$$P=e^{-i\Phi/2}\sqrt{S}R$$ によって与えられる。

証明　十分条件であることは直ちに確められる。実際このとき(56)によって P を定義すれば、(51)(53)(55)と $S^2=I$ により、

$$\bar{P}\cdot P^{-1} = e^{i\Phi/2}\overline{\sqrt{S}}R\cdot R^{-1}\sqrt{S}^{-1}e^{i\Phi/2} = \sqrt{S}^{-1}\sqrt{S}^{-1}e^{i\Phi} = S^{-1}e^{i\Phi} = Se^{i\Phi} = A.$$

となり、(52)がみたされる。

(53)(55)が必要であることは，定理4とその前の注意によって既に証明されている。後は(52)をみたすPが存在するとき，Aは(53)の形になるが，そこに生ずるSとΦが(54)をみたすことを示せばよい。以下

$$(57)\qquad \Phi \in \operatorname{ad} L_u$$

であることを示す。(57)が成立つとき $e^{i\Phi} \in \operatorname{Aut} M$ だから，(53)より，$S = Ae^{-i\Phi} \in \operatorname{Aut} M$ となり，(54)が証明される。

(57)の証明

$G = \operatorname{Aut} M$ の単位元連結成分は，$G_0 = \operatorname{Int} M$ ($\exp \operatorname{ad} M$ から生成されるGの部分群)である。G/G_0 は有限群である(ガントマッヘル[16] p.117)。

$|G/G_0| = k > 0$ とおくと，$A \in G$ は $A^k \in G_0$，$A^{2k} \in G_0$ をみたす。SとΦは可換だから，Sと $e^{i\Phi}$ も可換であり，$S^2 = I$ だから

$$(58)\qquad G_0 \ni A^{2k} = S^{2k} \cdot e^{2ki\Phi} = e^{2ki\Phi}$$

となる。Φは実反対称行列だから正規行列で対角型行列である。従って $2ki\Phi$，$e^{2ki\Phi}$ も対角型行列である。従って $e^{2ki\Phi}$ は，連結半単純リー群 G_0 のあるカルタン部分群(極大複素トーラス)Cに含まれる。Cのリー環を $\mathfrak{f}$ とするとき，

$$(59)\qquad e^{2ki\Phi} = \exp H,\quad H = \operatorname{ad} h,\ h \in \mathfrak{f}$$

の形になる。$\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha = \mathfrak{f}_0$，$i\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_u$ とすると，$\mathfrak{f}_u$ はMのあるコンパクト実形のカルタン部分環になる。Mのすべてのコンパクト実形は，G_0 の元によってうつり移り得るから，共役なもの

に移ることにより，$\mathfrak{h}_u$は初めに固定したコンパクト実形L_uのカルタン部分環であるとしてよい。$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_u \oplus i\mathfrak{h}_u$であるから

(60) $$H = H_1 + iH_2, \quad H_1, H_2 \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_u$$

となる。$\mathfrak{h}$は可換だから，$[H_1, H_2]=0$となるので，

(61) $$B_1 = \exp H_1, \quad B_2 = \exp iH_2$$ とするとき，

(62) $$e^{2\pi i\Phi} = B_1 B_2$$

となる。

$H_1, H_2 \in \mathrm{ad}\,L_u$ は，L_uのキリング形式（定符号）を，無限小の意味で不変にする：$B(H_m X, Y) + B(X, H_m Y) = 0 \quad (m=1,2)$．従って

(63) $$^tH_m = -H_m, \quad m=1,2$$

となる。従ってH_mは正規行列で，その固有値がすべて純虚数の対角型行列である。従ってB_1, B_2も対角型行列で，B_1の固有値はすべて絶対値が1であり，B_2の固有値はすべて>0である。B_1とB_2は可換だから，同時に対角化されるので，B_1B_2の固有値は，B_1とB_2の固有値の積である。一方$2\pi i\Phi$はエルミット行列だから，$e^{2\pi i\Phi}$の固有値はすべて>0である。従って(62)から，B_1の固有値はすべて1でなければならない。B_1は対角型行列だから，これより

(64) $$B_1 = I, \quad e^{2\pi i\Phi} = B_2 = e^{iH_2}$$

が導かれる。エルミット行列iH_2の固有空間で固有値e^t $(t \in \mathbb{R})$に対応するものは，e^{iH_2}の固有値e^tに対する固有空間と一致

する．従って(64)才二式から，

(65) $$2\kappa i\Phi = iH_2$$ となるので

(66) $$\Phi = \frac{1}{2\kappa}H_2 \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{f}_u \subset \mathrm{ad}\,L_u$$

となり，(57)が証明された。

最後に，(52)に解があるとき，任意の解Pは(56)で与えられることを示そう．このとき(53)が成立つから，(53)のS, Φを用いて，

(67) $$R = \sqrt{S}^{-1} e^{i\Phi/2} P$$

とおく。(57)により，$\overline{\sqrt{S}} = \sqrt{S}^{-1}$であり，かつ$S^2 = I$だから$S = S^{-1}$であることを用いると，(52)から

(68) $$\overline{R} = \sqrt{S}\, e^{-i\Phi/2}\, \overline{P} = \sqrt{S}\, e^{-i\Phi/2}\, S e^{i\Phi} P = \sqrt{S}\cdot S^{-1} e^{i\Phi/2} P = R$$

となり，Pは(56)をみたす．これで定理5はすべて証明された．∎

以上の準備によって，カルタンの基本定理が直ちに得られる．

定理6 (E. カルタン[10], p.27)

Mを複素半単純リー環とするとき，次の1) 2)が成立つ．

1) Mの一つのコンパクト実形L_uを固定し，Sを位数2のL_uの自己同型写像とする．このとき$\sqrt{S}L_u$はMの実形であり，Mの任意の実形Lは，$\sqrt{S}L_u$の形のものと同型である．

2) Sの固有値± 1に対するL_uの固有空間をそれぞれK, Nとするとき，$L_u = K \oplus N$である。これに対し，

(69) $$\sqrt{S}L_u = K \oplus P, \quad P = iN$$

となる。K, Pは次の(70)(71)をみたす。

(70) $$[K,K]\subset K, \quad [K,P]\subset P, \quad [P,P]\subset P.$$

(71) $$\delta = \dim P - \dim K.$$

証明 1) (51)により $\overline{\sqrt{S}} = \sqrt{S}^{-1}$ だから、$\sqrt{\bar{S}}\cdot\sqrt{S}^{-1} = (\sqrt{S})^{-2} = S^{-1} = S$ $\in \mathrm{Aut}\,M$ となるので、定理2により $\sqrt{S}L_u$ はMの実形である。また Mの任意の実形Lに対して、$PL_u = L$ となる $P\in GL(M)$ をとると、定理2により、$\bar{P}\cdot P^{-1} = A \in \mathrm{Aut}\,M$ となり、さらに定理5により、このとき、$A = Se^{i\Phi}$, $S^2 = I$, $\bar{S} = S$, $S\in \mathrm{Aut}\,M$ となる。従ってSはL_uを不変にし、その自己同型を引起す。そしてこのとき、$P = e^{-i\Phi/2}\sqrt{S}R$, $\bar{R} = R$ となる。従って $RL_u = L_u$ であるから、$L = PL_u = e^{-i\Phi/2}\sqrt{S}L_u$ となる。$\Phi\in \mathrm{ad}\,L_u$ で $e^{-i\Phi/2}\in \mathrm{Aut}\,M$ だから、Lは $L_1 = \sqrt{S}L_u$ と同型なMの実形である。

2) $X\in L_u$ に対し、次の同値が成立つ:

(72) $$X\in K \Leftrightarrow SX = X, \quad X\in N \Leftrightarrow SX = -X.$$ 従って

(73) $$SX = X \Rightarrow \sqrt{S}X = \frac{1-i}{2}SX + \frac{1+i}{2}X = \left(\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}\right)X = X$$

(74) $$SX = -X \Rightarrow \sqrt{S}X = \frac{-1+i}{2}X + \frac{1+i}{2}X = iX$$

が成立つ。そこで、S, NはそれぞれMにおける$\sqrt{S}$の固有値1, iに対する固有空間に含まれる。$L_u = K\oplus N$ だから

$$\sqrt{S}L_u = \sqrt{S}(K\oplus N) = K\oplus P, \quad P = iN$$

となる。Sは自己同型写像だから、群結合の乗法より

(75) $\quad [K,K]\subset K,\ [K,N]\subset N,\ [N,N]\subset K$

となる。$P=iN$だから，(75)から直ちに(70)が導かれる。

L_uはコンパクト実形だから，Mのキリング形式BはL_u上で負値定符号である。$K\subset L_u$，$P\subset iL_u$だから，BはK上で負値定符号，P上で正値定符号である。従って$\sqrt{S}L_u$の符性数δは，(71)で与えられる。これで定理6は証明された。∎

以上で[17]の基礎理論の基本的な部分は終りである。以下この理論に基づいて，どのようにして具体的に実形の分類がなされるのかを述べよう。[17]では，定理6の対合的自己同型Sが，内部自己同型（$G=\mathrm{Aut}\,L_u$の単位元成分$G_0=\mathrm{Int}\,L_u$の元）であるか，外部自己同型（$G-G_0$の元）であるかによって扱いが異なる。

A 内部自己同型の場合の分類

Mを複素半単純リー環，$\mathfrak{h}$をMの一つのカルタン部分環とする。$\mathfrak{h}$はMの極大可換部リー環で，$\mathrm{ad}_M\mathfrak{h}$は対角型一次変換のみから成る。$\mathrm{ad}_M\mathfrak{h}$を同時対角化するとき，現われる0でない同時固有値を，$(M,\mathfrak{h})$の<u>ルート</u>といい，その全体をRとする。$\alpha\in R$は，$\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$の一次写像で，$M_\alpha=\{X\in M\mid [H,X]=\alpha(H)X\ (\forall H\in\mathfrak{h})\}$とおくとき，$M_\alpha\neq 0$となるものである。

(76) $$M=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in R}\oplus M_\alpha,\qquad \dim M_\alpha=1$$

Mのキリング形式を、$B(X,Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$ とするとき、Bの $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ への限定 $B|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ は正則(非退化)である。従って各ルートαに対し

(77) $$\alpha(H)=B(H_\alpha,H)\quad(\forall H\in\mathfrak{h})$$

となる $H_\alpha\in\mathfrak{h}$ が唯一つ存在する。$\mathfrak{h}_0=\sum_{\alpha\in R}\mathbb{R}H_\alpha$ は、複素可換リー環$\mathfrak{h}$の実形である。$i\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_u$ をカルタン部分環とするMのコンパクト実形 L_u が存在する。各ルート $\alpha\in R$ は、$\mathfrak{h}_u$ 上で純虚数値をとる。$B|\mathfrak{h}_u\times\mathfrak{h}_u$ は負値定符号である。そこで各$\alpha\in R$に対し、$h_\alpha\in\mathfrak{h}_u$であって、次の(78)をみたすものが唯一つ存在する:

(78) $$\alpha(H)=\pi i(h_\alpha,H),\quad(\forall H\in\mathfrak{h}_u).$$

今$\mathfrak{h}_u$の二つの元X,Yの内積を

(79) $$(X,Y)=\frac{1}{(\pi i)^2}B(X,Y)$$

で定義すると、$\mathfrak{h}_u$はユークリッド・ベクトル空間になる。そこで(78)により、$h_\alpha\in\mathfrak{h}_u$と$\alpha\in R$を同一視するとき、ルート$\alpha$は、$\mathfrak{h}_u$内の一つのベクトルとなる。各$\alpha\in R$に対し、$\alpha$を法線ベクトルとする$\mathfrak{h}_u$の超平面 $\pi_\alpha=\{H\in\mathfrak{h}_u\mid(\alpha,H)=0\}$ に関する鏡映を $s_\alpha: x\longmapsto x-\frac{2(a,x)}{(a,a)}a$ とし、$\{s_\alpha\mid\alpha\in R\}$ から生成される $GL(\mathfrak{h}_u)$ の部分群を $W=W(R)$ とする。ワイル群Wは有限群である。さらに $A(R)=\{\tau\in GL(\mathfrak{h}_u)\mid\tau R=R\}$ をRの自己同型群という。$W(R)$は$A(R)$の正規部分群で、$A(R)$も有限群であ

る.

自己同型写像 $A\in \mathrm{Aut}\, M$ が, $\mathfrak{h}$ を不変にする $(A\mathfrak{h}=\mathfrak{h})$ ならば, A はルートの置換を引起す. 各 $\alpha\in R$ に対し, $(A\alpha)(H)=\alpha(A^{-1}H)$ $(H\in\mathfrak{h})$ とおけば, $A\alpha\in R$ である. ($^\forall H\in\mathfrak{h}$, $^\forall X\in M_\alpha$ に対し, $[A^{-1}H, X]=\alpha(A^{-1}H)X$, $[H, AX]=(A\alpha)(H)AX$ だから $AM_\alpha=M_{A\alpha}$ となる.)

このとき $A|\mathfrak{h}_u=\tau$ とおけば, $\tau\in A(R)$ である. 逆に任意の $\tau\in A(R)$ に対し, $A\in\mathrm{Aut}\,M$, $A\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}_u$, $A|\mathfrak{h}_u=\tau$ となる A が存在する (ガントマッヘル [16] 定理20, p.129).

ここで定理6にもどり, M のコンパクト実形 L_u の位数2の自己同型写像 S が内部自己同型であるとする. すなわち $S\in G_0=\mathrm{Int}\, L_u$ とする. G_0 は連結コンパクト・リー群だから, その元 S は G_0 のある極大トーラス T に含まれる. T のリー環は G_0 のリー環 $\mathrm{ad}\, L_u$ のカルタン部分環 (この場合は L_u の極大可換部分環) である. G_0 の任意の二つの極大トーラスは, G_0 内で共役である。そこで始めから T のリー環は, 上で考えた $\mathfrak{h}_u$ の adjoint 表現の像 $\mathrm{ad}_{L_u}\mathfrak{h}_u$ であるとしてよい. そこである $h\in\mathfrak{h}_u$ が存在して

(80) $$S=\exp H,\quad H=\mathrm{ad}\, h,\ h\in\mathfrak{h}_u$$

としてよい。このとき (78) により,

(81) $$SX=e^{\alpha(H)}X=e^{\pi i(\alpha, H)}X,\qquad (\alpha\in R,\ X\in M_\alpha)$$

が成立つ. $S^2=I$ だから, (81) より

(82) $$(\alpha, H)\in\mathbb{Z}\qquad (^\forall\alpha\in R)$$

となる。

今もう一つの位数2の自己同型写像S'が

(83) $$S' = \exp H',\quad H' = \mathrm{ad}\, h',\ h' \in \mathfrak{h}_u$$

で与えられるとする。

定義　$H, H' \in \mathfrak{h}_u$が，次の(84)をみたすとき，合同であるといい，$H \equiv H'$と記す：

(84) $$(\alpha, H) = (\alpha, H') \mod 2 \quad (\forall \alpha \in R)$$

さらに$H, H' \in \mathfrak{h}_u$は，次の(85)をみたすとき，相似であるといい，$H \backsim H'$と記す：

(85) $$\exists \tau \in A(R),\quad \tau H \equiv H'.$$

いま(80)(83)で与えられる二つの自己同型S, S'に対し，

(86) $H \equiv H'$ ならば，$S = S'$ である。

が成立つ．実際このとき，任意の$\alpha \in R$に対し，$(\alpha, H) = (\alpha, H') + 2n$となる整数$n$が存在するから，(81)により$S|M_\alpha = S'|M_\alpha$ $(\forall \alpha \in R)$である。またS, S'は$\mathfrak{h}_u$上では共に恒等写像に等しいから，(76)により，$S = S'$である．(S, S'はM上の自己同型に一意的に拡張できるから，M上で考えた.)

後で具体的に実形を分類するとき，次の定理Aが有用である．

定理　A.

(80)(83)で与えられる，二つのL_uの位数2の自己同型写像$S = \exp \mathrm{ad}\, h$, $S' = \exp \mathrm{ad}\, h'$に対し，$h \backsim h'$であれば，ある$A \in \mathrm{Aut}\, L_u$

で，$A\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}_u$ となるものが存在し，次の 1) 2) 3) が成立つ：

1) $$S'=ASA^{-1}$$

2) $$\sqrt{S'}=A\sqrt{S}A^{-1}$$

3) $$\sqrt{S'}L_u\cong\sqrt{S}L_u\ .$$

証明．(い)の定義から，このとき，ある $\tau\in A(R)$ が存在して，(85) が成立つ．また上に述べたように，このとき $A\in \mathrm{Aut}\,L_u$ で $A\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}_u$，$A|\mathfrak{h}_u=\tau$ となるものが存在する。従って $\tau h=h'$ だから，次の (87) が成立つ：

(87) $$ASA^{-1}=\exp(A\circ \mathrm{ad}\,h\circ A^{-1})=\exp \mathrm{ad}(Ah)=\exp \mathrm{ad}(\tau h)=\exp H'=S'.$$

2) $$A\sqrt{S}A^{-1}=A\left(\frac{1-i}{2}S+\frac{1+i}{2}I\right)A^{-1}=\frac{1-i}{2}S'+\frac{1+i}{2}I=\sqrt{S'}$$

3) $AL_u=L_u$ なので，$\overline{A}=A$ だから $\overline{A^{-1}}=A^{-1}$ である。従って 2) から定理 3 により，$\sqrt{S'}L_u\cong\sqrt{S}L_u$ となる。∎

この定理 A を用いて，具体的に実形を分類する手続きを，B_n 型複素単純リー環 M に対して実行して見よう．B_n のルート系 R は，次の形である．

(86) $$R=\{\pm e_i\ (1\leqq i\leqq n),\ \pm e_i\pm e_j\ (1\leqq i<j\leqq n)\},\ (e_i,e_j)=\delta_{ij}$$

今 $\mathfrak{h}_u$ の元 $H=\sum_{i=1}^n h_ie_i$ に対し，$(e_i,H)=h_i\ (1\leqq i\leqq n)$ である．
従って $S^2=I$ を表わす条件 (82) は，この場合

(87) $$h_i\in\mathbb{Z}\quad(1\leqq i\leqq n)$$

となる．またもう一つの元 $H'=\sum_{i=1}^n h_i'e_i$ に対し

(88) $$H\equiv H'\Leftrightarrow(\alpha,H)\equiv(\alpha,H')\ \mathrm{mod}\,2\ (\forall\alpha\in R)\Leftrightarrow h_i\equiv h_i'\ \mathrm{mod}\,2\ (1\leqq i\leqq n)$$

従って L_u の位数2の自己同型 $S=\exp \mathrm{ad} H$ となる H としてはすべての $h_i=0$ または1となるものだけを考えればよい。さらにワイル群 $W(R)$ の元 $S_{e_i-e_j}$ は e_i と e_j の互換であるから H の座標を置換して得られる H' をとるとき，$S=\exp \mathrm{ad} H$ と $S'=\exp \mathrm{ad} H'$ は同型の実形を定める(定理A)。そこで M の実形を同型を除いてすべて求めるためには，

(89) $$H=\sum_{i=1}^{n} h_i e_i=(h_1,\cdots,h_n)=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-l\text{個}},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{l\text{個}})=H_l,\ 0\leqq l\leqq n$$

となる $n+1$ 個の元 H_l だけを考えれば十分である。この $n+1$ 個の H_l から定められる実形は，l が異なるとき同型でないことは，特性数を計算して確められる。H_l の定める M の実形は，2次形式 $x_1^2+\cdots+x_{2l}^2-x_{2l+1}^2-\cdots-x_{2n+1}^2$ を不変にする R^{2n+1} 上の一次変換全体の作る群 $O(2l,2(n-l)+1)$ のリー環として実現される。

このガントマッヘルの方法は，これ以外に実形がないという理由がはっきりしている点でカルタンの方法よりすぐれている。

B 外部自己同型の場合の分類

リー群，リー環の外部自己同型についての最初の研究は，E.カルタンの1925年の論文[6]においてなされた。M を複素単純リー環，$G=\mathrm{Aut}\,M$，$G_0=\mathrm{Int}\,M$ とする。G_0 は $\exp \mathrm{ad}\, M$ から

生成されるGの正規部分群で，Gの単位元連結成分である。

カルタンは，G/G_0が有限群であることを示し，その位数を決定した。その結果は次の通りである。

定理（カルタン[6]）

複素単純リー環Mに対し，有限群G/G_0の位数Nは次の通りである：

1) $M=A_n\ (n\geqq 2)$，$D_n\ (n\geqq 5)$，E_6のとき，$N=2$.

2) $M=D_4$のとき，$N=6$.

3) 1) 2) 以外のとき，すなわち $M=A_1$, B_n, C_n, E_7, E_8, F_4, G_2のとき，
$N=1$.

ガントマッヘル[16]では，この定理を

(90) $$G/G_0 \cong A(R)/W(R)$$

を示すことによって，新たに証明した。

その後1947年にディンキン[14]が，単純ルートとディンキン図形の概念を導入したので，それを用いることにより，上のカルタンの定理の結果は極めて見やすいものとなった。

ある順序に関する単純ルートの全体をBとし，$P=P(B)=\{\tau\in A(R)\mid \tau B=B\}$とおく。$P$は$A(R)$の部分群で，$A(R)$は，$P$と正規部分群$W(R)$の半直積となるから，(90)の右辺は$P$と同型になる。$P$は$R$のディンキン図形$\mathfrak{D}$の自己同型群と見なせ

る。このことと、ルート系のディンキン図形の形から、上のカルタンの定理は、直ちに導かれる(Seminaire "Sophus Lie" [36]、松島[27]参照)

今簡単のために、ディンキンの単純ルート系 B をとり、$P = P(B) = \{\tau_0 = 1, \tau_1, \cdots, \tau_{t-1}\}$ とする。このとき $A(R)$ の $W(R)$ に関する coset 分解は、$A(R) = \bigcup_{i=0}^{t-1} \tau_i W(R)$ となる。(90) によりこのとき G の G_0 に関する coset も t 個あり、$G = \bigcup_{i=0}^{t-1} A_i G_0$ のようになる。coset $A_i G_0$ に含まれる対角型一次変換は、次の形の自己同型写像 Z と共役になる:ある $H \in \mathfrak{f}$, $\tau_i H = H$ が存在して

(91) $\quad Z | \mathfrak{f} = \tau_i, \quad Z X_\alpha = \kappa_\alpha e^{(\alpha, H)} X_{\tau_i \alpha}, \quad \kappa_\alpha = \pm 1.$

この (91) の表示を、$A_i G_0$ に含まれる対角型自己同型の規準表示(canonical representation)という。このような外部自己同型 $(i \geq 1)$ Z で、位数2となるものを定めることは容易である。その中で同型な実形を生ずるものを見出すことにより、S が外部自己同型の場合の M の実形を定めることにガントマッヘル[17]は成功した。その結果は、カルタン[5]と一致する。特に D_4 型複素単純リー環($SO(8, \mathbb{C})$ のリー環)は、例外的に多くの外部自己同型をもつけれども、実形の分類は、一般の偶数次元直交群のリー環の場合と同じであって、DI 型と DIII 型の二つのタイプの実形しか存在しないことが示される。(次節命題21に示してある)

3　村上信吾

第二次大戦後30年程は，リー群論は大きく発展した。無限次元表現論が大きな分野として登場し，位相幾何，微分幾何との交流も盛んであった。この期間中に，理論の基礎についても見直しが行われた。シュヴァレー[11]は，リー群とリー環の対応を与えるリーの理論を，大域的な立場から構成することに成功した。また与えられたカルタン行列またはルート系に対し複素単純リー環が存在することを示すのに，個別に構成する外はなかったが，シュヴァレー[12]とハリッシュ・チャンドラ[19]は，統一的な証明を与えた。この証明は後にセール[37]によって，複素半単純リー環の生成元と基本関係を与えるという形に整理され明確化された。

この論文で扱っている実単純リー環の分類についても1960年代に，荒木捷朗[1] (1962)，村上信吾[29] (1965)，V. Kač [22] (1969)の三つの異なる方法が提示された。

時間的には荒木の研究が先行するが，前節のガントマッヘルの仕事との関連が深いので，本節では村上の研究を取上げる。

村上は，ガントマッヘルと同じく，カルタン[10]の結果から出発する。村上はこれを次のように要約している。

カルタンの定理([10], p.27)

複素半単純リー環Mの実形は，すべて次のL_θの形で得られる。Mのコンパクト実形L_uを一つとり，L_uの位数2の自己同型写像θの$+1, -1$という固有値に対する固有空間をK, Nとし，$P = iN$，$L_\theta = K \oplus P$とおくとき，L_θはMの非コンパクト実型である。$\theta = I$のとき，$L_I = L_u$はコンパクト実形である。Mの二つの実形L_θとL_φが同型となるための必要十分条件は，θとφが$\mathrm{Aut}\, L_u$の中で共役となることである。

村上は，ガントマッヘルと同様θが内部自己同型である場合と，外部自己同型である場合に分けて考える。この内θが内部自己同型である場合の分類は，実質的に，A.ボレルとJ.ド・ジーベンタールの共著論文[2]において与えられていたのであった。[2]の目標は実形の分類ではなく，連結コンパクト・リー群Gの連結閉部分群Kで，$\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, K$となるものを，共役を除きすべて求めることにあった。村上は，この結果が，θが内部自己同型の場合の実形の分類と同値であることを注意し，分類論として必要な補足をしたのであった。また村上は，θが外部自己同型の場合の実形の分類を独自の方法で与えた。その村上の研究は，ガントマッヘル[17]の研究を，完全したものと言うことができる。

以下次の記号を用いる(村上の用いた記号と異なる点がある).

リー環 L のキリング形式 B を, $B(X,Y)=Tr(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$ とする. B が正則(非退化)のとき, L は半単純である。特に $\mathbb{R}$ 上のリー環 L に対し, B が負値定符号のとき, L をコンパクト・リー環という。以下 L をコンパクトとする. T を L の極大可換部分環とする. L の複素化 L^c を M とすれば, M は複素半単純リー環で, $\mathfrak{h}=T^c$ は M のカルタン部分環である. $(M,\mathfrak{h})$ のルート系を R とし, ルート $\alpha\in R$ に対するルート空間を $M_\alpha=\{X\in M \mid [H,X]=\alpha(H)X,\ (\forall H\in\mathfrak{h})\}$ とする. B は L 上負値定符号だから,

(1) $$(X,Y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}B(X,Y),\quad X,Y\in L$$

とおくと, (X,Y) は $L\times L$ 上の正値定符号の内積である。各ルート $\alpha\in R$ は, T 上で純虚数値をとる $(\alpha(T)\subset i\mathbb{R})$ から,

(2) $$\alpha(H)=2\pi i(h_\alpha,H)\quad(\forall H\in T)$$

となる $h_\alpha\in T$ が一意的に定まる. 以下 α と h_α を同一視し, $R\subset T$ と考える. 内積(1)を用いて, ルートの間の内積が定義され,

(3) $$(\alpha,\beta)=(h_\alpha,h_\beta),\quad\alpha,\beta\in R$$

となる. L の任意の自己同型写像 S は, $L^c=M$ の自己同型写像に一意的に拡張されるから, $\mathrm{Aut}\,L\subset\mathrm{Aut}\,M$ と考える。以下 $G=\mathrm{Aut}\,L$, $G_0=\mathrm{Int}\,L$ (G の単位元連結成分)とする. また $G(T)=\{g\in G \mid gT=T\}$ とおく。各 $g\in G(T)$ に対し, $\tau=g|T$ とおくとき, $\tau\in A(R)=\{g\in GL(T)\mid gR=R\}$ となる。 $F:g\mapsto\tau$ は, $G(T)$

$\to A(R)$ の全写準同型写像である(ガントマッヘル[16]定理21). 各 $\alpha\in R$ に対し, α を法線ベクトルとする超平面 $D_\alpha=\{H\in T\mid(\alpha,H)=0\}$ に関する鏡映を s_α とし, $\{s_\alpha\mid\alpha\in R\}$ から生成される $A(R)$ の部分群を $W(R)=W$ とする. W を R のワイル群, $A(R)$ を R の自己同型群という. L の自己同型写像は, キリング形式 B を不変にするから, 内積( )も不変にする. 従って $A(R)$ の元は T の内積を変えない. R の基底(ある順序に関する単純ルートの全体) B に対し, $A(B)=\{\tau\in A(R)\mid\tau B=B\}$ とおくとき, $A(R)$ は正規部分群 W と部分群 $A(B)$ の半直積である. $A(B)$ は R のディンキン図形の対称群と見なせる.

命題 1. 1) $g\in G$ が $gH=H\ (\forall H\in T)$ をみたすとき, ある $H_0\in T$ が存在して, $g=\exp\operatorname{ad}H_0\in G_0$ となる.

2) 任意の $\sigma\in W(R)$ に対し, $g\in G_0\cap G(T)=G_0(T)$ で, $\sigma=g|T$ となるものが存在する.

3) $F(G_0\cap G(T))=W'$ とおくとき, $W\subset W'$, $W'\cap A(B)=\{I\}$ である.

4) $W'=W(R)$

5) $g\in G(T)$ に対し, 次の (a) と (b) は同値である.

(a) $g\in G_0$, (b) $g|T\in W(R)$.

証明 1) ガントマッヘル[16]定理19, 2) [16]定理22, 3) 松島[27]補題8.7, 4) 松島[27]補題8.8, 5) (a) $\Rightarrow$ (b) 3) と 4), (b) $\Rightarrow$ (a) [16]定理19と22の系.

命題 2.

$\tau \in A(R)$ に対し，次の条件(a)と(b)は同値である:

(a) ルート系 R のある基底 B に対し，$\tau \in A(B)$ である.

(b) T の正則元 H で，$\tau H = H$ となるものが存在する.

証明 (a)$\Rightarrow$(b) $B = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ とし，$(\alpha_i, H) = c > 0$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ となる $H \in T$ をとる。$\tau B = B$ だから，$\tau^{-1}\alpha_i = \alpha_{i'}$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ とおくとき，$(\alpha_i, \tau H) = (\tau^{-1}\alpha_i, H) = (\alpha_{i'}, H) = c > 0$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ だから，$\tau H = H$ である。また $(\alpha_i, H) > 0$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ だから，H は T の正則元である.

(b)$\Rightarrow$(a) 正則元 H は，$H \notin D_\alpha$ $(\forall \alpha \in R)$ をみたすから，ワイル領域 ($T - \bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha$ のある連結成分) C に含まれる。$\tau \in A(R)$ だから τC もまた一つのワイル領域である。$\tau H = H \in \tau C \cap C$ だから $\tau C = C$ となる。C の境界の超平面の内向き法線ベクトルとなるルートを $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ とすれば，これは R の一つの基底 B を作り，$\tau C = C$ だから $\tau B = B$ となる. ∎

命題 3

$S \in \mathrm{Aut}\, L$, $S^2 = I$ に対し，$K = \{X \in L \mid SX = X\}$ とおく。また K の一つの極大可換部分環 T_1 をとるとき，次の 1) 2) が成立つ.

1) L の極大可換部分環 T で，条件(α) $T \supset T_1$ をみたすものは，$ST = T$ をみたす。このような T は唯一つ存在する.

2) T_1 は L の正則元 X を含む. Kはコンパクト・リー群 K_0 のリー環である.

証明 1) T_1 を含む L の可換部分環中次元最大のものを一

つとってTとする。Tは(iv)をみたすLの極大可換部分環である。$^\forall X\in T$, $^\forall Y\in T_1$に対し $[X,Y]\in[T,T]=0$で，$SY=Y$だから，$[X+SX,Y]=[X,Y]+S[X,Y]=0$である。$X+SX\in K$で，T_1はKの極大可換部分環だから，$X+SX\in T_1$である．そこで

$$SX=(X+SX)-X\in T_1+T=T,\quad ST\subset T$$

となる。Sは正則だから $ST=T$となる．

Tの一意性．S\|Tの固有値±1に対する固有空間を，$T(\pm 1)$とする。$S^2=I$だから，$T=T(1)\oplus T(-1)$となる。このとき $T_1\subset T(1)$であり，$T(1)$はKの可換部分環だから，T_1の極大性により，

(4) $$T(1)=T_1$$

となる。いまT'を，(iv)をみたす任意のLにおける極大可換部分環とする．このとき$ST'=T'$となるから，上述のことから

(5) $$T'=T'(1)\oplus T'(-1),\quad T'(1)=T_1\subset T$$

となる。このとき次の(6)が成立つことを示そう：

(6) $$T'(-1)\subset T.$$

実際 $^\forall Z\in T'(-1)$，$^\forall X\in T(-1)$をとるとき，$S[X,Z]=[SX,SZ]=[-X,-Z]=[X,Z]$だから，$[X,Z]\in K$である．そこで $^\forall Y\in T_1$に対し，$X,Y\in T$，$[X,Y]=0$，$Z,Y\in T_1$だから$[Z,Y]=0$であり，従って

(7) $$[[X,Z],Y]=[[X,Y],Z]+[X,[Z,Y]]=0$$

となる。T_1はKの極大可換部分環で，$[X,Z]\in K$だから，(7)より

(8) $$[X,Z]\in T_1$$

となる。Xは$T(-1)$の任意の元だから，(8)は

(9) $$[Z,\ T(-1)] \subset T_1$$

となることを意味する。一方任意の$Y \in T_1$に対し，(5)から$Y \in T_1 = T'(1) \subset T'$となる。一方$Z \in T'(-1) \subset T'$だから$T'$の可換性により，$[Y, Z] = 0$となる。$Y$は$T_1$の任意の元だから

(10) $$[Z,\ T_1] = 0$$

である。(9)，(10)と$T_1 = T(2)$から，

(11) $$[Z, T] = [Z, T_1] + [Z, T(-1)] \subset T_1 \subset T$$

となる。従って$Z \in N(T)$（Tの正規化環）である。一方TはLのカルタン部分環だから$N(T) = T$である。従って

(12) $$Z \in T$$

となる。Zは$T'(-1)$の任意の元だから，これで(6)が証明された。

(5)(6)から，$T' \subset T$となるから，T'の極大性により$T' = T$である。これでTの一意性が証明された。

2) $L = \mathrm{ad}\, L$と同一視すると，Lはリー群$G_0 = \mathrm{Int}\, L$のリー環である：$L = L(G_0)$。Lの部分リー環K，T_1に対し，G_0の連結リー部分群K_0，T_0でそのリー環がそれぞれK，T_1となるものが一意的に存在する。いまG_0の単連結被覆群をG^*とする。$S \in \mathrm{Aut}\, L$に対し単連結群G^*の自己同型写像φで，その微分自己同型写像φ_*がSとなるものが唯一つ存在する(シュヴァレー[11] p.113 定理2)。

G^*の中心をZとするとき，G^*の自己同型φはZを不変にす

る：$\varphi(Z)=Z$. $G_0=\mathrm{Ad}\,G^*=G^*/Z$ であるから，φ から G_0 の自己同型 $\psi\in\mathrm{Aut}\,G_0$ が $\psi(g^*Z)=\varphi(g)$ により一意的に定まる。そして ψ の微分自己同型写像 ψ_* は

(13) $$\psi_*=\varphi_*=S$$

をみたす。このとき，$\psi(\exp X)=\exp\psi_*(X)=\exp S(X)\quad(\forall X\in L)$ となるので，特に任意の $X\in K$ に対し

(14) $$\psi(\exp X)=\exp X,\quad(\forall X\in K)$$

となる。連結リー部分群 K_0 は，$\exp K$ から生成されるから，

(15) $$\psi(k)=k\quad(\forall k\in K_0)$$

となる。そこで $K_1=\{g\in G_0\mid\psi(g)=g\}$ とおくとき，

(16) $$K_0\subset K_1$$

である。一方リー環を考えると，$L(K_1)=K=L(K_0)$ だから，

(17) K_0 は K_1 の単位元連結成分である。

K_1 はコンパクト群 G_0 の閉部分群だからコンパクトであり，その連結成分は有限個である。K_0 は K_1 の閉部分群だからコンパクトであり，T_0 は K_0 の極大トーラスである。クロネッカーの近似定理（杉浦「リー群論」[42] 定理 9.3.11）により，次の (18) が成立つ。

(18) T_0 のある元 X に対し，$\{\exp tX\mid t\in R\}=P$ は，T_0 内で稠密である。

(18) の X を含む，L の極大可換部分環 T' を任意に一つとる。そして T' をリー環とする G_0 の連結リー部分群を T_0' とする。任意の $Y\in T'$ に対し，$[X,Y]=0$ だから，任意の $t,s\in R$ に対

し，$\exp tX$，$\exp sY$は可換である．そこで(18)により$\exp sY$はT_0の各元と可換となるから，$[Y, T_1]=0$すなわち

(19) $$[T', T_1] = 0$$

となる。T'はLの極大可換部分環だから，(11)から

(20) $$T_1 \subset T'$$

が導かれる．すなわちT'は1)の条件(a)をみたすから，1)におけるTの一意性により，

(21) $$T' = T$$

が成立つ。従って次の(22)が証明されたことになる：

(22) Xを含むLの極大可換部分環はTだけである．

この(22)から，次の(23)が導かれる．

(23) XはLの正則元である．

(L^c, T^c)のルート空間M_αの元$X_\alpha \neq 0$を適当にとるとき，

(24) $$L = T \oplus \sum_{\alpha \in R^+} \{\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \mathbb{R}\,i(X_\alpha + X_{-\alpha})\}$$

となる。このとき，次の(25)が成立つ：

(25) $$\alpha(X) \neq 0 \quad (\forall \alpha \in R)$$

なぜならば，ある$\alpha \in R$に対し，$\alpha(X)=0$となったとすれば，Tの超平面$D_\alpha = \{H \in T \mid (\alpha, H) = 0\}$を用いて，$T' = D_\alpha + \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$とおくと，$T'$は$L$の可換部分環で，$X \in D_\alpha \subset T'$であってしかも$T$と異なる$L$の極大可換部分環で$X$を含むものが存在することになり，(22)に反し矛盾である．

(25) により，X は L の正則元である．∎

命題 4

$S\in \mathrm{Aut}\,L=G$，$S^2=I$，$K=\{X\in L\mid SX=X\}$ とすれ．次の条件 (a) と (b) は同値である：

(a) $S\in \mathrm{Int}\,L=G_0$，　(b) $\mathrm{rank}\,K=\mathrm{rank}\,L$

証明 (a) $\Rightarrow$ (b)．K の極大可換部分環 T_1 を含む L の極大可換部分環 T をとる。このとき命題 3 により $ST=T$ である。そして $S\in G_0$ だから，$S|T=\sigma\in W(R)$ となる (命題 1，5))．一方命題 3，2) により，T_1 は L の正則元 X を含む．このとき $\sigma X=SX=X$ だから，命題 2 により，R のある基底 B に対して $\sigma\in A(B)$ となる．そこで $\sigma\in W(R)\cap A(B)=\{1\}$ だから，任意の $H\in T$ に対し，$\sigma H=H$ となる。そこで $T\subset T_1\subset T$，$T=T_1$ となるから，

$$\mathrm{rank}\,K=\dim T_1=\dim T=\mathrm{rank}\,L$$

となる．

(b) $\Rightarrow$ (a)　$\mathrm{rank}\,K=\mathrm{rank}\,L$ ならば，K の極大可換部分環 T_1 は，L の極大可換部分環でもあるから，$T_1=T$ である。このとき $S|T=S|T_1=I\in W(R)$ だから，命題 1，1) により $S\in G_0$ である．∎

定義 1

以下次の記号を固定して用いる．

1) S，　$S\in \mathrm{Aut}\,L$，$S^2=I$

2) T. T は L の極大可換部環．$ST=T$ をみたす．

3) p. $p=S|T$ $p\in A(B)$ となるルート系 R の基底 B がある．

4) K, N. K, N は S の固有値 1, -1 に対する固有空間．

5) $T_{\pm 1}$. $T_1=T\cap K$, $T_{-1}=T\cap N$. $T=T_1\oplus T_{-1}$ となる．

T_1 は K の極大可換部分環である．

命題 5

定義 1 の記号の下に次のことが成立つ．

1) $H\in T$ と $A_p\in \mathrm{Aut}\,L$ で，$S=A_p\exp H$, $A_p|T=p$ となるものが存在する．

2) $B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$ とするとき，$A_pX_{\alpha_j}=X_{p\alpha_j}$. $1\leq j\leq \ell$ となる．$\{X_\alpha|\alpha\in R\}$ はワイル基底．

3) S を G 内で共役な S' で置換えれば，1) 2) の外にさらに

$$pH_+=H_+ \quad (\forall H_+\in T_1) \quad \text{をみたす．}$$

4) 3) をみたす S に対し，$A_p^2=I=(\exp H)^2$. $p^2=I$. A_p と $\exp H$ は可換．

証明 (26) $$SX_\alpha=\kappa_\alpha X_{p\alpha}, \quad (\forall\alpha\in R)$$

となる。ここで $B(X_\alpha, X_{-\alpha})=-1$ だから，次の (27) が成立つ：

(27) $$\kappa_\alpha\kappa_{-\alpha}=1$$

一方 $SL=L$ なので，$L\ni S(X_\alpha-X_{-\alpha})=\kappa_\alpha X_{p\alpha}-\kappa_{-\alpha}X_{-p\alpha}$ だから

(28) $$\kappa_{-\alpha}=\overline{\kappa_\alpha} \quad (\forall\alpha\in R)$$

となる。(27)(28) により次の (29) が成立つ．

(29) $$|\kappa_\alpha|=1, \quad \log\kappa_\alpha\in i\mathbb{R} \quad (\forall\alpha\in R)$$

いま多価函数 $\log x_{\alpha_j}$ $(1\leqq j\leqq \ell)$ の値を定めておき、ℓ 個の一次独立な連立一次方程式 $\alpha_j(H)=\log x_{\alpha_j}$ $(1\leqq j\leqq \ell)$ の唯一つの解 $H\in T$ を定める。そして $S\cdot(\exp H)^{-1}=A_p$ とおけば、1) が成立つ。

2) $$A_pX_{\alpha_j} = S\exp(-H)X_{\alpha_j} = e^{-\alpha_j(H)}x_{\alpha_j}X_{p\alpha_j} = x_{\alpha_j}^{-1}x_{\alpha_j}X_{p\alpha_j} = X_{p\alpha_j}, \quad 1\leqq j\leqq \ell$$

3) 定義 1、5) により、$H=H_1+H_{-1}$, $H_{\pm 1}\in T_{\pm 1}$ (複号同順) となる。$L=\mathrm{ad}L$ と同一視しているから $\mathrm{Ad}\exp X=\exp\mathrm{ad}X=\exp X$ $(\forall X\in L)$ である。そこで $\mathrm{Ad}\,g=g$ $(\forall g\in G_0)$ である。また $\forall g\in G=\mathrm{Aut}\,L$ に対し $g(\mathrm{ad}H)g^{-1}=\mathrm{ad}(gH)=gH$ であるから、次の(30)(31)が成立つ。

(30) $$A_p\circ\exp\tfrac{1}{2}H_{-1}\circ A_p^{-1} = \exp(\tfrac{1}{2}A_pH_{-1}) = \exp(\tfrac{1}{2}(A_p\exp H)H_{-1}) = \exp(\tfrac{1}{2}SH_{-1})$$
$$= \exp(\tfrac{1}{2}(-H_{-1})) = [\exp(\tfrac{1}{2}H_{-1})]^{-1}$$

(31) $$S = A_p\exp H = A_p\exp H_1\cdot\exp H_{-1} = A_p\exp\tfrac{1}{2}H_{-1}\cdot\exp H_1\cdot\exp\tfrac{1}{2}H_{-1}$$
$$= (\exp\tfrac{1}{2}H_{-1})^{-1}(A_p\exp H_1)(\exp\tfrac{1}{2}H_{-1})$$

そこで $S'=A_p\exp H_1$ とおけば、S' と S は G 内で共役であり、$h=\exp\frac{1}{2}H_{-1}$ とおくと、$S'=hSh^{-1}$ だから $S'T=hSh^{-1}T=hST=hT=T$ で、

(32) $$S'|T = A_p\exp H_1|T = A_p|T = p$$

だから S' は 1) をみたす。また S' の形から 2) もみたす。さらに

(33) $\forall H_+\in T_1$ に対し、$pH_+=S'H_+=hSh^{-1}H_+=hSH_+=hH_+=H_+$

となるから、3) が成立つ。

4) $S=A_p\exp H$ で、$pH=H\in T_1$ とするとき、

$$A_p\cdot\exp H\cdot A_p^{-1} = \exp(A_pH) = \exp(pH) = \exp H \quad \text{だから}$$

(34) A_p と $\exp H$ は可換である。

$p = S|T$ で，$S^2 = I$ だから，$p^2 = I$ である．そこで 2) により

(35) $$A_p^2 X_{\alpha_j} = X_{p^2\alpha_j} = X_{\alpha_j},\quad A_p^2 X_{-\alpha_j} = X_{-\alpha_j},\ 1 \leqq j \leqq l$$

である。$\{X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_j} \mid 1 \leqq j \leqq l\}$ が L^c を生成するから，(35) により

(36) $$A_p^2 = I$$

を得る。(34)(36) から，

(37) $$(\exp H)^2 = A_p^2(\exp H)^2 = S^2 = I$$

となる．(34)(37) から，$p^2 = A_p^2|T = I$ である．■

定義 2　以下 S は命題 5，1) 2) 3) 4) をみたすとする．

命題 6

$S = A_p \exp H$，$S' = A_p \exp H'$ が $G = \mathrm{Aut}\,L$ 内で共役であるとすれば

ある $A \in G(T)$ が存在して，$S' = A^{-1}SA$ となる．

証明　S, S' の固有値 1，-1 に対する固有空間を，$(K, N), (K', N')$

とする．いま S, S' は G 内で共役であるから，

(38) 　ある $B \in G$ に対し，$BS' = SB$ となる．

このとき，$BK' = B\{X \in L \mid S'X = X\} = \{BX \mid SBX = BS'X = BX\} = K$ で

(39) $$BK' = K,\quad BN' = N$$

となる．$S|T = p = S'|T$ だから

(40) $$K \cap T = \{X \in T \mid SX = X\} = \{X \in T \mid S'X = X\} = K' \cap T$$

である。$T_1 = K \cap T$ は K の極大可換部分環で，(40)(39) により，

(41) $$BT_1 = B(K \cap T) = B(K' \cap T) = K \cap BT$$

である。BT_1 はまた K 内の可換部分環で，$\dim BT_1 = \dim T_1$ だから

BT_1 はまた K の極大可換部分環である。従って BT_1 は T_1 と $\mathrm{Int}\,K$ において，共役で次の(42)が成立つ．

(42) ある $C \in \mathrm{Int}\,K = K_0 \subset G_0$ により，$CBT_1 = T_1$ となる．そこで

(43) $A = CB \in \mathrm{Aut}\,L = G$ は，$AT_1 = T_1$ をみたす．

このとき AT は $AT_1 = T_1$ を含む L の極大可換部分環だから，命題3の T の一意性により

(44) $$AT = T，\text{即ち } A \in G(T)$$

をみたす．いま $\mathrm{Ad}\,A = A$，$\mathrm{ad}\,L = L$ と同一視しているから

(45) $$ATA^{-1} = T$$

である。$A = CB$，$C \in \mathrm{Int}\,K$ であるから，(39)により

(46) $$AK' = CBK' = CK = K，\quad AN' = CBN' = CN = N$$

となる。これから次の(47)が導かれる：

(47) $$AS' = SA.$$

実際 $\forall X \in K'$，$\forall Y \in N'$ に対して，(46)から $SAX = AX = AS'X$，$SAY = -AY = AS'Y$ となるから(47)が成立つ．∎

定義3

$e = \exp|T : T \to T_0 = \exp T$ は，リー群の準同型写像である。$T \cong \mathbb{R}^l$，$T_0 \cong \mathbb{T}^l$ だから，$\Gamma = \mathrm{Ker}\, e = \{X \in T \mid \exp X = 1\}$ は，階数 l の離散部分群で，$\Gamma \cong \mathbb{Z}^l$ である．$H \in T$ による平行移動を $t(H) : X \mapsto X + H$ とし，$t(\Gamma) = \Gamma_0$ とおく。Γ_0 と $A(R)$ から生成される T の合同変換群 $I(T)$ の部分群を Q とおく．

命題 7

1) Γ は $A(R)$ で不変である.

2) Γ_0 は Q の正規部分群で, Q は Γ_0 と $A(R)$ の半直積である.

3) $S=\exp H$, $S'=\exp H'$, $H, H'\in T$ に対し次の (a) と (b) は同値.

(a) $S'=A^{-1}SA$, $^\exists A\in G(T)$. (b) $H\equiv H' \bmod Q$.

4) $S=\exp H$, $H\in T$ に対して, 次の (c) と (d) は同値である.

(c) $S^2=I$, (d) $2H\in\Gamma \Leftrightarrow H\in\frac{1}{2}\Gamma$.

証明 1) 任意の $\tau\in A(R)$ に対し, $^\exists A\in G(T)$ で, $A|T=\tau$ となるものが存在する。命題 3, 2) の証明中に示したように, G_0 の単連結被覆群 G^* を仲介に用いることにより, $G_0=\mathrm{Int}L$ の自己同型 ψ で, ψ の微分自己同型 $\psi_*=A$ となるものが存在する。

$X\in T$ に対し, 次の同値が成立つ:

$X\in\Gamma \Leftrightarrow \exp X=1 \Leftrightarrow \psi(\exp X)=1 \Leftrightarrow \exp A(X)=1 \Leftrightarrow \tau(X)=A(X)\in\Gamma$

であるから, $\tau\Gamma=\Gamma$ で, Γ は $A(R)$ で不変である.

2) 任意の $\tau\in A(R)$ に対し, 1) により $\tau t(\Gamma)\tau^{-1}=t(\tau\Gamma)=t(\Gamma)$ だから, $\Gamma_0=t(\Gamma)$ は Q の正規部分群である. そこで Γ_0 と $A(R)$ から生成される Q は, $Q=\Gamma_0A(R)=A(R)\Gamma_0$ となる. また $\Gamma_0\cap A(R)\subset t(T)\cap GL(T)=\{I\}$ だから, Q は Γ_0 と $A(R)$ の半直積である.

3) (a) $\exp H'=A\circ\exp H\circ A^{-1}$ $(^\exists A\in G(T)) \Leftrightarrow \exp H'=\exp A(H)=\exp\tau H$ $(\tau=A|T) \Leftrightarrow H'=\tau(H)+H_0=(t(H_0)\cdot\tau)(H)$, $^\exists H_0\in\Gamma \Leftrightarrow$ (b) $H'\equiv H \bmod Q$.

4) (c) $S^2=I \Leftrightarrow \exp 2H=1 \Leftrightarrow$ (d) $2H\in\Gamma$.

定義 4

任意の $\alpha \in R$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して，T の超平面

$$D_\alpha(k) = \{H \in T \mid (\alpha, H) = k\}$$

を考える．

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha(k)$$

を，ルート図形という．

命題 8

$T - D$ の連結成分の集合 $\mathcal{C}$ 上に，$Q_0 = W \cdot \Gamma_0$ は推移的に作用する．従って $Q = A(R) \cdot \Gamma_0$ も $\mathcal{C}$ 上に推移的に作用する．

証明　(48)　$\Gamma = \{H \in T \mid e^{\alpha(H)} = 1 \ (\forall \alpha \in R)\} = \{H \in T \mid (\forall \alpha \in R)(\exists k \in \mathbb{Z})((\alpha, H) = k)\}$ である．従って

(49)　　D は $\Gamma_0 = t(\Gamma)$ で不変である。

(50)　　$sD_\alpha(k) = \{sH \in T \mid (\alpha, H) = k\} = \{H \in T \mid (\alpha, s^{-1}H) = k\} = D_{s\alpha}(k) \quad (s \in W)$

(51)　　D は W により不変である。

(52)　　D は $Q_0 = W \cdot \Gamma_0$ で不変である．

従って $T - D$ 上に Q_0 は作用する．Q_0 の任意の元 φ は T の同相写像だから，$T - D$ の一つの連結成分をもう一つの連結成分に写す．従って Q_0 は連結成分の集合 $\mathcal{C}$ に作用する。すぐわかるように，$D_\alpha(k)$ に関する鏡映 S は，$D_\alpha(0)$ に関する鏡映 s_α を用いて，

(53)　　$$S = t\left(\frac{2k\alpha}{(\alpha, \alpha)}\right) s_\alpha$$

と表わされる。$2k\alpha/(\alpha,\alpha)\in\Gamma$ であるから、$S\in Q_0$ である。C の任意の二つの元 P, P' に対し、超平面達 $\{D_\alpha(k)\,|\,\alpha\in R,\ k\in Z\}$ に関する鏡映の有限個の積 S により、$SP=P'$ となるから、Q_0 は C 上に推移的に作用する。（後の命題10と同様な論法で証明される）。

命題8の証明中に次の系の成立つことが示されている。■

命題8系　1) R の零化群 $R^0=\{H\in T\,|\,(\alpha,H)\in Z\ (\forall\alpha\in R)\}$ は Γ に等しい。　2) $\Gamma\supset R^\vee=\{\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}\,|\,\alpha\in R\}$.

次に D−T の連結成分の形を具体的に与えよう。準備として

命題9

1) 既約ルート系（直交する二つの部分に分解しないルート系）R の基底 $B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ により定まる字引式順序を考える。この順序に関し最大な正のルート β が唯一つ存在する。2) $\beta=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$ とするとき、任意の正のルート $\alpha=\sum_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$ に対して $m_i\geqq n_i$ $(1\leqq i\leqq l)$ である。3) $m_i>0$ $(1\leqq i\leqq l)$.

証明. 1) 字引式順序は全順序だから、有限集合 R の中に唯一つ最大元 β が存在する。2) R が既約ルート系だから、L の複素化 L^C は単純リー環で、その随伴表現 ad は既約である。その最高ウエイトが β である。任意のルート α は随伴表現のウエイトだから、最高ウエイト β との間に

$$\alpha=\beta-\sum_{i=1}^{l}p_i\alpha_i,\quad p_i\in N\ (1\leqq i\leqq l)$$

となる関係がある（松島[27]定理9.1）。従って $n_i=m_i-p_i$, $p_i\geqq 0$ だ

から $m_i \geqq n_i$ $(1\leqq i\leqq \ell)$ となる。 3) 2)で特に $\alpha=\alpha_i$ とすると、

$m_i \geqq 1$ $(1\leqq i\leqq \ell)$ となる。 ▮

定義 5

命題9の β を、R の(Bに関する)最大ルートという。

命題10.

L をコンパクト単純リー環、T を L の極大可換部分環、R を (L^c, T^c) に関するルート系、$B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$ を R の一つの基底、$\beta=\sum_{i=1}^{\ell} m_i\alpha_i$ を B に関する R の最大ルートとする。

1) このとき ℓ 次元開単体

$$P=\{H\in T \mid (\alpha_i, H)>0 \ (1\leqq i\leqq \ell),\ (\beta, H)<1\}$$

は $T-D$ の一つの連結成分である。

2) $0\in \overline{P}$ (P の閉包)

3) $^\forall H\in T$ は、ある $H_0\in\overline{P}$ に Q の元 g により移る: $gH=H_0$.

証明 1) (54) $P\cap D_\alpha(k)=\emptyset$ $(^\forall\alpha\in R, {}^\forall k\in\mathbb{Z})$, $P\subset T-D$.

これを帰謬法で証明するために、(55) $P\cap D_\alpha(k)\ni {}^\exists H$ を仮定して矛盾を導く。最初にこのとき次の(56)が成立つことを示す。

(56) $\alpha\in R^+(B)$

いま(56)が成立たないと仮定すると、$\alpha\in R^-(B)=-R^+(B)$ となるから、$\alpha=-\sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i$, $^\forall n_i\geqq 0$ となる。このとき $H\in T$ に対し

(57) $$(\alpha, H)=-\sum_{i=1}^{\ell} n_i(\alpha_i, H)$$

となる。特に $H\in P$ とすると、$(\alpha_i, H)>0$ $(1\leqq i\leqq \ell)$ でかつ $^\forall n_i\geqq 0$

$\exists n_{i_0} > 0$ だから，(157) により，$k = (\alpha, H) < 0$ となる．一方 $H \in P$ 故

(158) $$1 > (\beta, H) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, H) > 0$$

となる。そこで

(159) $$0 < -k = -(\alpha, H) = \sum_{i=1}^{\ell} n_i (\alpha_i, H) \leqq \sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, H) = (\beta, H) < 1$$

となる．一方 $H \in D_\alpha(k)$ だから，$(\alpha, H) = k \in \mathbb{Z}$ であるが，これは (159) と矛盾する．これで (158) が証明された．

そこで正のルート α は，$\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$，$n_i \in \mathbb{N}$ の形になり，命題 9 により，$m_i \geqq n_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ で，$\exists n_{i_0} > 0$ である。このとき

(160) $$0 < k = (\alpha, H) = \sum_{i=1}^{\ell} n_i (\alpha_i, H) \leqq \sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, H) = (\beta, H) < 1$$

となるが，$k \in \mathbb{Z}$ だから (160) は矛盾である。これで帰謬法により，(154) が証明された．

P は凸集合だから弧状連結であり，$T - D$ に含まれるから，

(161) $$P \subset P_1 \in C$$

となる $T - D$ の連結成分 P_1 が存在する．実はこのとき，

(162) $$P = P_1$$

となる．(162) を帰謬法によって証明するために，

(163) $$\exists H \in P_1 - P$$

と仮定して矛盾を導く．このとき $H \notin P$ であるから

(164) $$(\alpha_i, H) < 0 \quad (\exists i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}) \quad \text{または，} \quad (\beta, H) > 1$$

となる。すなわち H は，P の $\ell+1$ 個の境界超平面の内の一つ π に対し，P と反対側にある．そこで H と P の一点 H_1 を T 内で

結ぶ連続曲線Cは，超平面Πと交わらなければならない。従ってC$\cap$D$\neq\phi$となるから，C$\not\subset$T−Dである。$H, H_1\in P_1$だから，このことはP_1は弧状連結ではないことを示す。P_1はT$\cong R^l$の開集合だから，弧状連結であることと連結であることは同値である。従ってP_1は連結でないことになり，P_1がT−Dの連結成分であるという仮定に反し矛盾である。これで(62)が証明された。

2) 任意の$H\in P$と任意の$t\in(0,1)$ $(0<t<1)$に対し$tH\in P$だから，$0=\lim_{t\to+0} tH\in\overline{P}$となる。

3) $T=\bigcup_{P\in C}\overline{P}$だから，任意の$H\in T$は，T−Dのある連結成分$P_0$の閉包$\overline{P_0}$に含まれる：$H\in\overline{P_0}$。命題8により，ある$g\in Q_0$によって，$gP_0=P$ (1)で与えた連結成分)となる。gはT→Tの同相写像だから，$gH\in g\overline{P_0}=\overline{gP_0}=\overline{P}$となる。そこである$H_0\in\overline{P}$に対し，$gH=H_0$となる。∎

命題10系

T−Dの連結成分P_1が，$0\in\overline{P_1}$をみたすとき，ワイル群$W=W(R)$の元sがあって，$sP_1=P$となるものが存在する。

証明 $x_0\in P$，$y\in P_1$をとっておく。有限集合$\{sy \mid s\in W\}$の元でx_0に一番近いものを$y_1=sy$とおく。このとき次の(65)が成立つ：

(65) $\qquad y_1\in P$

$y_1\notin P$と仮定して矛盾を導くことで(65)を証明する。$y_1\notin P$

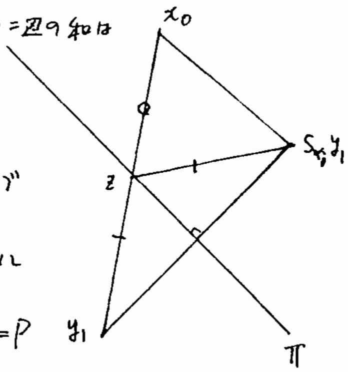
であるから、このとき y_1 と $x_0\in P$ は、P の一つの境界超平面 Π に関して反対側にある。この超平面 Π は $\Pi_0 : (\beta, x)=1$ ではない。$\Pi=\Pi_0$ とすると、$(\beta, x_0)<1$ だから $(\beta, y_1)>1$ となる。任意の $s\in W$ に対し $sP_1=P_2$ は凸集合であり、$0\in\overline{P_1}$, $y\in P_1$ だから、$0<t\leqq 1$ となる任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し、$ty_1\in P_1$ であるから

(66) $$(\beta, ty)>1,\quad 0<t\leqq 1$$

となる。ここで $t\to+0$ とすると、$0>1$ となり矛盾である。従って $\Pi\neq\Pi_0$ であり、ある $i\in\{1,2,\cdots,l\}$ に対し

(67) $$\Pi : (\alpha_i, x)>0$$

となる。いま y_1 と x_0 は Π に関し反対側にある。このとき Π に関する鏡映 $s_i=s_{\alpha_i}$ に対し、$\overline{s_iy_1\cdot x_0}<\overline{y_1\cdot x_0}$（「三角形の二辺の和は他の一辺より大」を用いる）。これは y_1 が x_0 に一番近い Y の点という仮定に反し矛盾である。これで(65)が証明された。このとき sP_1 と P は共に $T-D$ の連結成分で、$sP_1\cap P\ni y_1$ だから $sP_1=P$ である。∎



定義 6

以下 L を単純とし、命題10の単体 P を考える。ルート系 R の基底 $B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ に対する T の双対基底 $(e_1,\cdots,e_l)$ をとる。すなわち

(68) $$(\alpha_i, e_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqq i,j\leqq l$$

とする。そして T の点 t の座標 $(t_1,\cdots,t_l)$ として、基底 (e_j) に

関する成分をとる．すなわち

(69) $$t=\sum_{i=1}^{l}t_i e_i=(t_1,\cdots,t_l),\quad t_i=(\alpha_i,t)$$

とする．そして

(70) $$\beta=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$$

を，R の B に関する最大ルートとする．また

(71) $$P_i=\frac{1}{m_i}e_i=(0,\cdots 0,\overset{i}{\frac{1}{m_i}},0,\cdots 0),\quad 1\leqq i\leqq l$$

とおくと，

(72) $$(\alpha_i,P_j)=\delta_{ij}\frac{1}{m_j},\quad (\beta,P_j)=1,\ 1\leqq i,j\leqq l$$

従って $(0,P_1,\cdots,P_l)$ が l 次元単体 P の頂点である．

内部自己同型による実形の分類

以下内部自己同型である L の位数2の元 S を G における共役を除いて決定する．G_0 の任意の元は，極大トーラス T_U の元と共役だから，S は次の(73)の形としてよい．

(73) $$S=\exp H=\exp \mathrm{ad}H.$$

命題7，4)により，$S^2=I$ から

(74) $$H\in\frac{1}{2}\Gamma$$

である．このような S の G 内の共役類を定めることは，命題6，命題7，3)により，$\frac{1}{2}\Gamma$ の二元が $Q=A(R)\cdot\Gamma_0$ によって移り得るとき同値と定めたときの同値類を定めることに帰着する．

命題10，3)により，T の任意の元 H は，Q の元によってある $H_0\in\bar{P}$ に移されるから，求むべき同値類の代表元は $\bar{P}$ の中に存

在する。$\overline{P}$ はコンパクトで，$\frac{1}{2}\Gamma$ は離散集合だから $\overline{P}\cap\frac{1}{2}\Gamma$ は有限集合であり，同値類は有限個しかないことがわかる。

命題8系1) により次の(75)が成立つ：

$$(75)\qquad \Gamma=\{H\in T \mid (\alpha,H)\in\mathbb{Z}\quad(\forall\alpha\in R)\}$$
$$=\{H\in T \mid (\alpha_i,H)\in\mathbb{Z}\quad(1\leqq i\leqq l)\}$$
$$=\{H=\sum_{j=1}^{l}t_je_j \mid t_j\in\mathbb{Z}\quad(1\leqq j\leqq l)\}=\sum_{j=1}^{l}\mathbb{Z}e_j$$

従ってまた次の(76)が成立つ：

$$(76)\qquad \frac{1}{2}\Gamma=\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}t_je_j \mid t_j\in\mathbb{Z}\ (1\leqq j\leqq l)\}.$$

命題11

定義6の記号を用いる。$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}n_ie_i\in\frac{1}{2}\Gamma$ $(n_i\in\mathbb{Z}\ (1\leqq i\leqq l))$ とする。

1) $H\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\overline{P}$ となるための必要十分条件は次の(a)(b)が成立つことである。ただし $\beta=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$ は最大ルートとする。

(a) $\mathbb{Z}\ni n_i\geqq 0\ (1\leqq i\leqq l)$，　(b) $\sum_{i=1}^{l}n_im_i\leqq 2$

2) H が(a)(b)をみたすとき，とり得る $(n_1,\cdots,n_l)$ の値は，次の(1)，(2)(3)(4)のいずれかである。

(1) $n_i=0\ (1\leqq {}^{\forall}i\leqq l)$．するわち $H=0$.

(2) $n_i=n_j=1\ (i\neq j)$，$n_k=0\ (k\neq i,j)$．$H=\frac{1}{2}(e_i+e_j)$

これは $m_i=m_j=1$ のときのみ存在する。

(3) $n_i=1$，$n_j=0\ ({}^{\forall}j\neq i)$．$H=\frac{1}{2}e_i$

これは (イ) $m_i=1$ または (ロ) $m_i=2$ のときのみ存在する。

(4) $n_i=2$，$n_j=0\ ({}^{\forall}j\neq i)$，$H=e_i$

このとき $m_i=1$ でなければならない。

証明　1）必要性。$H\in\frac{1}{2}\Gamma$ から $n_i\in\mathbb{Z}$。$H\in\bar{P}$ から $0\leqq(\alpha_i,H)=\frac{1}{2}n_i$ および $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}n_im_i=(\beta,H)\leqq 1$ でなければならない。十分性は 2）の後で示す。

2）H が (a)(b) をみたすとき、$(n_1,\cdots,n_\ell)$，$(m_1,\cdots,m_\ell)$ は (1)(2)(3)(4) に述べたものしかないことを示そう。(a)(b) から導かれる条件を列挙して行くことにする。

(77)　0 でない n_i は二つ以下である。

$\forall m_i\geqq 1$，$0\leqq n_i\in\mathbb{Z}$ だから $n_i,n_j,n_k\neq 0$ (i,j,k は互いに異なる) とするとき，$\sum_{i=1}^{\ell}n_im_i\geqq m_in_i+m_jn_j+m_kn_k\geqq n_i+n_j+n_k\geqq 3$ となり (b) に反する。

(78)　$n_i\neq 0$，$n_j\neq 0$ $(i\neq j)$ ならば，$n_i=n_j=1$ である。

例えば $n_i\geqq 2$ とすると，$\sum_{i=1}^{\ell}m_in_i\geqq m_in_i+m_jn_j\geqq n_i+n_j\geqq 2+1=3$ となり，やはり (b) に反する。

(79)　$n_i\neq 0$，$n_j=0$ $(\forall j\neq i)$ ならば，$n_i=1$ または 2，である。

このとき $\sum_{i=1}^{\ell}m_in_i\geqq m_in_i\geqq n_i$ だから，$n_i\geqq 3$ ならば (b) に反する。

(80)　$n_i=1$，$n_j=0$ $(\forall j\neq i)$ ならば，$m_i=1$ または 2，である。

$\sum_{i=1}^{\ell}m_in_i=m_i\leqq 2$ から明らかである。

(81)　$n_i=2$，$n_j=0$ $(\forall j\neq i)$ ならば，$m_i=1$ である。

$\sum_{i=1}^{\ell}m_in_i=2m_i\leqq 2$ から，$m_i=1$ である。

(77)－(81) から，$(n_i)(m_i)$ のとり得る値は (1)－(4) に限ることがわかる。

1）十分性。2）の証明から (a)(b) をみたす (n_i)，(m_i) は (1)－(4) に

挙げた値のみが可能である。従ってこの四つの場合に $H\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$ であることを確めればよい。

(1) $0\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$

(2) $H=\frac{1}{2}(e_i+e_j)\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$. $(\alpha_i, H)=(\alpha_j, H)=\frac{1}{2}>0$. $(\alpha_k, H)=0$ $(k\neq i,j)$ $(\alpha_0, H)=1$.

(3) $H=\frac{1}{2}e_i\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$. $(\alpha_i, H)=\frac{1}{2}>0$, $(\alpha_j, H)=0$ $(j\neq i)$. $(\beta, H)=\frac{1}{2}m_i\leq 1$

(4) $H=e_i\in\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$. $(\alpha_i, H)=1>0$. $(\alpha_j, H)=0$ $(j\neq i)$. $(\beta, H)=m_i=1$. ∎

命題 11 系.

$\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}$ の元の内 (1) $H=0$ (4) $H=e_i$ は Γ に属する. (2)(3)のHは Γ に属さない.

命題12

$T-\Gamma=\Gamma^c$ とおく. $\frac{1}{2}\Gamma\cap\bar{P}\cap\Gamma^c$ の任意の点 H は, 次の 1) 2) に挙げる高々 ℓ 個の点 H_i $(1\leq i\leq \ell)$ のどれか一つと, 群 Q の元 g によって移される: $H_i=gH$. 最大ルートを $\beta=\sum_{i=1}^{\ell}m_i\alpha_i$ とする.

1) $m_i=1$ のときは, $H_i=\frac{1}{2}e_i=\frac{1}{2}P_i$.

2) $m_i=2$ のときは, $H_i=\frac{1}{2}e_i=P_i$.

証明 命題11系において, (1)(4) の場合は $H\in\Gamma$ だから除く.

(2) $H=\frac{1}{2}(e_i+e_j)$ $(i\neq j)$, $m_i=m_j=1$ の場合, H は単体 $\bar{P}$ の頂点 $P_i=e_i$ と $P_j=e_j$ を結ぶ稜の中点である. $P_i, P_j\in\Gamma$ だから, 平行移動 $t(P_i)$, $t(P_j)\in T_0\subset Q$ である. $P_1=t(-P_i)P$ とおくとき, P_1 も $T-D$ の一つの連結成分である (命題 8). 一方 $0=t(-P_i)P_i\in t(-P_i)\bar{P}=\bar{P}_1$ だから, 命題10系により, ある $s\in W$ に対し

(82) $$sP_1=P\ ,\ s\in W$$

となる。従ってこのとき

(83) $\tau = st(-P_i) \in Q_0 = W \cdot \Gamma_0$ に対し、$\tau P = P$ となる。

(84) $\tau(P_i) = st(-P_i)P_i = s \cdot 0 = 0$

である。$i \neq j$ だから $\tau(P_j)$ は、$\bar{P}$ の 0 以外の頂点である。従って

(85) $\tau(P_j) = P_k$ で、$P_j = e_j \in \Gamma$ だから $P_k \in \Gamma$ である。

(命題 7, 1) により Γ は $A(R)$ で不変だから、$Q = A(R) \cdot t(\Gamma)$ でも不変)

H は P_i と P_j を結ぶ線分の中点だから、合同変換 τ の像として、

(86) $\tau(H)$ は $\tau(P_i) = 0$ と $\tau(P_j) = P_k$ を結ぶ線分の中点である。

すなわち

(87) $$\tau(H) = \frac{1}{2}e_k$$

である。すなわち次の(88)が成立つ:

(88) $H = \frac{1}{2}(e_i + e_j)$ は、$H_k = \frac{1}{2}e_k$ $(m_k = 1)$ と Q に関し合同である。

(85) により $P_k \in \Gamma$ だから、$P_k = \frac{1}{m_k}e_k$ から $m_k = 1$ である。

従って命題 11, 1) の (2) の場合の H に対し、命題 12 は証明された。

命題 11, 2) の (3) (イ) の場合は、$H = \frac{1}{2}e_i$ で $m_i = 1$ だから $H = H_i$ である。従ってこの場合は、$g = 1$ で命題 12 が成立つ。

最後に命題 11, 2) の (3) (ロ) の場合は、$H = \frac{1}{2}e_i$ で、$m_i = 2$ だから $H_i = \frac{1}{2}e_i$ で、$H = H_i$ であり、この場合も命題 12 は自明である。■

注意 1　$H \in \Gamma$ に対しては $\operatorname{supp} H = 1$ であり、$S \ni \operatorname{supp} H$ は L の非コンパクト実形を定義しない。そこで命題 12 では Γ^c の元だけを考えたのである。例外リー環では $m_i \geq 3$ となる係数がある。そ

こで命題7と命題12から，単純なLの非コンパクト実形で，内部自己同型S $(S^2=Z)$から生ずるものの同型類の個数は$\leq \ell$である．

2　命題12に挙げたH$_i$，$H_{j_\lambda}^{(i \neq j)}$の中には，同型な実形を生ずるものがあり得る．それらはある$\varphi \in G(T)$により，$\varphi(H_i)=H_j$となるものである．G_0の単連結被覆群をG^*とすると，$\psi \in \mathrm{Aut}\, G^*$で$\psi_* = \varphi$となるものが存在する．$G^*$の中心を$Z$とするとき$G^*/Z = G_0$で，$\psi(Z)=Z$だから，$\theta \in \mathrm{Aut}\, G$，$\theta_* = \psi_* = \varphi$となるものが存在し，$\theta(\exp H_i)\theta^{-1} = \exp(\theta_* H_i) = \exp(\psi(H_i)) = \exp H_j$となる．

定義7

PをT−Dの一つの連結成分とするとき，群$Q(P)$，$Q_0(P)$を

$$Q(P) = \{ \tau \in Q = A(R)\cdot T_0 \mid \tau P = P \}$$

$$Q_0(P) = \{ \tau \in Q_0 = W(R)\cdot T_0 \mid \tau P = P \}$$

と定義する．

命題13.

命題12の$H_i = \frac{1}{2} e_i$に対して，次の(89)が成立つ：

$$(89) \qquad H_i \equiv H_j \mod Q \Rightarrow H_i \equiv H_j \mod Q(P)$$

証明　命題8より，T−Dの各連結成分は命題10の単体Pと合同で，合同変換$\tau \in Q$は各単体の頂点を頂点に，稜を稜に写す．いま

$$(90) \qquad \tau H_i = H_j, \quad \tau \in Q$$

とする．$m_i = 2$または$m_i = 1$に応じて，$H_i = \frac{1}{2} e_i$は，単体$\overline{P}$の

頂点または稜の中点である。 単体 P の稜 $L_i=\overline{OP_i}$ は，τ により $L_j=\overline{OP_j}$ に移る． すなわち

(91) $$\tau L_i = L_j$$

である． いま L_j を含む直線 ℓ_j は，$l-1$ 個の一次方程式

(92) $$(\alpha_k,\ H) = 0\ ,\quad k\neq j$$

を連立させた方程式の解である． 今 $\{s_{\alpha_k} \mid k\neq j\}$ から生成されるワイル群 W の部分群を

(93) $$W_j = \langle s_{\alpha_k} \mid k\neq j \rangle$$

とおくとき，

(94) W_j の各元 s は，直線 ℓ_j の各点を動かさない．

いま二点

(95) $$x\in P,\quad x_1\in \tau(P)$$

をとっておく． そして $M=\{\varphi(x_1)\mid \varphi\in W_j\}$ という有限集合の点で，x に一番近いものを一つとり，$x_2=\varphi(x_1)$，($\varphi\in W_j$) とする．

(96) このとき $x_2\in P$ である．

(96) の証明 帰謬法． $x_2\notin P$ とすれば P の境界を含む $l+1$ 個の超平面の一つ π に於て，x と x_2 は反対側にある． $x_2=\varphi(x_1)\in\varphi(\tau(P))$ である。 そして (94), (91) により次の (97) が成立つ:

(97) $$L_j=\varphi(L_j)=\varphi(\tau(L_i)).$$

単体 $\varphi(\tau(P))$ は $L_j=\varphi(\tau(L_i))$ の一部を稜とする． 特に $P_j\in(\varphi\circ\tau)(P)$ であるから，次の (98) が成立つ:

(98)　超平面 $(\alpha_j, H)=0$ に関し，点 P_j は単体 $(\varphi\circ\tau)(P)$ と同じ側にある．

$x_2 \in (\varphi\circ\tau)(P)$ だから，x_2 と P_j は $(\alpha_j, H)=0$ の同じ側にある。$(\alpha_j, P_j)>0$ だから，次の (99) が成立つ：

(99)
$$(\alpha_j, x_2) > 0.$$

$0 \in (\varphi\circ\tau)(\bar{P})$ と $x_2 \in (\varphi\circ\tau)(P)$ は，超平面 $(\beta, H)=1$ の同じ側にある．$(\beta, 0)=0<1$ だから，次の (100) が成立つ：

(100)
$$(\beta, x_2) < 1.$$

(99) (100) により，x_2 と P は二つの超平面 $(\alpha_j, H)=0$ と $(\beta, H)=1$ に関し同じ側にある。今 $x_2 \notin P$ と仮定しているから，x_2 は P の境界を含むある超平面に関し P と反対側にある．(99) (100) から

(101)
$$(\alpha_k, x_2) < 0 \qquad (k \neq j,\ 1 \leq k \leq l)$$

となる。すなわち x_2 は，$D_{\alpha_k}(0)$ に関し P と反対側にある．そこで $D_{\alpha_k}(0)$ に関する鏡映 s_{α_k} による像 $s_{\alpha_k}x_2$ は，x_2 より x に近くなる。これは M の中で x_2 が一番近いという仮定に反し矛盾である。これで帰謬法により (96) が証明された．

$(\varphi\circ\tau)P$ と P は共に $T-D$ の連結成分で $x_2 \in (\varphi\circ\tau)P \cap P$ だから

(102)
$$(\varphi\circ\tau)P = P$$

となる．φ は L_j の各点を不変にするから

(103)
$$\varphi(H_j) = H_j$$

である．そこで $\theta = \varphi\circ\tau$ とおけば，$\theta \in Q$，$\theta(P)=P$ すなわち，$\theta \in Q(S)$ で，(90) (103) から，$\theta(H_i) = (\varphi\circ\tau)(H_i) = H_j$ となる．∎

命題 14

任意の $\varphi \in Q(P)$ を，$\varphi = t(z)\tau$ $(z \in \Gamma, \tau \in A(R))$ と記すとき，$\tau = \hat{\varphi}$ とおけば，$f: \varphi \mapsto \hat{\varphi} = \tau$ は，$Q(S)$ から $A(R)$ の中への同型写像である．

証明 (a) f は $Q(S) \to A(R)$ の準同型写像である．

実際 $\Gamma_0 = t(\Gamma)$ は，Q の正規部分群だから

$$\varphi_i = t(z_i)\tau_i, \quad i=1,2, \quad z_i \in \Gamma, \quad \tau_i \in A(R) \quad \text{に対し}$$

$$\varphi_1\varphi_2 = t(z_1)\tau_1 t(z_2)\tau_2 = t(z_1)\tau_1 t(z_2)\tau_1^{-1}\cdot\tau_1\tau_2 = t(z_1 + \tau_1 z_2)\tau_1\tau_2 \quad \text{だから}$$

$$f(\varphi_1\varphi_2) = \tau_1\tau_2 = f(\varphi_1)f(\varphi_2).$$

(b) f は一対一写像である．

$f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$ とすると，$t(z_1)\tau_1 = t(z_2)\tau_2$ だから，

$$t(z_1 - z_2) = \tau_2\tau_1^{-1} \in \Gamma_0 \cap A(R) = \{1\}$$

だから，$z_1 = z_2$，$\tau_1 = \tau_2$，$\varphi_1 = \varphi_2$ であり，f は一対一である． ∎

命題 15

1) 任意の $p \in A(B)$ は最大ルート β を不変にする：$p\beta = \beta$.

2) $$Q(P) = A(B)\cdot Q_0(P) = Q_0(P)A(B)$$

3) $\hat{Q}(P) = \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in Q(S)\}$ ($\hat{\varphi}$ は命題 14 の意義)，$-\beta = \alpha_0$ とおくとき，

$\hat{Q}(P) = \{\tau \in A(R) \mid \tau(B \cup \{\alpha_0\}) = B \cup \{\alpha_0\}\}$．となる．従って $\hat{Q}(P)$ は拡大ディンキン図形の対称群である．

証明 1) $p \in A(B)$ は，$pB = B$ をみたすから，B の置換 $\alpha_i \mapsto \alpha_{i'}$ $(p\alpha_i = \alpha_{i'})$ を引き起す。$R^+(B)$ の最大ルートを $\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$ とすれば

(104) $$p\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_{i'}$$

(105) $$\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{l} m_{i'} \alpha_{i'}$$

となる。$pR^+(B) = R^+(B)$ だから、(104)(105)を比較して、命題9, 1)から

(106) $$m_{i'} \geqq m_i \quad (1 \leqq i \leqq l)$$

となる。一方(105)から、(107) $\sum_{i=1}^{l} m_{i'} = \sum_{i=1}^{l} m_i$ となるので

(106)(107)により、$m_{i'} = m_i \ (1 \leqq i \leqq l)$ となるから、(104)(105)より $p\beta = \beta$

となる。

2) 基本単体 P は、

(107) $$P = \{ H \in T \mid (\alpha_i, H) > 0 \ (1 \leqq i \leqq l), \ (\beta, H) < 1 \}$$

で定義される。そこで任意の $p \in A(B)$ に対し、$p\alpha_i = \alpha_{i'}$, $p\beta = \beta$ だから

(108) $pP = P \quad (\forall p \in A(B))$ となるので

(109) $A(B) \subset Q(P)$, である。また

(110) $A(B) \cdot Q_0(P) \subset Q(P)$ である。

$Q = A(B) \cdot \Gamma_0 = A(B) \cdot W \cdot \Gamma_0$ だから、任意の $\varphi \in Q(P)$ は

(111) $\varphi = p \circ s \circ t(z)$, $p \in A(B)$, $s \in W$, $z \in \Gamma$

と表わされる。このとき(109)により、$s \circ t(z) = p^{-1} \circ \varphi \in Q(P) \cap Q_0 = Q_0(P)$

となる。従って $\varphi = p \circ s \circ t(z) \in A(B) Q_0(P)$ が、$\forall \varphi \in Q(P)$ に対し成立つから

(112) $Q(P) \subset A(B) \cdot Q_0(P)$

となる。(110)(112)から、(113) $Q(P) = A(B) \cdot Q_0(P)$ となる。

Q_0 は Q の正規部分群だから、$Q_0(P)$ は $Q(P)$ の正規部分群であり、

(114) $A(B) \cdot Q_0(P) = Q_0(P) \cdot A(B)$

が成立つ。これで 2)が証明された。

3) (a) $\varphi \in Q(P)$ ならば, $\hat{\varphi}$ は $B \cup \{\alpha_0\}$ を不変にする.

証明 $\varphi \in Q$ だから, $\varphi = t(z)\cdot\tau$, $z \in \Gamma$, $\tau \in A(R)$ とかける. そして $\varphi(P) = P$ だから, $\tau P + z = P$ である. φ は $T \to T$ の同相写像だから, $\tau\overline{P} + z = \overline{P}$ となる。 そこで $\forall H \in \overline{P}$ に対し $\tau H + z \in \overline{P}$ となる. 特に $H = 0$ として, 次の(115)が成立つ:

(115) $$z \in \overline{P} \cap \Gamma.$$

$\overline{P} = \{H \in T \mid (\alpha_i, H) \geqq 0 \ (1 \leqq i \leqq \ell), (\beta_1, H) \leqq 1\}$ で, $(\beta, H) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, H) \geqq 0$ だから, 次の(116)が成立つ:

(116) $$H \in \overline{P} \Rightarrow 0 \leqq (\alpha_0, H) \leqq 1.$$

特に $\Gamma = R^0$ (命題8系, 1)) だから, 次の(117)が成立つ:

(117) $$z \in \overline{P} \cap \Gamma \Longrightarrow (\alpha_0, z) = 0 \text{ または } 1.$$

そこで (β, z) の値によって二つの場合が生ずる:

(A) $(\beta, z) = 0$ のとき.

$\sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, z) = 0$ で, $m_i \geqq 1$, $(\alpha_i, z) \geqq 0$ だから, $(\alpha_i, z) = 0$ $(\forall i)$, $z = 0$ である.

(B) $(\beta, z) = 1$ のとき.

$\sum_{i=1}^{\ell} m_i (\alpha_i, z) = 1$ で $m_i \geqq 1$, $(\alpha_i, z) \geqq 0$ だから, $\exists k$ に対し $(\alpha_k, z) = 1$

$(\alpha_i, z) = 0$ $(i \neq k)$ で, $m_k = 1$ となる. $\therefore z = e_k = P_k$ である.

(A)の場合. $\varphi = \tau \in A(R) \cap Q(P)$ だから, $\varphi(0) = 0$ である. そこで φ は単体 $\overline{P}$ の 0 を通る面をまたもう一つの 0 を通る面(超平面)に移す. 0 を通る $\overline{P}$ の面は, $(\alpha_i, H) = 0$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ の ℓ 個である. 従って $\varphi(B) = B$, $\varphi \in A(B)$ であり, 1) により $\varphi(-\alpha_0) = -\alpha_0$ となる.

従って (A) の場合, $\varphi(B\cup\{\alpha_0\}) = B\cup\{\alpha_0\}$ である.

(B) の場合. このとき $z = P_k \in \Gamma$, $m_k = 1$ である. $\varphi = t(P_k)\tau$ ($\tau \in A(R)$) だから, $\bar{P} = \varphi(\bar{P}) = \tau(\bar{P}) + P_k$, $\tau(\bar{P}) = \bar{P} - P_k$ となる。そこで, $H' = H - P_k = H - e_k$ とおくと, $H\in\bar{P} \Leftrightarrow H'\in\tau(\bar{P})$ となる。そして, $(\alpha_i, P_k) = (\alpha_i, e_k) = \delta_{ik}$, $(\beta, P_k) = m_k = 1$ だから, 次の(118)(119)が成立.

(118) $(\alpha_i, H)\geqq 0 \Leftrightarrow (\alpha_i, H') + (\alpha_i, P_k)\geqq 0 \Leftrightarrow (\alpha_i, H')\geqq 0\ (i\neq k)$, $(-\alpha_k, H')\leqq 1$.

(119) $(\beta, H)\geqq 0 \Leftrightarrow (\beta, H') + (\beta, P_k)\leqq 1 \Leftrightarrow (\beta, H')\leqq 0 \Leftrightarrow (\alpha_0, H')\geqq 0$.

従ってこのとき, $-\beta = \alpha_0$ とすると

(120) $$\tau(\bar{P}) = \{H'\in T \mid (\alpha_j, H')\geqq 0\ (j\neq k),\ (-\alpha_k, H')\leqq 1,\ (\alpha_0, H')\geqq 0\}.$$

となる。そこで $B_k = (B - \{\alpha_k\})\cup\{\alpha_0\}$ とおくとき, $\tau(\alpha_k) = \alpha_0$, $\tau(\alpha_0) = \alpha_k$, $\tau B = B_k$ となる。従ってこのとき

$$\hat{\varphi}(B\cup\{\alpha_0\}) = \tau(B\cup\{\alpha_0\}) = B_k\cup\{\alpha_k\} = B\cup\{\alpha_0\}$$

であり, $\hat{\varphi}$ は $B\cup\{\alpha_0\}$ を不変にする.

(b) 逆に $\tau\in A(B)$ が $B\cup\{\alpha_0\}$ を不変にすれば, $\tau\in\hat{Q}(P)$ である. すなわちある $\varphi\in Q(P)$ が存在して, $\hat{\varphi} = \tau$ となる.

証明 $\tau = ps$, $p\in A(B)$, $s\in W$ とする. 2) により $p\in Q(P)$, $\hat{p} = p$ だから, $\tau = p$ のとき (b) は成立つ. そこで次の (121) を考える.

(121) $s\in W$ が $B\cup\{-\alpha_0\}$ を不変にすれば, $s\in\hat{Q}(P)$ である.

(121) ⇒ (b) を示そう. $\tau\in A(R)$ が $B\cup\{-\alpha_0\}$ を不変にすれば $\tau = ps$, $p\in A(B)$, $s\in W$ のとき, p も $B\cup\{\alpha_0\}$ を不変にするから, $s = p^{-1}\tau$ も $B\cup\{\alpha_0\}$ を不変にする. そこで (121) により, $s\in\hat{Q}(P)$ となる. $p\in\hat{Q}(P)$

だから，$\tau = ps \in \hat{Q}(P)$ となり (b) が成立つ。

そこで後は (121) を証明すればよい。(121) の証明　$s=1$ のときは (121) は明らかであるから，以下 $s \neq 1$ とする。$W \cap A(B) = \{1\}$ だから このとき $s \notin A(B)$ である。従って $sB \neq B$ である。一方 s は $B \cup \{\alpha_0\}$ を不変にするから，ある $\alpha_k \in B$ が存在して，$s\alpha_k = \alpha_0$ となる。そこで $s^{-1}(\alpha_0) = \alpha_k$ であり，$B_k = (B - \{\alpha_k\}) \cup \{\alpha_0\}$ とおくとき，

(122)　$sB = B_k$　となる。

今 (121) の仮定から，s は $B \cup \{\alpha_0\}$ をそれ自身に写す全単写であるから，(122) より，次の (123) が成立つ：

(123)　$s(\alpha_0) = \alpha_k$

$sB = B_k$ は，R のもう一つの基底である。B に関する最大ルートが β であるから，$sB = B_k$ に関する最大ルートは，$s\beta = -\alpha_k$ である。そこで命題 9 により，

(124)　$-\alpha_k = \sum_{j \neq k} n_j \alpha_j + n \cdot \beta$　，但 $n_j, n \in N$

の形に表わされる。$\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i$ の α_k に (124) × (−1) を代入すると

(125)　$\beta = \sum_{j \neq k} m_j \alpha_j + m_k \alpha_k = \sum_{j \neq k} m_j \alpha_j + m_k (n\beta - \sum_{j \neq k} n_j \alpha_j)$

となる。$B_k = sB$ は基底だから一次独立であるので (125) から

(126)　$m_k n = 1$ で $\mathbb{Z} \ni m_k, n \geq 1$ なので，$m_k = n = 1$ となる。

(127)　$m_k = 1$ だから $P_k = e_k \in \Gamma$ である。

(128)　そこで $\varphi = t(P_k)s \in Q$ である。

(129)　さらに $\varphi \in Q(P)$，すなわち $\varphi(P) = P$ である。

∵) (122) (128) から, $\varphi(\bar{P}) = s(\bar{P}) + P_k$ だから, $H' = H + P_k$ とおくと $H \in \bar{P} \Leftrightarrow H' \in \varphi(\bar{P})$ であるから, $\varphi(\bar{P}) = \{H' \in T \mid (\alpha_j, H') \geq 0 \ (j \neq k), (\alpha_k, H') \geq 0, (\alpha_0, H') \leqq 1\} = \bar{P}$ となるから, $\varphi \in Q(P)$ であり (129) が証明された.

$\varphi = t(P_k)s$, $P_k \in \Gamma$, $s \in W$ だから, $\hat{\varphi} = s$ であり, $s \in \hat{Q}(P)$ となり, (121) が証明された. ∎

命題15の証明の中で次の系が証明されている.

命題15系

$\varphi = t(z)\tau$, $(z \in \Gamma,\ \tau \in A(B))$ が $Q(P)$ に属するとき, 次の (A) (B) のどちらかが成立つ:

(A) $z = 0$, $\varphi = \tau \in A(B)$.

(B) $z = P_k \in \Gamma$, $\tau B = B_k$ $(B_k = (B - \{\alpha_k\}) \cup \{\alpha_0\})$ で, $\tau\alpha_0 = \alpha_k$, $m_k = 1$.

命題16

命題12の式 $H_i = \frac{1}{2} e_i$ に対し, $H_i \equiv H_j \bmod Q(P)$ となるための必要十分条件は, 次の (a) (b) (c) の内の一つが成立つことである:

(a) $H_i \equiv H_j \bmod A(B)$.

(b) $m_i = m_j = 2$ で, α_i と α_j は $\hat{Q}(P)$ の元で移り合う.

(c) $m_i = m_j = 1$ で, $\exists \tau \in \hat{Q}(P)$, $\tau\alpha_i = \alpha_0$, $\tau(\alpha_0) = \alpha_j$ となる.

証明 必要性. $\varphi \in Q(P)$ により $\varphi H_i = H_j$ となったとする. 命題15系により, 次の (A), (B) のどちらかが成立つ:

(A) $z = 0$, $\varphi = \tau \in A(B)$.

(B) $\tau = P_k \in \Gamma$, $m_k = 1$ で、$\tau B = B_k$, $\tau(\alpha_0) = \alpha_k$.

(130) (A) $\Rightarrow$ (a).

∵) (A)が成立つとき、$\varphi = \tau \in A(B)$ だから、$H_i \equiv H_j \bmod A(B)$ となる。

次に(B)の場合を考える。$\tau = \hat{\varphi}$ は $B \cup \{\alpha_0\}$ を不変にする（命題15）から、$\tau\alpha_i$ $(1 \leqq i \leqq l)$ については、次の二つの場合がある：

(α) $\tau\alpha_i = \alpha_p$ $(\exists p \in \{1, 2, \cdots, l\})$, (β) $\tau\alpha_i = \alpha_0$

(131) (B) かつ (α) $\Rightarrow$ (b).

証明 このとき、次の(132)が成立つ：

(132) $\alpha_0 = -\alpha_0 = \tau\alpha_s$ となる $s \in \{1, 2, \cdots, l\}$, $s \neq p$ が存在する。

(133) $(\beta, \tau H_i) = (-\tau\alpha_s, \tau(\tfrac{1}{2}e_i)) = -\tfrac{1}{2}(\alpha_s, e_i) = 0$, $(s \neq i)$

∵) $s = i$ とすると $\alpha_0 = \tau\alpha_s = \tau\alpha_i = \alpha_p$ となって矛盾が生ずる。

一方(B)から $\tau(H_i) = \varphi(H_i) - P_k$ かつ $m_k = 1$ だから

(134) $(\beta, \tau H_i) = (\beta, H_j - P_k) = \frac{1}{2}m_j - m_k = \frac{1}{2}m_j - 1$

となる。(133)(134)から、次の(135)が得られる：

(135) $m_j = 2$, $j \neq k$.

またこのとき $1 \leqq t \leqq l$ となる任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して

(136) $$(\alpha_t, \tau H_i) = (\alpha_t, \tfrac{1}{2}e_j - e_k) = \begin{cases} 0, & t \neq j, k \\ 1/2, & t = j \\ -1, & t = k \end{cases}$$

である。一方

(137) $(\alpha_p, \tau H_i) = (\tau\alpha_i, \tau H_i) = (\alpha_i, \tfrac{1}{2}e_i) = \frac{1}{2}$

が成立つから、(136)と(137)を比較して、

(138) $$p = j, \quad \tau\alpha_i = \alpha_j, \quad \tau = \hat{\varphi} \in \hat{Q}(P)$$

となる. またこのとき (B) と (135) $m_j = 2$, $j \neq k$ により,

(139) $$m_i = (\alpha_0, e_i) = -(\tau(-\alpha_0), 2\tau H_i) = -2(\alpha_k, \tfrac{1}{2}e_j - e_k) = 2 = m_j$$

が成立つ. (138)(139) により, (131) が証明された.

(140) (B) かつ (β) $\Rightarrow$ (C)

仮定 (β) から, (141) $\tau\alpha_i = -\alpha_0$ である.

また (B) から (142) $\tau B = B_k = (B - \{\alpha_k\}) \cup \{-\alpha_0\}$ である.

そこで次の (143) が成立つ:

(143) $(\forall r \neq k)(\exists t \neq i)(\alpha_r = \tau\alpha_t)$.

このとき $t \neq i$ だから

(144) $(\alpha_r, \tau H_i) = (\tau\alpha_t, \tau H_i) = (\alpha_t, \frac{1}{2}e_i) = 0$, $(\overset{r \neq k}{t \neq i})$ となる.

これから, 次の (145) が導かれる:

(145) $$k = j.$$

(145) の証明. $k \neq j$ と仮定して矛盾を導く. このとき (144) の r として j がとれるから. (B) より $\tau H_i = \varphi(H_i) - P_k = H_j - P_k = \frac{1}{2}e_j - e_k$ で

(146) $$0 = (\alpha_j, \tau H_i) = (\alpha_j, \tfrac{1}{2}e_j - e_k) = \tfrac{1}{2} \quad (j \neq k \text{ と仮定している})$$

これは矛盾である. 従って帰謬法により, (145) が証明された.

またこのとき, 上の (145) により, 次の (147) が成立つ:

(147) $$\tau H_i = \tfrac{1}{2}e_j - e_k = \tfrac{1}{2}e_j - e_j = -\tfrac{1}{2}e_j = -H_j.$$

このとき仮定 (β) $\tau\alpha_i = -\alpha_0$ と (147) により, 次の (148) が成立つ:

(148) $\quad m_j = (\alpha_0, e_j) = (-\tau\alpha_i, -\tau e_i) = (\alpha_i, e_i) = 1.$

(B) と (145) により、

(149) $\quad \tau(\alpha_0) = \alpha_j$

であるから、次の (150) が成立つ：（$\tau H_i = \frac{1}{2}e_j - e_k = -\frac{1}{2}e_j$ ((145)を用いる)）

(150) $\quad m_i = (\beta, e_i) = (\tau\beta, \tau e_i) = -2(\tau(\alpha_0), \tau H_i) = -2(\alpha_j, -\frac{1}{2}e_j)$
$\qquad = 1$

(141) (149) (148) (150) により、(140) が証明された。

十分性。

(a) 命題 15 により、$A(B) \subset Q(P)$ だから、$H_i \equiv H_j \mod A(B)$ ならば、$H_i \equiv H_j \mod Q(P)$ となる。

前に証明された (A) ⇒ (a) と合わせて (A) ⟺ (a) が言えたわけである。そこで以下 (B) の場合だけを考えればよい。

(B) により、$\varphi = t(z)\tau \in Q(P)$ のとき、$z = p_k \in \Gamma$ で $m_k = 1$ であり、かつ $\tau B = B_k$, $\tau(\alpha_0) = \alpha_k$ となる。いま次の条件 (α), (β), (α′), (β′) を考える：

(α) $\quad \tau\alpha_i = \alpha_p, \ \exists p \in \{1, 2, \cdots, l\}$, $\qquad$ (α′) $\quad k \neq j$

(β) $\quad \tau\alpha_i = \alpha_0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$, (β′) $\quad k = j$

上の必要性の証明から、命題の仮定と (B) の下で

(151) $\quad$ (α) ⇒ (b), (α) ⇒ (α′), (β) ⇒ (c), (β) ⇒ (β′) が成立つことが証明されている。(b) と (c) は両立せず、(α) (β) は起り得る場合をつくしているから、転換法により逆向きの ⇐

が成立つので

(152) $\qquad (\alpha) \Longleftrightarrow (b), \qquad (\beta) \Longleftrightarrow (c)$

が成立つ。同様に

(153) $\qquad (\alpha) \Longleftrightarrow (\alpha'), \qquad (\beta) \Longleftrightarrow (\beta')$

が成立つ。

(b)の十分性の証明

今(b)が成立つとする。このとき $m_i = m_j = 2$ で、$\tau\alpha_i = \alpha_j$ となる $\tau \in \hat{Q}(P)$ が存在する。τ に対して $\varphi \in Q(P)$ が存在し $\varphi = t(z)\tau$, $z \in \Gamma$ となるが、(B)により $z = P_k \in \Gamma$ であるから $m_k = 1$ で、$\tau B = B_k = (B - \{\alpha_k\}) \cup \{\alpha_0\}$ である。また(152)(153)から次の(154)が成立つ。

(154) $\qquad (\alpha)\ \tau\alpha_i = \alpha_p \ (\exists p \in \{1, 2, \dots, l\}), \qquad (\alpha')\ k \neq j.$

今 $m_k = 1$ だから、$P_k = e_k$ である。そこで

(155) $\qquad H' = \tau H_i + P_k = \tau H_i + e_k$ とおくとき、$H' = H_j$ である

ことを示す。このとき $\tau B = B_k$ は B と同じく Γ の基底であるから、(155)を示すためには次の(156)を証明すれば十分である：

(156) $\qquad (\alpha_t, H') = (\alpha_t, H_j), \quad (\forall \alpha_t \in B_k)$

実際次の(157)–(159)が成立つ。$t \neq j, k$ のとき、$\alpha_t = \tau\alpha_s$ となる $s \neq i$ がある。

(157) $\qquad (\alpha_t, H') = (\alpha_t, \tau H_i + e_k) = (\tau\alpha_s, \tau H_i) + (\alpha_t, e_k) = (\alpha_s, H_i) = (\alpha_s, \tfrac{1}{2}e_i)$

$$= 0 = (\alpha_t, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_t, H_j), \quad t \neq j, k.$$

(158) $\qquad (\alpha_j, H') = (\alpha_j, \tau H_i) + (\alpha_j, e_k) = (\tau\alpha_i, \tau H_i) = (\alpha_i, \tfrac{1}{2}e_i) = \tfrac{1}{2}$

$$= (\alpha_j, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_j, H_j)$$

いま $\tau B = B_k$ だから，$\alpha_0 = \tau\alpha_p$．$p\in\{1,2,\cdots,l\}$，$p\neq i$ が存在するから，

(159) $$(\alpha_0, H') = (\tau\alpha_p, \tau H_i) + (\alpha_0, e_k) = (\alpha_p, \tfrac{1}{2}e_i) - m_k = -1 = -\frac{m_j}{2}$$
$$= (\alpha_0, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_0, H_j).$$

これで (155) が証明されたから，$\varphi = t(P_k)\tau \in Q(P)$ により，$\varphi(H_i)$ $= (t(P_k)\tau)H_i = \tau(H_i) + P_k = H_j$ となるから $H_i \equiv H_j \bmod Q(P)$ である．

(c) の十分性の証明．

今 (c) が成立つとする．このとき $m_i = m_j = 1$ で，ある $\tau\in\tilde{Q}(P)$ について $\tau\alpha_j = \alpha_0$，$\tau\alpha_0 = \alpha_j$ となる．このとき (152) (153) から，

(160) $\qquad (\beta)\ \tau\alpha_i = \alpha_0, \qquad (\beta')\ k = j$

が成立つ．そこで (b) の場合と同様次の (161) を証明すればよい．

(161) $\qquad H' = \tau H_i + e_j$ とおくとき，$H' = H_j$ である．

$B_i = (B - \{\alpha_i\}) \cup \{\alpha_0\}$ は，T の基底であるから，(161) を示すには

(162) $$(\alpha_t, H') = (\alpha_t, H_j), \quad (\forall\alpha_t \in B_i)$$

を示せば十分である。$\tau\alpha_i = \alpha_0$ だから，$t\neq i, j$ として次の (163)–(165) を示せばよい．$\alpha_t = \tau\alpha_s$，$(s\neq i)$ となる α_s があるから

(163) $$(\alpha_t, H') = (\alpha_t, \tau H_i) + (\alpha_t, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_s, \tfrac{1}{2}e_i) = 0 \quad (t\neq i, j)$$
$$= (\alpha_t, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_t, H_j)$$

(164) $$(\alpha_j, H') = (\tau\alpha_0, \tau H_i) + (\alpha_j, e_j) = -\frac{m_i}{2} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$
$$= (\alpha_j, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_j, H_j)$$

(165) $$(\tau\alpha_i, H') = (\tau\alpha_i, \tau H_i) + (\alpha_0, e_j) = (\alpha_0, \tfrac{1}{2}e_i) - m_j = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$$
$$= (\alpha_0, \tfrac{1}{2}e_j) = (\alpha_0, H_j).$$

これで(161)が証明されたから，後は(b)の場合と同様にして，$\varphi H_i = H_j$, $\varphi = t(p_j)\tau \in Q(P)$ が示される。■

以上をまとめて，次の定理1を得る．

定理1.

(a) コンパクト半単純リー環Lの位数2の任意の自己同型Sに対し，Lの極大可換部分リー環Tで，$S(T)=T$となるものが存在する．

(b) Sは$S = A_p \exp \operatorname{ad} H$, $H \in T$の形にかけ，$A_p(T)=T$, $A_p|T = p \in A(B)$ (BはRの基底)となる。さらにSは命題5の条件1)−4)をみたす．

(c) SがLの内部自己同型ならば，$S = \exp \operatorname{ad} H$, $H \in \frac{1}{2}\Gamma = \frac{1}{2}\{H \in T \mid \exp H = 1\}$とかける．

(d) $S \in \operatorname{Aut} L$, $S^2 = I$とし，Sの固有値± 1に対するL内の固有空間をK, Nとすると$L = K \oplus N$で，$L(S) = K \oplus P$, $P = iN$はLの複素化$L^{\mathbb{C}}$の非コンパクト実形であり，$L^{\mathbb{C}}$の非コンパクト実形はすべて，この形で得られる．

(e) $S, S' \in \operatorname{Aut} L$が共に位数2とするとき，次の同値が成立つ: (イ) $L(S) \cong L(S')$ $\Longleftrightarrow$ (ロ) SとS'は$\operatorname{Aut} L^{\mathbb{C}}$の中で共役である．

さらに$S = \exp \operatorname{ad} H$, $S' = \exp \operatorname{ad} H'$, $(H, H' \in T)$のときは次の(ロ)⟺(ハ)が成立つ．

(ロ) ⟺ (ハ) $H \equiv H' \mod Q = t(\Gamma) \cdot A(R)$

(f) 任意の$S = \exp \operatorname{ad} H$, $H \in T$ $(S^2 = I, S \neq I)$に対して，Hは次の

(I)(II) の H_i と、Q に関し合同である：ただし最大ルートを $\beta=\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$ とする。

(I) $m_i=1$ で、$H_i=\frac{1}{2}e_i$.

(II) $m_i=2$ で、$H_i=\frac{1}{2}e_i$

ただし $(e_1,\cdots,e_l)$ は、$B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ の双対基底：$(\alpha_i,e_j)=\delta_{ij}$.

(g) H_i, H_j は (f) の (I) または (II) をみたすとき、$H_i\equiv H_j \mod Q(P)$

$\Longleftrightarrow$ (a) または (b) または (c)、ただし

(a) $H_i\equiv H_j \mod A(B)$、$\exists p\in A(B)$, $p\alpha_i=\alpha_j$.

(b) $m_i=m_j=2$ で、$\exists \tau\in\hat{Q}(P)$, $\tau\alpha_i=\alpha_j$.

(c) $m_i=m_j=1$ で、$\exists \tau\in\hat{Q}(P)$, $\tau\alpha_i=\alpha_0$, $\tau\alpha_0=\alpha_j$. ただし $\alpha_0=-\beta$.

証明 (a) 命題3. (b) 命題5. (c) 命題1, 5) により、$S\in \mathrm{Int}\,L=G_0 \Longleftrightarrow S|T\in W(R)$. 一方 $S=A_p\cdot\exp\mathrm{ad}H$ のとき、$S|T=A_p|T=p\in A(B)$ であり、$A(B)\cap W(R)=\{I\}$ だから、S が内部自己同型ならば $p\in A(B)\cap W(R)=\{I\}$、$A_p=I$、$S=\exp\mathrm{ad}H$ となる。

(d) (イ)$\Rightarrow$(ロ) $L(S)\cong L(S')$ ならば、$\exists A\in \mathrm{Aut}\,L^{\mathbb{C}}$, $AL(S)=L(S')$ となる。$AK=K''$, $AP=P''$ とすると $L(S')=K''\oplus P''$ は $L(S')$ のカルタン分解である。($B|K''\times K''$ は負値定符号, $B|P''\times P''$ は正値定符号). $L(S')$ の二つのカルタン分解は、ある $B\in \mathrm{Int}\,L(S')$ で共役だから、$BK''=K'$, $BP''=P'$ となる。このとき $C=AB\in\mathrm{Aut}\,L^{\mathbb{C}}$ は、$CK=K'$, $CP=P'$ となる。$CSX=CX\Leftrightarrow SX=X\Leftrightarrow X\in K\Leftrightarrow CX\in K'\Leftrightarrow S'CX=CX$, $(X\in K)$ であるから、$CSX=S'CX$ $(\forall X\in K)$. 同様に $CSY=S'CY$ $(\forall Y\in N)$ だから $CS=S'C$

$S'=CSC^{-1}$, $(C\in\mathrm{Aut}\,L^{\mathbb{C}})$ となる。

(ロ)$\Rightarrow$(イ)　$S'=A^{-1}SA$, $A\in \mathrm{Aut}\,L^{\mathbb{C}}$ とする．$X\in K'\Leftrightarrow S'X=X\Leftrightarrow SAX=AX$ $\Leftrightarrow AX\in K$ だから，$AK'=K$．同様に $AN'=N$ であるから，$AL(S)=A(K'\oplus iN')=K\oplus iN=L(S)$ で，$A\in\mathrm{Aut}\,L^{\mathbb{C}}$ だから $L(S')\cong L(S)$ である．

(ロ)$\Leftrightarrow$(ハ)　命題6と命題7, 3)．　(ニ)　命題10, 11, 12 による．

(ホ)　命題16による．特に(ii)の場合ある $p\in A(B)$ に対し $pH_i=H_j$ である．このとき $(p\alpha_i, e_j)=(p\alpha_i, 2H_j)=(p\alpha_i, 2pH_i)=(\alpha_i, e_i)=1=(\alpha_j, e_j)$ である．

さらに $k\neq j$ に対し $e_k=pe_t$ となる $t\in\{1, 2, \cdots, l\}$ があり，$k\neq j$ だから $t\neq i$ である．従って $(p\alpha_i, e_k)=(p\alpha_i, pe_t)=(\alpha_i, e_t)=0=(\alpha_j, e_k)$ となる．これで $p\alpha_i=\alpha_j$ が証明された．∎

定理1により内部自己同型で定まる $L^{\mathbb{C}}$ の実形で同型でないものの個数は，定理1(ホ)の H_i の群 $Q(P)$ に関し合同でないものの個数に等しく，$l=\mathrm{rank}\,L$ より大きくはない．

また内部自己同型 S_i で定まる $L^{\mathbb{C}}$ の実形 $L(S_i)$ に対し，$K(S_i)=\{X\in L(S_i)\mid S_iX=X\}$ は，$L(S_i)$ の随伴群 $G_0(L(S_i))=\mathrm{Int}\,L(S_i)$ の極大コンパクト部分群のリー環である．$K(S_i)$ を $L(S_i)$ の特性部分環という．

複素単純リー環 M の二つの実形 L_1, L_2 の特性部分環を K_1, K_2 とするとき，$K_1\cong K_2\Leftrightarrow L_1\cong L_2$ である（第5節B定理3）．

すなわち特性部分環 K は実形 L を特徴付けるのである．

この特性部分環の構造は，次の定理2で与えられる．

定理 2

(0)　定理1の内部自己同型 $S_i=\exp\mathrm{ad}\,H_i$ の定める $L^{\mathbb{C}}$ の実形 $L(S_i)$

における，S_iの固定点の作るリー環 $K(S_i)=\{X\in L \mid S_iX=X\}$ は完約リー環(reductive Lie algebra)である。$K(S_i)$の極大可換部分環TはLの極大可換部分環でもある(命題4)。$(L^{\mathbb{C}}, T^{\mathbb{C}})$のルート系をR，

Rの一つの基底を $B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$ とする。いま

$$R(K(S_i))=\{\alpha\in R \mid \alpha=\pm\sum_{j=1}^{\ell} n_j\alpha_j,\ n_i\in 2N\}$$

とおくとき，次の(166)が成立つ。

$$(166)\qquad K(S_i)^{\mathbb{C}}=T^{\mathbb{C}}+\sum_{\alpha\in R(K(S_i))}\mathbb{C}X_\alpha$$

(I)　$m_i=1$のとき。

$K(S_i)$の中心は1次元でRH_iに等しい。半単純リー環$[K(S_i), K(S_i)]^{\mathbb{C}}$のルート系の基底は$B-\{\alpha_i\}$で与えられる。

(II)　$m_i=2$のとき。

$K(S_i)$は半単純リー環であり，複素化$K(S_i)^{\mathbb{C}}$のルート系の基底は，$B_i=(B-\{\alpha_i\})\cup\{\alpha_0\}$で与えられる。ただし$\beta$を$R^+(B)$の最大ルートで$\beta=\sum_{j=1}^{\ell}m_j\alpha_j$とするとき，$-\beta=\alpha_0$である。

証明 (0) 命題7の証明にあるように，$S_i\in \mathrm{Aut}\,L$に対し，随伴群$G_0=\mathrm{Int}\,L$の自己同型ψであって，その微分自己同型ψ_*がS_iに等しいものが存在する。$K_0(S_i)=\{g\in G_0 \mid \psi(g)=g\}$は，$G_0$の閉部分群だから，コンパクト・リー部分群であり，そのリー環は$K(S_i)$である。従って$K(S_i)$は完約リー環である。

命題4により，$K=K(S_i)$とするとき$K\supset T$だから，$[T,K]\subset K$である。また$N=\{X\in L \mid S_iX=-X\}$に対しても$[T,N]\subset N$となる。

従って完全可約な $\mathrm{ad}\,T^{\mathbb{C}}$ の既約部分空間の直和として $K^{\mathbb{C}}$ および $N^{\mathbb{C}}$ は表わされる。特に各ルート $\alpha \in R$ に対するルート空間 $M_\alpha = \{X \in L^{\mathbb{C}} = M \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (\forall H \in T^{\mathbb{C}})\}$ は、$K^{\mathbb{C}}$ または $N^{\mathbb{C}}$ に含まれる ($\dim M_\alpha = 1$ に注意)。$X \in M_\alpha$ のとき、

$$(167) \qquad S_i X = \exp(2\pi i(\alpha, H_i))X$$

であるから、次の (168) が成立つ：

$$(168) \qquad M_\alpha \subset K(S_i)^{\mathbb{C}} \iff (\alpha, H_i) \in \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, H_i) = (\alpha, \tfrac{1}{2}e_i) = \tfrac{1}{2}(\sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j, e_i) = \tfrac{1}{2}n_i \quad \text{だから}$$

$$(169) \qquad (\alpha, H_i) \in \mathbb{Z} \iff n_i \in 2\mathbb{Z}$$

である。(168), (169) により、(166) が成立つ。

(I) $K(S_i)$ の中心 Z は、極大可換部分環 T に含まれる。のとき複素化 $Z^{\mathbb{C}}$ は $K(S_i)^{\mathbb{C}}$ の中心であり、$H \in T^{\mathbb{C}}$ に対して (166) から

$$(170) \qquad H \in Z^{\mathbb{C}} \iff \alpha(H) = 0 \quad (\forall \alpha \in R(K(S_i)))$$

が成立つ。いま $\alpha \in R^+(B)$ を、$\alpha = \sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j$ と表わすとき、命題9により、$1 = m_i \geqq n_i \geqq 0$ だから $n_i = 1$ または 0 である。従って (0) における $\alpha \in R(K(S_i))$ となるための条件 $n_i \in 2\mathbb{Z}$ は、この場合 $n_i = 0$ となる。従ってこの場合

$$(171) \qquad R(K(S_i)) = \{\pm \sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j \in R \mid n_i = 0\}$$

となる。従ってこのとき $B - \{\alpha_i\}$ がルート系 $R(K(S_i))$ の基底となる。$B - \{\alpha_i\}$ は一次独立な $l-1$ 個の元から成るから、$K(S_i)$ の半単純部分 (その導イデアル) は、階数 $l-1$ である。従って $K(S_i)$ の中

Z は1次元である。任意の $\alpha\in R(K(S_i))$ は，(171) により，$\alpha=\pm\sum_{j\neq i} n_j\alpha_j$ の形になるから，$(\alpha, H_i)=\pm\sum_{j\neq i} n_j(\alpha_j, \frac{1}{2}e_i)=0$ となるから，(170) により，$H_i\in Z$ である。従って $Z=\mathbb{R}H_i$ となる。

(II) 任意の $\alpha\in R^+(B)$ を，$\alpha=\sum_{j=1}^{l} n_j\alpha_j$ と表わすとき，$m_j\geqq n_j\geqq 0$ である。特に今 $m_i=2$ であるから，$2\geqq n_i\geqq 0$ となる。従ってこの α が $R(K(S_i))$ に属するための条件 $n_i\in 2\mathbb{Z}$ は，この場合

(172) $$n_i=2 \text{ または } 0$$

となる。今任意の $\alpha\in R(K(S_i))$ は B_i の元の同符号整係数1次結合となることを示す。

(イ) $n_i=2$ のとき．

$\beta=\sum_{j\neq i} m_j\alpha_j+2\alpha_i$ だから，このとき

(173) $$-\alpha=-\sum_{j\neq i} n_j\alpha_j-2\alpha_i=\sum_{j\neq i}(m_j-n_j)\alpha_j+\alpha_0$$

となり，$m_j-n_j\in\mathbb{N}$ $(j\neq i)$ である．

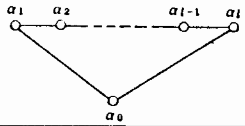
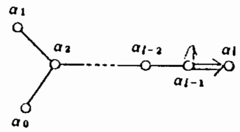
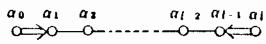
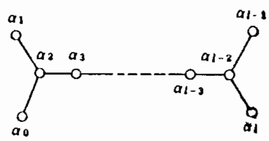
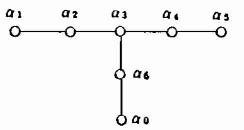
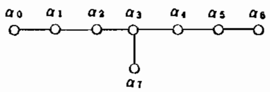
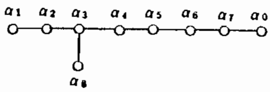
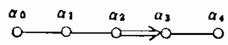
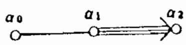
(ロ) $n_i=0$ のとき．

(174) $$\alpha=\sum_{j\neq i} n_j\alpha_j,\quad n_j\in\mathbb{N}$$

である。これで $R(K(S_i))$ の任意の元 α は，$B_i=(B-\{\alpha_i\})\cup\{\alpha_0\}$ の同符号整係数1次結合となることが示された。従って B_i はルート系 $R(K(S_i))$ の基底である．B_i は l 個の元からなるので，ルート系 $R(K(S_i))$ の階数は l であり，$\dim T=\mathrm{rank}\, K(S_i)$ に等しいから，$K(S_i)$ は半単純リー環である．∎

各単純リー環 L に対し，最大ルート $\beta=-\alpha_0$，拡大ディンキン図形，h_i (本文の H_i)，$L(K(S_i))$，$L(S_i)$ の表を次頁に掲げておく．(村上[31]上冊)

表1　内部自己同型 $S_i = \exp h_i$ で定まる実形の表

L	最大ルート $\beta = -\alpha_0$	拡大ディンキン図形	$h_i = H_i$	$K(S_i)$	$L(S_i)$
A_l $(l \geqq 1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$		$h_i\left(1 \leqq i \leqq \left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$A_i \times A_{l-i-1} \times T$	$AIII$
B_l $(l \geqq 2)$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_l$		h_1	$B_{l-1} \times T$	BI
			$h_i(2 \leqq i \leqq l)$	$D_i \times B_{l-i}$	
C_l $(l \geqq 3)$	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$		h_l	$A_{l-1} \times T$	CI
			$h_i\left(1 \leqq i \leqq \left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$C_i \times C_{l-i}$	CII
D_l $(l \geqq 4)$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$		h_1	$D_{l-1} \times T$	DI
			$h_i\left(2 \leqq i \leqq \left[\frac{l}{2}\right]\right)$	$D_i \times D_{l-i}$	
			$h_l(si\ l > 4)$	$A_{l-1} \times T$	DII
E_6	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$		h_1	$D_5 \times T$	$EIII$
			h_2	$A_1 \times A_5$	EII
E_7	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_7$		h_1	$A_1 \times D_6$	EVI
			h_6	$E_6 \times T$	$EVII$
			h_7	A_7	EV
E_8	$2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$		h_1	D_8	$EVIII$
			h_7	$A_1 \times E_7$	EIX
F_4	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$		h_1	$A_1 \times C_3$	FI
			h_4	B_4	FII
G_2	$2\alpha_1 + 3\alpha_2$		h_1	$A_1 \times A_1$	G

外部自己同型による実形の分類

以下 $S = A_p \exp \operatorname{ad} H$ $(H \in T_1)$ の形の，L の位数2の自己同型 S を考え，S は命題5の 1) 2) 3) 4) をみたすものとする．

いま S は外部自己同型とする．従って S は次の (175) をみたす：

(175) $A(B)$ の元 $p = A_p | T$ は恒等変換 I ではない：$p \neq I$，$p^2 = I$．

このとき，S について次の二つの可能性 (I)(II) がある：

(176) (I) $H = 0$，$S = A_p$；(II) $T_1 \ni H \neq 0$，$S \neq A_p$．

(I) の場合．

$I \neq p \in A(B)$ を一つとり，命題5をみたす L の自己同型 A_p を考える．A_p は p によって一意的に定まる．各 $\alpha \in R$ に対し $p\alpha = \alpha^*$ とおく．ワイル基底 $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ に対し，次のようにおく：

(177) $$A_p X_\alpha = \nu_\alpha X_{\alpha^*}, \quad \nu_\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

このとき $A_p^2 = I$ だから，$\nu_\alpha \nu_{\alpha^*} = 1$ となる．従って

(178) $\alpha = \alpha^*$ ならば，$\nu_\alpha = \pm 1$ である．

定義8．

(178) により，ルート系 R は，次の R_1, R_2, R_3 に分割される：

(179) $$\begin{cases} R_1 = \{\alpha \in R \mid \alpha^* = \alpha,\ \nu_\alpha = 1\}, \\ R_2 = \{\beta \in R \mid \beta^* = \beta,\ \nu_\beta = -1\}, \\ R_3 = \{\xi \in R \mid \xi^* \neq \xi\}. \end{cases}$$

命題 17

命題5の条件をみたす．L の位数2の外部自己同型 A_p ($p \in A(B)$, $p^2 = I$, $p \neq I$) に対し，$K = \{X \in L \mid A_p X = X\}$, $N = \{X \in L \mid A_p X = -X\}$ とおく．このとき次の 1) 2) 3) が成立つ．

1) (179) の R_1, R_2, R_3 に対し，$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (集合の直和) となる．$R_3 \neq \phi$ である．

2) $L^{\mathbb{C}}$ のワイル基底 $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ により，$K^{\mathbb{C}}$, $N^{\mathbb{C}}$ は，次の (180) で与えられる:

$$(180) \quad \begin{cases} K^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} + \sum_{\beta \in R_1} \mathbb{C} X_\beta + \sum_{\xi \in R_3} \mathbb{C}(X_\xi + \nu_\xi X_{\xi^*}) \\ N^{\mathbb{C}} = T_{-1}^{\mathbb{C}} + \sum_{\gamma \in R_2} \mathbb{C} X_\gamma + \sum_{\xi \in R_3} \mathbb{C}(X_\xi - \nu_\xi X_{\xi^*}) \end{cases} \quad (\text{直和})$$

3) 各 $\alpha \in R$ に対し，$\alpha' = \alpha | T_1^{\mathbb{C}}$ とおけば，$(K^{\mathbb{C}}, T_1^{\mathbb{C}})$ のルート系 $R(K)$ は，次の (181) で与えられる:

$$(181) \quad R(K) = \{\beta' \mid \beta \in R_1\} \cup \{\xi' \mid \xi \in R_3\}.$$

証明　1) (178) により，$\alpha^* = \alpha$ ならば，$\nu_\alpha = \pm 1$ であるから，(179) の R_1, R_2, R_3 の定義から，

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$$

が成立つ．また R_i ($i = 1, 2, 3$) の定義から，$R_i \cap R_j = \phi$ ($i \neq j$) である．$p \neq I$, $p^2 = I$, $pB = B$ だから，$p\alpha = \beta$, $\alpha \neq \beta$ となる $\alpha, \beta \in B$ があるので $R_3 \neq \phi$.

2) $\beta \in R_1$ ならば，$A_p X_\beta = \nu_\beta X_{\beta^*} = X_\beta$ であり，$X_\beta \in K^{\mathbb{C}}$ である．また $\gamma \in R_2$ ならば，$A_p X_\gamma = -X_\gamma$ であり，$X_\gamma \in N^{\mathbb{C}}$ である．さらに $\xi \in R_3$ ならば，$A_p^2 = I$, $A_p \neq I$ だから，$(I + A_p) X_\xi = X_\xi + \nu_\xi X_{\xi^*}$

$\in K^{\mathbb{C}}$, $X_\xi - \nu_\xi X_{\xi^*} \in N^{\mathbb{C}}$ となる。 さらに $T_1 \subset K$, $T_{-1} \subset N$ だから、まとめて次の (180) を得る:

$$(180) \quad \begin{cases} K^{\mathbb{C}} = (I+A_p)L^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha\in R} \mathbb{C}(X_\alpha + A_p X_\alpha) \\ \qquad = T_1^{\mathbb{C}} + \sum_{\beta\in R_1} \mathbb{C}X_\beta + \sum_{\xi\in R_3} \mathbb{C}(X_\xi + \nu_\xi X_{\xi^*}) \\ N^{\mathbb{C}} = T_{-1}^{\mathbb{C}} + \sum_{\gamma\in R_2} \mathbb{C}X_\gamma + \sum_{\xi\in R_3} \mathbb{C}(X_\xi - \nu_\xi X_{\xi^*}) \end{cases}$$

3) (182) $$[H, X_\xi + \nu_\xi X_{\xi^*}] = \xi'(H)(X_\xi + \nu_\xi X_{\xi^*}) \quad (\forall H \in T_1^{\mathbb{C}})$$

だから、(180) により、(181) が得られる。

命題 18. ルート系 R の基底 B に関する正のルートの集合を $R^+(B)$ とする。

1) $R^+(B) \cap R_i = R_i^+(B)$ とするとき、 $B \subset R_1^+(B) \cup R_3^+(B)$ である。

2) $p \in A(B)$ だから $pB = B$. 従って B は

(183) $$B = \{\beta_1, \cdots, \beta_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_q, \xi_q^*\}, \quad \beta_i \in R_1, \ \xi_j, \xi_j^* \in R_3$$

の形になる。 このとき

(184) $$B(K) = \{\beta_1', \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_q'\}$$

がルート系 $R(K)$ の基底となる。

3) K, $K^{\mathbb{C}}$ は半単純リー環である。

証明 1) 命題5, 2) から任意の $\alpha_i \in B$ に対して $A_p X_{\alpha_i} = X_{p\alpha_i}$ だから、 $B \subset R_1 \cup R_3$ である。 B は正のルートだから、$B \subset R_1^+(B) \cup R_3^+(B)$.

2) 任意の $\alpha \in (R_1 \cup R_3)^+(B)$ は、非負整数 $n_1, \cdots, n_{p+2q}$ により、

(185) $$\alpha = n_1\beta_1 + \cdots + n_p\beta_p + n_{p+1}\xi_1 + n_{p+2}\xi_1^* + \cdots + n_{p+2q-1}\xi_q + n_{p+2q}\xi_q^*$$

と表わされる。 $\alpha' = \alpha | T_1^{\mathbb{C}}$ は、従って

(186) $$\alpha' = n_1\beta_1' + \cdots + n_p\beta_p' + (n_{p+1} + n_{p+2})\xi_1' + \cdots + (n_{p+2q-1} + n_{p+2q})\xi_q'$$

と表わされる．さらに次の(187)が成立つ：

(187) $\qquad B(K)$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である．

証明 $\quad B' = \{\beta_1, \cdots, \beta_p, \frac{1}{2}(\xi_1+\xi_1^*), \cdots, \frac{1}{2}(\xi_q+\xi_q^*)\}$ とおくとき，

(187) $$B'|T_1^{\mathbb{C}} = B(K)$$

である．いま $B(K)$ の元の間の一次関係

(188) $$\sum_{i=1}^{p} c_i\beta_i' + \sum_{j=1}^{q} d_j\xi_j' = 0 \quad (c_i, d_j \in \mathbb{R})$$

があったとすると，これは

(189) $$\Big(\sum_{i=1}^{p} c_i\beta_i + \sum_{j=1}^{q} d_j\tfrac{1}{2}(\xi_j+\xi_j^*)\Big)(H) = 0, \quad (\forall H \in T_1^{\mathbb{C}})$$

を意味する．一方 $\delta = \sum_{i=1}^{p} c_i\beta_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} d_j(\xi_j+\xi_j^*) \in T_1^{\mathbb{C}} \subset T_{-1}^{\perp} \quad (T_{-1} = T \cap N)$

だから，

(190) $$\delta(H) = 0 \quad (\forall H \in T_{-1}^{\mathbb{C}})$$

も成立つ．(189),(190)から，$\delta(H) = 0 \ (\forall H \in T^{\mathbb{C}})$ だから $\delta = 0$ である．一方 B は R の基底で一次独立だから，$\delta = 0$ から

(191) $$c_i = 0 \ (1 \leq i \leq p); \quad d_j = 0 \ (1 \leq j \leq q)$$

が導かれる．これで(187)は証明された．(186),(187)により $B(K)$ は，$R(K)$ の基底であることが証明された．

3) 命題3, 2)により K はコンパクト群 K_0 のリー環であるから，K は完約リー環(reductive Lie algebra)である．

従って K が半単純であることを示すには，次の(192)を示せばよい：

(192) $\qquad K$ の中心 Z は 0 である．

ZはKの極大可換部分環T_1に含まれる。$[Z, K]=0$だから特に

(193) $\quad H\in Z \Leftrightarrow (\alpha, H)=0 \quad (\forall\alpha\in B(K))$

となるので、(192)を示すためには、

(194) $\quad H\in T_1,\ (\alpha, H)=0\ (\forall\alpha\in B(K)) \Rightarrow H=0$

を言えば十分である。$\forall\alpha\in B(K)$は、$\alpha=\beta_i'$または$\alpha=\xi_j'$と表わされるから

このとき$\beta_i(H)=0\ (1\leqq i\leqq p)$、$(\xi_j+\xi_j^*)(H)=0\ (1\leqq j\leqq \delta)$である。そこで

(195) $\quad (\alpha+p\alpha)(H)=0 \quad (\forall\alpha\in B) \Longleftrightarrow \alpha(H+pH)=0 \quad (\forall\alpha\in B)$

$$\Longleftrightarrow H+pH=0 \Longleftrightarrow H\in T_{-1}=T\cap N.$$

HはT_1の元であったから、$H\in T_1\cap T_{-1}=0$, $H=0$となり、(194)、

(192)が証明された。 ∎

定義 9

各ルート$\alpha'\in R(K)$に対し

(196) $\quad \alpha'(H)=2\pi i(h_\alpha', H), \quad (\forall H\in T_1)$

となる$h_\alpha'\in T_1$が定まる。α'とh_α'を同一視し、$R(K)\subset T_1$と考える。

命題 19

1) $\beta\in R_1 \Rightarrow \beta'=\beta$

2) $\xi\in R_3 \Rightarrow \xi'=\frac{1}{2}(\xi+\xi^*)$

証明 1) pは$T=T_1\oplus T_{-1}$なる直交分解に関する$T\to T_1$の直交射影である。$p\beta=\beta$だから、$\beta\in T_1$となり従って$h_\beta'=\beta=h_\beta$で$\beta'=\beta$である。

2) 任意の$H\in T_1$に対し$pH=H$ (命題5, 3))だから、$\xi^*(H)=(p\xi)(H)=$

$= \xi(pH) = \xi(H)$ となる．従って $\frac{1}{2}(\xi+\xi^*)(H) = \xi(H) = \xi'(H)$ $(\forall H \in T_1)$ となる．

命題 20.

1) $(\beta_i', \beta_j') = (\beta_i, \beta_j)$, $\beta_i, \beta_j \in B_1 = R_1 \cap B$.

2) $(\xi_i', \xi_j') = \frac{1}{2}\{(\xi_i, \xi_j) + (\xi_i, \xi_j^*)\}$, $\xi_i, \xi_j \in B_2 = R_2 \cap B$,

3) $\cos^2 \widehat{\beta_i' \beta_j'} = \cos^2 \widehat{\beta_i \beta_j}$,

4) $(\xi_j, \xi_j^*) = 0$ のとき，$\cos^2 \widehat{\beta_i' \xi_j'} = 2\cos^2 \widehat{\beta_i \xi_j}$,

5)
$$\cos^2 \widehat{\xi_i' \xi_j'} = \begin{cases} 0, & (\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \xi_j^*) = 0 \text{ のとき}, \\ \cos^2 \widehat{\xi_i \xi_j}, & (\xi_i, \xi_i^*) = (\xi_j, \xi_j^*) = (\xi_i, \xi_j^*) = 0 \text{ のとき}, \\ \cos^2 \widehat{\xi_i \xi_j} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{(\xi_j, \xi_j^*)}{(\xi_j, \xi_j)}}, & (\xi_i, \xi_j^*) = (\xi_i, \xi_i^*) = 0, \text{ かつ } (\xi_i, \xi_j^*) < 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

証明　1) 3) は命題 19, 1) から明らか．

2) 命題 19, 2) により，次式が成立つ：

$$(\xi_i', \xi_j') = \frac{1}{4}(\xi_i + \xi_i^*, \xi_j + \xi_j^*) = \frac{1}{4}\{(\xi_i, \xi_j) + (\xi_i, \xi_j^*) + (\xi_i^*, \xi_j) + (\xi_i^*, \xi_j^*)\}$$

$= \frac{1}{2}\{(\xi_i, \xi_j) + (\xi_i, \xi_j^*)\}$．($p = p^{-1}$ は内積を変えない)

4) 1) 2) により次式が成立つ：

$$\cos^2 \widehat{\beta_i' \xi_j'} = \frac{(\beta_i', \xi_j')^2}{(\beta_i', \beta_i')(\xi_j', \xi_j')} = \frac{(\beta_i, \frac{1}{2}(\xi_j + \xi_j^*))^2}{(\beta_i, \beta_i) \cdot \frac{1}{2}\{(\xi_j, \xi_j) + (\xi_j, \xi_j^*)\}} = 2\frac{(\beta_i, \xi_j)^2}{(\beta_i, \beta_i)(\xi_j, \xi_j)}$$

$$= 2\cos^2 \widehat{\beta_i \xi_j} \quad ((\xi_j, \xi_j^*) = 0 \text{ のとき})$$

$\because)$ $(\beta_i, \xi_j^*) = (\beta_i, p\xi_j) = (p^{-1}\beta_i, \xi_j) = (p\beta_i, \xi_j) = (\beta_i, \xi_j)$.

5)
$$4\cos^2 \widehat{\xi_i' \xi_j'} = \frac{(\xi_i + \xi_i^*, \xi_j + \xi_j^*)^2}{\{(\xi_i, \xi_i) + (\xi_i, \xi_i^*)\}\{(\xi_j, \xi_j) + (\xi_j, \xi_j^*)\}}$$

$$
=\begin{cases}
0, & (\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \xi_j^*) = 0 \text{ のとき}, \\[2ex]
4\cos^2 \widehat{\xi_i \xi_j}, & (\xi_i, \xi_j^*) = (\xi_i, \xi_i^*) = (\xi_j, \xi_j^*) = 0 \text{ のとき}, \\[2ex]
4\cos^2 \widehat{\xi_i \xi_j} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{(\xi_j, \xi_j^*)}{(\xi_j, \xi_j)}}, & (\xi_i, \xi_j^*) = (\xi_i, \xi_i^*) = 0 \text{ かつ } (\xi_j, \xi_j^*) < 0.
\end{cases}
$$

これで命題20は証明された。■

具体的に各単純リー環について実形を考えるとき，A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 5$), E_6 に対しては $A(B) = Z_2$ (位数2の巡回群)であるが，D_4 に対しては $A(B) = S_3$ (3次対称群)となる．従って前のタイプの群に対しては，$A(B)$ の位数2の元 p が唯一つ定まる．これに対し $A_p \in \mathrm{Aut}\,L$ が定まり，この位数2の自己同型に対し，L^c の非コンパクト実形 $L(A_p)$ が定まる。これに対して D_4 に対しては，$A(B)$ は位数2の元を三つ含む．しかしこの場合にも三つの異なる実形が存在するわけではなく，三つの位数の元は同型な実形を定める．

命題21.

コンパクト単純リー環 $L = D_4$ に対し，$A(B)$ の三つの位数2の元 p_1, p_2, p_3 に対する位数2の自己同型 $A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3}$ は L^c の同型な実形を定義する．

証明．$A(B) = S_3$ と同一視するとき，S_3 の位数2の元は $p_1 = (1,2)$, $p_2 = (1,3)$, $p_3 = (2,3)$ の三つである．そしてこのとき $p_3 p_1 p_3^{-1} = p_2$ である．各 $i \in \{1,2,3\}$ に対し，$A_{p_i} \in \mathrm{Aut}\,L$ で，$A_{p_i}|T = p_i$ となるもの

で命題5の条件をみたすものが存在する．$A_{p_i}=A_i$ と略記し，
$A_3A_1A_3^{-1}=A$ とおくと，$A|T=p_3p\,p_3^{-1}=p_2=A_2|T$ である．そこで
命題1, 1) により，$A=A_{p_2}\exp\operatorname{ad}H$ $(H\in T)$ となる。A_i は命題5, 2) の
条件をみたすから，次の (197) が成立つ：

$$(197)\qquad e^{2\pi i(\alpha_j,H)}X_{p_2\alpha_j}=(A_2\exp\operatorname{ad}H)X_{\alpha_j}=AX_{\alpha_j}=X_{p_2\alpha_j},\quad 1\leqq j\leqq l$$

従って

$$(198)\qquad (\alpha_j,H)\in\mathbb{Z}\ (1\leqq j\leqq l)\iff H\in\Gamma$$

となる。そこで $\exp\operatorname{ad}H=I$ で，$A_3A_1A_3^{-1}=A=A_2$ となり，A_1 と A_2
は $\operatorname{Aut}L=G$ 内で共役であり，従って同型の実形を定義する。
A_1 と A_3，A_2 と A_3 も同様に共役で同型の実形を定義する．∎

以上をまとめて，(I) $S=A_p$ の場合の実形の分類は，次の定理3で与えられる．

定理3

$L=A_l\ (l\geqq 2)$, $D_l\ (l\geqq 4)$, E_6 に対して，そのディンキン図形の対称群 $A(B)$ の位数2の元 p をとるとき，命題5, 1)–4) をみたす位数2の自己同型 A_p が存在する。A_p の定める $L^{\mathbb{C}}$ の実形 $L(A_p)$ の特性部分リー環 $K(A_p)$ は，次のようにして定められる．$(L^{\mathbb{C}}, T^{\mathbb{C}})$ のルート系 R の基底 B は，

$$(199)\qquad B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\xi_1,\xi_1^*,\cdots,\xi_g,\xi_g^*\},\quad \alpha_i\in R_1,\ \xi_j,\xi_j^*\in R_3$$

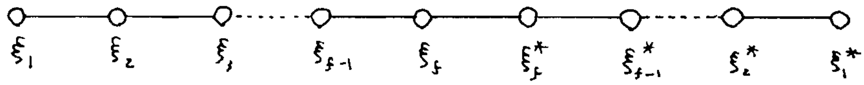
の形である．このとき $K(A_p)$ は半単純リー環で，$(K(A_p)^{\mathbb{C}}, T_1^{\mathbb{C}})$ のルート系 $R(K(A_p))$ の基底 $B(K(A_p))$ は，次の (200) で与えられる．

(200) $$B(K(A_p)) = \{\alpha_1', \cdots, \alpha_p', \xi_1', \cdots, \xi_q'\}$$

ただし α' はルート $\alpha \in R$ の T_1 への直交射影である。$K(A_p)^c$ のディンキン図形は、命題20により、L^c のディンキン図形から求められる。

例1 $L = A_{2f}$

このとき、$A(B)$ の位数2の元 p は、ディンキン図形 $\mathcal{B}$ の中心に関する対称系である。従って $\mathcal{B}$ は次のようになる。



このとき $B(K(A_p)) = \{\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_f'\}$ である。ξ_1 と ξ_i $(i \geqq 3)$ および ξ_j^* とは稜で結ばれていない。従って $(\xi_1, \xi_i) = (\xi_1, \xi_j^*) = 0$ である。従って命題20, 5) の第一の場合により、$(\xi_1', \xi_i') = 0$ $(i \geqq 3)$ である。すなわち頂点 ξ_1' は ξ_2' 以外の頂点とは稜で結ばれない(但し $f=1$ のときは ξ_1' だけが頂点)。$f \geqq 3$ ならば命題20, 5) の第二の場合により $n(\xi_1', \xi_2')^2 = n(\xi_1, \xi_2)^2 = 1$, $(\xi_1', \xi_2') = -1$ である。従って $K(A_p)^c$ のディンキン図形において ξ_1' と ξ_2' は一重稜で結ばれる。同様にして $i \leqq f-1$ のとき、ξ_{i-1}' と ξ_i' の間は一重稜で結ばれる。ξ_{f-1}' と ξ_f' の間の関係は、命題20, 5) の第三の場合である。ξ_f と ξ_f^* は一重稜で結ばれているから、$n(\xi_f, \xi_f^*)^2 = 1$ であり、$(\xi_f, \xi_f^*) < 0$ だから $\cos \widehat{\xi_f \xi_f^*} = -1/2$ である。いま A_f のルートはすべて同じ長さであるから、必要あれば定数倍して、$\|\alpha\| = 1$ $(\forall \alpha \in R)$ としてよい。このと

$(\xi_f, \xi_f^*) = -\frac{1}{2}$ である。そこで命題20, 5)により、

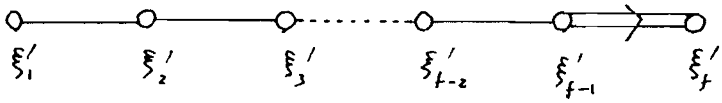
$$n(\xi'_{f-1}, \xi'_f)^2 = n(\xi_{f-1}, \xi_f)^2 \cdot \frac{1}{1+(\xi_f, \xi_f^*)} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

となる。そして命題20, 2)により

$$(\xi'_{f-1}, \xi'_{f-1}) = \frac{1}{2}(\xi_{f-1}, \xi_{f-1}) = \frac{1}{2} \qquad (1 \leqq i \leqq f-1)$$

$$(\xi'_f, \xi'_f) = \frac{1}{2}\{(\xi_f, \xi_f) + (\xi_f, \xi_f^*)\} = \frac{1}{2}\{1 - \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$$

であるから ξ'_{f-1} と ξ'_f は二重線で結ばれ、$\|\xi'_{f-1}\| > \|\xi'_f\|$ である。従って $B(K(A_p))$ のディンキン図形は、次のようになる。



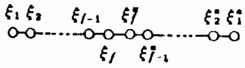
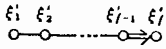
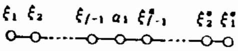
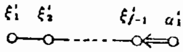
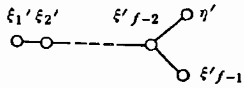
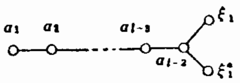
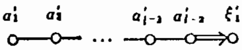
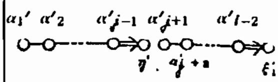
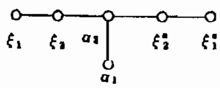
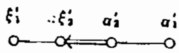
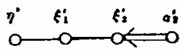
従って $K(A_p)^{\mathbb{C}}$ は、この場合 B_f 型の単純リー環である。

$L^{\mathbb{C}}$ を $SL(2f+1, \mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ で実現するとき、この実形は $\mathfrak{sl}(2f+1, \mathbb{R})$ であり、その特性部分環 $K(A_p)$ は、$SL(2f+1, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $SO(2f+1)$ のリー環である。———

A_{2f-1} $(f \geqq 2)$, D_ℓ $(\ell \geqq 4)$, E_6 に対しても、上の例1と同様にして、$B(K(A_p))$ のディンキン図形を求めることができる。

その結果は、次ページの表の左の欄に示してある。この表は、村上[29]から引用した。ただしカルタンの記号のEIとEIVの位置が誤っていたのを訂正した。

表 2　外部自己同型 $S_j = A_p \exp \mathrm{ad} H_j'$ で定まる実形の表

L	B_p / $B(K_p)$	K_p	$L(A_p)$	K_p の最大ルート ν	S_j	η' / $B(S_j)$	$K(S_j)$	$L(S_j)$
A_{2f}	 	B_f	AI	$\xi_1'+2\xi_2'+\cdots+2\xi_f'$				
A_{2f-1} $(f \geqq 2)$	 	C_f	AII	$2\xi_1'+\cdots+2\xi'_{f-1}+\alpha_1'$	S_1	$\alpha_1'+\xi'_{f-1}$ 	D_f	AI
D_l	 	B_{l-1}	DI	$\alpha_1'+2\alpha_2'+\cdots+2\alpha'_{l-2}+2\xi_1'$	S_j $\left(1 \leqq j \leqq \left[\frac{l}{2}\right]\right)$	$\alpha_i'+\alpha'_{i+1}+\cdots+\alpha'_{l-2}+\xi_1'$ 	$B_j \times B_{l-j-1}$	DI
E_6	 	F_4	EIV	$2\alpha_1'+3\alpha_2'+4\xi_2'+2\xi_1'$	S_1	$\alpha_1'+\alpha_2'+\xi_2'$ 	C_4	EI

(II)の場合

以下 $S = A_p \exp \operatorname{ad} H$, $p \neq 1$, $0 \neq H \in T_1$ の形の位数2の自己同型が定める，$L^{\mathbb{C}}$ の実形を考える．

以下次の記号を用いる．$K(A_p) = K_p$ と略記する．

$$K = \{X \in L \mid SX = X\}, \quad N = \{X \in L \mid SX = -X\},$$
$$K_p = \{X \in L \mid A_p X = X\}, \quad N_p = \{X \in L \mid A_p X = -X\}.$$

また $G = \operatorname{Aut} L$ の連結リー部分群で，K, K_p をリー環とするものを，それぞれ $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_p$ とする．$\mathfrak{K}_p$ は，G 内における A_p の中心化群 $C(A_p) = \{g \in G \mid A_p g = g A_p\}$ の単位元連結成分である．

命題22．

$T_1 = \{H \in T \mid SH = H\} = T \cap K$ は，K_p の極大可換部分環である．

証明．$S | T = A_p | T$ だから，$T_1 = \{H \in T \mid A_p H = H\} \subset K_p$ である．T_1 を含む K_p の極大可換部分環を C とする．C を含む L の極大可換部分環 D が存在する。一方命題3，1)により，T_1 を含む L の極大可換部分環 T は唯一つであるから，$D = T$ である．このとき $T \cap K_p$ は，K_p の可換部分環で，$C \subset D = T$ だから，$C \subset T \cap K_p$ である．そこで C の極大性により，$C = T \cap K_p = \{H \in T \mid A_p H = H\} = T_1$ である。これで T_1 が K_p の極大可換部分環であることが証明された．∎

命題23．

1) $H, H' \in T_1$ に対し, $\exp H$ と $\exp H'$ が $\mathfrak{K}_p$ の中で共役ならば, $A_p \exp H$ と $A_p \exp H'$ は $\mathrm{Aut}\, L$ の中で共役である.

2) L が単純のとき, K_p も単純である. そして $\mathfrak{K}_p$ の中心 Z は $\{I\}$ である. このとき随伴表現により, $\mathfrak{K}_p \cong \mathrm{Int}\, K_p$ となる.

証明. 1) $k \in \mathfrak{K}_p$ により $k(\exp H)k^{-1} = \exp H'$ とすると, $\mathfrak{K}_p = C(A_p)_0$ だから, $kA_pk^{-1} = A_p$ であり, $k(A_p \exp H)k^{-1} = A_p \exp H'$ となる.

2) L が単純のとき, 命題18, 3) により K_p は半単純である.

L が単純のとき L^C のディンキン図形は連結である. そこで命題20により K_p^C のディンキン図形も連結となる. これは K_p^C が単純リー環であることを示す. 従って K_p も単純である.

$z \in Z$ とする. $z = \exp H$, $H \in T_1$ とかける. $\mathrm{Ad}_{K_p} z = I$ だから, 任意のルート $\alpha' \in R(K_p)$ に対し, $(\alpha', H) \in \mathbb{Z}$ となる. 特に $R(K_p)$ の基底 $B(K_p) = \{\beta_1', \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_q'\}$ の各元に対し,

$$(201) \qquad (\beta_i', H) \in \mathbb{Z},\ (\xi_j', H) \in \mathbb{Z},\quad 1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq q$$

となる. 一方 $H \in T_1$ だから, $pH = H$ である (命題5, 3)). 従って $(\beta_i', H) = (\beta_i, H)$, $(\xi_j', H) = (\xi_j, H) = (\xi_j^*, H)$ である. そこで (201) は

$$(202) \qquad (\beta_i, H) \in \mathbb{Z},\ (1 \leqq i \leqq p);\quad (\xi_j, H) = (\xi_j^*, H) \in \mathbb{Z},\ (1 \leqq j \leqq q)$$

となる. $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_q, \xi_q^*\}$ が R の基底であるから, (202) は, 次の (203) と同値である (命題8系, 1)).

$$(203) \qquad (\alpha, H) \in \mathbb{Z}\ (\forall \alpha \in R) \iff H \in \Gamma.$$

従って $z = \exp H = I$ である. z は Z の任意の元故 $Z = \{I\}$ となる.

$\mathfrak{G}_p$ の K_p 上での随伴表現を Ad と記すとき，$\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = Z = \{I\}$ だから，

(204) $$\mathfrak{G}_p \cong \mathrm{Ad}\,\mathfrak{G}_p$$

である．一方 $\mathfrak{G}_p$ は連結リー群だから $\{\exp X \mid X \in K_p\}$ から生成される。そして

(205) $$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp \mathrm{ad}\, X \quad , X \in K_p$$

だから

(206) $$\mathrm{Ad}\,\mathfrak{G}_p = \mathrm{Int}\,K_p$$

となる（杉浦「リー群論」[42] 命題 4. 4. 5）．(204)(206) から，$\mathfrak{G}_p \cong \mathrm{Int}\,K_p$ となる。∎

K_p はコンパクト半単純リー環である（命題18. 3）．従って，$S = A_p \exp \mathrm{ad}\, H$ $(H \in T_1)$ の形の位数 2 の自己同型で，同型でない実形を与える代表元を定めるのに，内部自己同型による実形の決定に関する定理1を用いることができる（命題23. 1）．そのためには，ルート系 $R(K_p)$ の最大ルート ν を知る必要がある．

定義 10.

ルート系 $R(K_p)$ の基底 $B(K_p) = \{\beta_1', \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_q'\}$ に関する正ルートの集合 $R^+(B(K_p))$ の最大ルート ν は，次の (207) の形である．

(207) $$\nu = n_1'\beta_1' + \cdots + n_p'\beta_p' + n_1''\xi_1' + \cdots + n_q''\xi_q' \ , \quad n_i', n_j'' \in N.$$

いま $(\beta_1', \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_q')$ は T_1 の基底である。この基底の双対基底を $(e_1', \cdots, e_p', e_1'', \cdots, e_q'')$ とする．すなわち

(208) $$(\beta_i', e_j') = \delta_{ij}, \ (\xi_k', e_j') = 0 \ ; \ (\xi_k', e_m'') = \delta_{km}, \ (\beta_i', e_m'') = 0$$ とする．

命題24.

1) $H_0 \in T$, $(\exp \mathrm{ad} H_0)^2 = I$, $H_0 + pH_0 = H$ とすれば、$S = A_p \exp \mathrm{ad} H$ は A_p と $\mathrm{Aut}\, L$ 内で共役である。

2) 定義10の $e''_k \in T_1$ に対して、$A_p \exp \mathrm{ad}(\frac{1}{2} e''_k)$ と A_p は $\mathrm{Aut}\, L$ 内で共役である。

証明 1)
$$S = \exp \mathrm{ad} H \cdot A_p = \exp \mathrm{ad} H_0 \cdot A_p \cdot A_p^{-1} \exp \mathrm{ad} pH_0 \cdot A_p$$
$$= \exp \mathrm{ad} H_0 \cdot A_p \cdot \exp(p^{-1} p H_0) \cdot = (\exp \mathrm{ad} H_0) A_p (\exp \mathrm{ad} H_0)^{-1}$$
であるから、S と A_p は共役である。($\alpha \in \mathrm{Aut}\, L$ に対して $\alpha \circ \mathrm{ad} H_0 \circ \alpha^{-1} = \mathrm{ad}(\alpha H_0)$)

2) $e''_k \in T_1$ だから $pe''_k = e''_k$ だから、$\frac{1}{2} e''_k = H_0 + pH_0$, $H_0 = \frac{1}{4} e''_k$ となる。従って1)により2)が成立つ。

命題25.

L の外部自己同型 S で位数2であり、$S = A_p \exp \mathrm{ad} H$, $(0 \neq H \in T_1)$ の形のものは、定義10の記号で、$n'_j = 1$ または2となる $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$ に対する $H'_j = \frac{1}{2} e'_j$ に対応する $S_j = A_p \exp \mathrm{ad} H'_j$ と $\mathrm{Aut}\, L$ 内で共役である。

証明 定理1と命題23, 1) 及び命題24から明らかである。▌

そこで以下 S_j の形の自己同型だけを考えればよい。前に注意した(定理2の直前)ように、特性部分環 $K(S_j)$ は実形 $L(S_j)$ を定める。以下 $K(S_j)$ の構造を決定しよう。前と同様 $S_j X_\alpha = \nu_\alpha X_{\alpha^*}$ とするとき $\nu_\alpha \nu_{\alpha^*} = 1$ だから、$\alpha^* = \alpha$ ならば $\nu_\alpha = \pm 1$ である。そこで

$$(209) \quad \begin{aligned} &R_1(S_j) = R_1 = \{\alpha \in R \mid \alpha^* = \alpha,\ \nu_\alpha = 1\}, \\ &R_2(S_j) = R_2 = \{\beta \in R \mid \beta^* = \beta,\ \nu_\beta = -1\},\quad R_3(S_j) = R_3 = \{\xi \in R \mid \xi^* \neq \xi\}. \end{aligned}$$

とおくと

(2.10) $$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \quad (\text{集合の直和})$$

となる。このとき次の命題26が成立つ。

命題 26.

$\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$ かつ $\alpha^* = \alpha$, $\beta^* = \beta$ とするとき、次の1) 2)が成立つ。

1) $\alpha \in R_1, \beta \in R_1 \Rightarrow \alpha+\beta \in R_1$; 2) $\alpha \in R_1, \beta \in R_2 \Rightarrow \alpha+\beta \in R_2$

証明. $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$ $(N_{\alpha\beta} \neq 0)$ に S_j を作用させて

(2.11) $$\nu_\alpha \nu_\beta = \nu_{\alpha+\beta}$$

を得る。従って次の(2.12)が成立つ：

(2.12) 1) $\nu_\alpha = \nu_\beta = 1 \Rightarrow \nu_{\alpha+\beta} = 1$; 2) $\nu_\alpha = 1, \nu_\beta = -1 \Rightarrow \nu_{\alpha+\beta} = -1$. ∎

定義 11.

R の基底 B に対し、

(2.13) $$\begin{cases} B \cap R_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}, \quad B \cap R_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_q\}, \\ B \cap R_3 = \{\xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\} \end{cases}$$

とおく。従って(2.10)から、次の(2.14), (2.15)が成立つ。

(2.14) $$B = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_r, \xi_r^*\}.$$

(2.15) $$p + q + 2r = \ell = \dim T$$

$A(B) \ni \rho \neq I$, $\rho^2 = I$ だから $\rho\alpha = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ となる $\alpha, \beta \in B$ が存在する。

従って $\alpha, \beta \in R_3$ で、$R_3 \neq \phi$ である。

各ルート $\alpha \in R$ に対し、その T_1 への限定を、$\alpha' = \alpha | T_1$ とおく。

命題 27 (ラグナタン [30] Lemma 16)

1) $\alpha \in R_1 \cup R_3$ ならば、$\alpha' \in R(K(S_j))$ で $X_\alpha + S_j X_\alpha$ は α' のルート・ベクトル。

2)　$\alpha \in R_2 \cup R_3$ ならば，α' は $K(S_j)$ の表現 $\sigma = ad_{\mathfrak{l}} K(S_j) \mid N(S_j)$ のウェイトで，$X_{\alpha^*} - S_j X_{-\alpha}$ がそのウェイト・ベクトルである．

3)　$\alpha, \beta \in R$ に対し，$\alpha' = \beta'$ ならば，$\alpha = \beta$ または $\alpha = \beta^*$ である．

4)　$\alpha \in R$ ならば $\alpha' \neq 0$ である．

証明　1)　任意の $H \in T_1$ に対し，$\alpha(H) = \alpha^*(H) = \alpha'(H)$ で $S_j X_\alpha \in M_{\alpha^*}$ 故

(2.2.2)　$$[H, X_\alpha + S_j X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha + \alpha^*(H) S_j X_\alpha = \alpha'(H)(X_\alpha + S_j X_\alpha).$$

2)　1) と同様．命題 17, 2) と同様の分解ができることに注意．

3)　a)　$\alpha, \beta \in R_1 \cup R_2$ のとき，$\alpha(T_{-1}) = \beta(T_{-1}) = 0$，$\alpha = \alpha' = \beta' = \beta$．

b)　$\alpha, \beta \in R_1 \cup R_3$ とする。仮定 $\alpha' = \beta'$ により，α', β' は $K(S_j)^C$ の同一のルートである。1) により $X_\alpha + S_j X_\alpha$ および $X_\beta + S_j X_\beta$ は共に α' のルート・ベクトルであり，ルート空間は1次元だから，この二つのベクトルは一方が他方のスカラー($\neq 0$)倍である．従って X_α が X_β のスカラー倍であるか，X_α が $S_j X_\beta$ のスカラー倍となる。これは $\alpha = \beta$ または $\alpha = \beta^*$ となることを意味する．

c)　$\alpha \in R_2$，$\beta \in R_3$ のとき．$\alpha(T_{-1}) = 0$ だから $\alpha = \alpha'$ で $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') = (\alpha', \alpha') > 0$ だから，$\alpha - \beta \in R$ である．$\alpha \in R_2$，$\beta \in R_3$ だから $\alpha^* = \alpha$，$\beta^* \neq \beta$ なので $(\alpha - \beta)^* \neq \alpha - \beta$ である．従って $\alpha - \beta \in R_3$ で 1) により $(\alpha - \beta)' \in R(K(S_j))$ である。一方 $(\alpha - \beta)' = \alpha' - \beta' = 0$ であるから，矛盾する．従ってこの場合 $\alpha' = \beta'$ となることは有得ない．

4)　a)　$\alpha \in R_1 \cup R_2$ のとき，$\alpha(T_{-1}) = 0$ だから，$\alpha' = 0$ と仮定すれば $\alpha = 0$ となり矛盾である．従って $\alpha' \neq 0$ である．

b) $\alpha \in R_3$のとき、1)により $\alpha' \in R(K(S_j))$ だから $\alpha' \neq 0$.

命題 28

1) 正のルート $\alpha \in R_1 \cup R_3$ に対し、$\alpha' = \beta' + \gamma'$ $(\beta', \gamma' \in R(K(S_j)))$ となる β', γ' が存在すれば、R の正のルート β, γ で次の (a) (b) をみたすものが存在する: (a) $\alpha = \beta + \gamma$, (b) $\beta' = \beta | T_1$, $\gamma' = \gamma | T_1$.

2) 特に $\alpha \in B$ ならば、$\alpha' \in B(K(S_j))$ である.

証明 1) 命題27, 1) により $\alpha' \in R(K(S_j))$ である. 今 $\alpha' = \beta' + \gamma'$ となる正のルート $\beta', \gamma' \in R(K(S_j))$ が存在したとする. このとき自己同型 S_j に対しても、A_p と同じく命題17, 2] の分解(180) が成立つので、

(223) $\beta, \gamma \in R_1 \cup R_3$ が存在して、$\beta | T_1 = \beta'$, $\gamma | T_1 = \gamma'$

となる. 一方命題27, 1) により、$X_\beta + S_j X_\beta$, $X_\gamma + S_j X_\gamma \neq 0$ はそれぞれルート β', γ' に対するルート・ベクトルであり、$\alpha' = \beta' + \gamma' \in R(K(S_j))$ から

(224) $[X_\beta + S_j X_\beta,\ X_\gamma + S_j X_\gamma] \neq 0$

となる. 一方 X_α も α' のルート・ベクトルであり、ルート空間は1次元だから、次の (225) が成立つ:

(225) (224)左辺は、X_α のスカラー$(\neq 0)$倍である. 一方、

(226) (224)左辺 $= [X_\beta, X_\gamma] + S_j [X_\beta, X_\gamma] + [X_\beta, S_j X_\gamma] + S_j [X_\beta, S_j X_\gamma]$

であるから、$[X_\beta, X_\gamma] \neq 0$ または $[X_\beta, S_j X_\gamma] \neq 0$ である. これは、

(227) $\beta + \gamma \in R$ または $\beta + \gamma^* \in R$

を意味する. 必要ならば γ を γ^* で置換えて $\beta + \gamma \in R$ としてよい.

このとき $\alpha' = (\beta + \gamma)'$ だから、命題27, 3) により、

(228) $\alpha=\beta+\gamma$ または $\alpha^*=\beta+\gamma$ である．

が成立つ．後の場合には，β,γ を β^*,γ^* で置換えれば，1)が成立つ．

2) 特に $\alpha\in B$ のときは，β,γ は正のルートだから α が単純ルートであることに反し矛盾である．従って $\alpha'=\beta'+\gamma'$ と正のルートの和になることはなく，α' も単純ルートである（T_1,T_{-1} の基底をこの順序にとって辞引式順序を入れると，β',γ' が正のルートであるとき，β,γ も正のルートとなる）．■

命題29．

R を既約（＝二つの直交する部分集合 $\neq\phi$ に分れない）ルート系とし，$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ をその一つの基底とする．いま $B_0=\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}\}$ を，B の相異なる m 個の元から成る部分集合で次の条件（R）をみたすものとする：

（R） $1\leqq k\leqq m$ となる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し，$\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}\in R$ である．

今 $\alpha=\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_m}$ とするとき，α と $\alpha_j\in B-B_0$ に対する次の二つの条件 (a) と (b) は互いに同値である．

(a) $\alpha+\alpha_j\in R$．

(b) ある $\alpha_{i_k}\in B_0$ に対して，$(\alpha_j,\alpha_{i_k})\neq 0$ である．

証明 R は既約ルート系であるから，そのディンキン図形 $\mathfrak{D}$ は，次の (229) をみたす：

(229) $\mathfrak{D}$ は連結である。

また B は R の基底であるから，次の (230) が成立つ：

(2.30) $(\alpha_i, \alpha_k) \leqq 0 \quad (i \neq k)$

(b) ⇒ (a)

(b) と (2.30) から，次の (2.31) が成立つ：

(2.31) $(\alpha_j, \alpha_{i_u}) < 0. \quad (\exists \alpha_{i_u} \in B_0)$.

そこで，$(\alpha_j, \alpha) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_j, \alpha_{i_k}) < 0$ となる。従ってルート系の良く知られた性質（ブルバキ [3] VI章§1定理1系）により $\alpha + \alpha_j \in R$ となる．

(a) ⇒ (b)

$\alpha_j \notin B_0$ だから，$\alpha - \alpha_j = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m} - \alpha_j$ は，係数が同符号でないから，$\alpha - \alpha_j \notin R$ である．ルート α に α_j の整数倍を加減して得られる列 $\{\alpha + k\alpha_j\}_{k \in Z}$ の元 β で，$\beta \in R$ となるものが，$-q \leqq k \leqq p$ となる k に対する $\beta = \alpha + k\alpha_j$ だけであるとき，

(2.32) $2(\alpha, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = q - p$

である（ブルバキ [3] VI章命題9系）．今 $q = 0$ であり，仮定 (a) により $p \geqq 1$ である．従って (2.32) から

(2.33) $(\alpha, \alpha_j) < 0$

となる。一方 $(\alpha, \alpha_j) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{i_k}, \alpha_j)$ であるから，ある k に対し，$\alpha_{i_k} \in B_0$ が，$(\alpha_{i_k}, \alpha_j) < 0$ をみたすことになり (b) が成立つ．∎

命題30.

$S_j = A_p \exp \operatorname{ad} H_j'$ の特性部分環 $K(S_j)$ に対し次の 1) 2) 3) が成立つ．

定義10の記号で $B(K_p) = \{\beta_1', \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_q'\}$ とする．

1) $\beta_j \in R_2(S_j)$ である．従って $\beta'_j \notin R(K(S_j))$ である．

2) $i \neq j, 1 \leq i \leq p$ のとき，$\beta_i \in R_1(S_j)$ である．

3) $1 \leq k \leq g$ のとき，$\xi_k, \xi_k^* \in R_3(S_j)$ である．

4) $B_0 = \{\beta'_1, \cdots, \hat{\beta}_j, \cdots, \beta'_p, \xi'_1, \cdots, \xi'_g\} \subset B(K(S_j))$ である．

証明．1) このとき，$\beta_j^* = \beta_j$ であって，しかも

$$(234) \qquad S_j X_{\beta_j} = (\exp \operatorname{ad} H'_j) A_p X_{\beta_j} = (\exp \operatorname{ad} H'_j) X_{\beta_j} = e^{2\pi i(\beta_j, \frac{1}{2}\xi'_j)} X_{\beta_j}$$
$$= e^{\pi i} X_{\beta_j} = -X_{\beta_j}$$

だから，$\nu_{\beta_j} = -1$ となるので $\beta_j \in R_2(S_j)$ である．従って $X_{\beta_j} \in N^{\mathbb{C}}(S_j)$ である（命題17．2）の分解（180）が S_j についても成立つ）．故に $\beta_j \notin R(K(S_j))$

2) 1）と同様．今度は $(\beta_i, H'_j) = 0 \quad (i \neq j)$ だから，$S_j X_{\beta_i} = X_{\beta_i}$ となるから，$\beta_i \in R_1(S_j)$ である．

3) これは ξ_k の定義から明らかである．

4) 1）2）3）と命題28，2）から 4）が導かれる．∎

rank $K(S_j)$ = dim T_1 = rank K_p = $p+g$ であり，B_0 は $p+g-1$ 個の元から成る．従って $B(K(S_j)) = B_0 \cup \{\eta'\}$ となる η' がある．この η' は次の命題31で与えられる．

命題31．

L = 単純とするとき次の 1）2）3）が成立つ．

1) このとき $B_p = B(L(A_p)) = \{\beta_1, \cdots, \beta_p, \xi_1, \xi_1^*, \cdots, \xi_g, \xi_g^*\}$（命題18）のディンキン図形 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(B_p)$ は連結であり，$^\exists \xi_k \in B_p \cap R_3$（命題17，1））がある．そこで β_j と ξ_k は $\mathcal{D}$ 内で線で結ばれている．いま ξ_k は β_j から出

発して最初に到達した $B \cap R_3$ の元だとする。このとき途中の頂点はすべて R_1 の元だからそれを $\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_t}$ とする。このとき

(235) $$(\beta_j, \beta_{i_1}) \neq 0,\ (\beta_{i_k}, \beta_{i_{k+1}}) \neq 0\ (1 \leqq k \leqq t-1),\ (\beta_{i_t}, \xi_k) \neq 0$$ である。

(236) $$\zeta = \beta_j + \beta_{i_1} + \beta_{i_2} + \cdots + \beta_{i_t} + \xi_k$$

とおくとき、$\zeta \in R$ である。

2) $\zeta' = \zeta | T_1$ は、$R(K(S_j))$ の単純ルートである。

3) $B(K(S_j)) = \{\zeta', \beta'_1, \cdots, \hat{\beta'_j}, \cdots, \beta'_p, \xi'_1, \cdots, \xi'_q\}$ である。ただし $\hat{\beta_j}$ は、β_j を除くことを意味する。 4) $K(S_j)$ は半単純リー環である。

証明 1) 条件(235)がみたされるから、命題29により、ζ はルートである：$\zeta \in R$.

2) $\beta_i^* = \beta_i$, $\xi_k^* \neq \xi_k$ だから、$\zeta^* \neq \zeta$ であり、$\zeta \in R_3$ である。従って命題27, 1) により、$\zeta' \in R(K(S_j))$ である。さらに ζ' は $R(K(S_j))$ の単純ルートである。それを示すために、ζ' が単純ルートでないと仮定して、矛盾を導く。今 $\zeta \in R^+(B)$ だから命題28の証明の最後に述べた字引式順序によるとき、ζ' も正のルートである。今 ζ' は単純ルートでないとしているのだから、

(237) $$\zeta' = \gamma' + \delta',\quad \gamma', \delta' \text{ は } R(K(S_j)) \text{ の正のルート.}$$

となる。このとき、命題28, 2) により、

(238) $$\zeta = \gamma + \delta,\quad \gamma | T_1 = \gamma',\quad \delta | T_1 = \delta'$$

となる正のルート $\gamma, \delta \in R_1 \cup R_3$ が存在する。ζ は(236)の形の和であるから、γ, δ は $\{\beta_j, \beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_t}, \xi_k\} = B_1$ のいくつかの元の和である。

γの和の因子としてξ_jが含まれるとしてよい(そうでなければ，γとδを入れ換えればよい)。このときβ_jがγの和因子でないとするとき，δはβ_jといくつかのβ_{i_k}の和となる。このとき命題30により，$\beta_j \in R_2$，$\beta_{i_k} \in R_1$であるから，命題26により，$\delta \in R_2$となる。これは$\delta \in R_1 \cup R_3$という仮定に反し矛盾である。

3) これは2)と命題30, 3)から明らかである。 4) $B(K(S_j))$の元の個数が$p+q=\dim T_1$だから定約リー環$K(S_j)$は半単純である。∎

以上をまとめて，(II)の場合の実形をすべて与える次の定理4を得る。ここでは$S=A_p$に対する実形$L(A_p)$の特性部分環$K(A_p)$のルート系$R(K(A_p))$の基底$B(K_p)$は命題18で与えられたように

$$B(K_p)=\{\beta_1',\cdots,\beta_p',\xi_1',\cdots,\xi_q'\} \tag{239}$$

である。$K_p=K(A_p)$の$B(K_p)$に関する最大ルートを

$$\nu = n_1'\beta_1'+\cdots+n_p'\beta_p'+n_1''\xi_1'+\cdots+n_q''\xi_q' \tag{240}$$

とする。また定義10の記号e_j'に対し，$H_j'=\frac{1}{2}e_j'$とする。

定理4

Lをコンパクト単純リー環とする。Lの位数2の自己同型写像Sで，$S=A_p\exp\operatorname{ad}H$ $(0\neq H\in T_1)$の形のものは，$n_j''=1$または2となるjに対する$\frac{1}{2}e_j'=H_j'$を用いて生ずる$S_j=A_p\exp\operatorname{ad}H_j'$または$A_p$に共役である。この$S_j$によって定まる$L^c$の実形$L(S_j)$の特性部分環$K(S_j)$は、半単純リー環で，$T_1$を極大可換部分環とする。$(K(S_j)^c, T_1^c)$のルート系$R(K(S_j))$の基底$B(K(S_j))$は，次の(241)で与えられる。

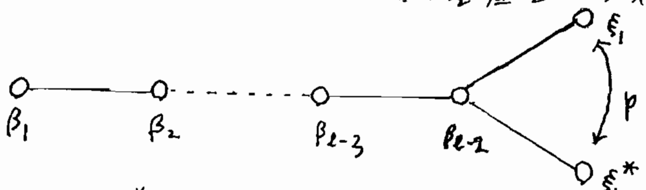
(241) $\qquad B(K(S_j)) = \{\zeta', \beta_1', \cdots, \hat{\beta_j'}, \cdots, \beta_p', \xi_1', \cdots, \xi_j'\}.$

ただし $\zeta = \beta_j + \beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_t} + \xi_k \in R$ は，命題 $\overline{31}$, 1) で与えられるルートである.

証明　命題 25, 24, 31 による. ∎

例 2

$L = D_\ell = \mathfrak{so}(2\ell)$, $(\ell \geqq 4)$. ルート系の基底 B のディンキン図形は次の形である.

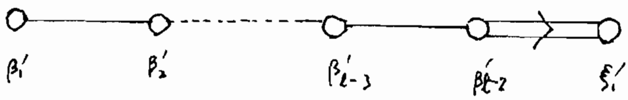


このとき，$(\xi_1, \xi_1^*) = 0$, $(\beta_{\ell-2}, \xi_1) = (\beta_{\ell-2}, \xi_1^*) \neq 0$ だから命題 20, 4) により，$\cos^2 \widehat{\beta_{\ell-2}' \xi_1'} = 2\cos^2 \widehat{\beta_{\ell-2} \xi_1}$ であるから，

(241) $\qquad \|\beta'_{\ell-2}\|^2 / \|\xi_1'\|^2 = 2\|\beta_{\ell-2}\|^2 / \|\xi_1\|^2 = 2$

である. また命題 20, 1) により，$(\beta_i', \beta_j') = (\beta_i, \beta_j)$ だから $K_p = K(A_p)$ のルート系の基底 $B(K_p)$ のディンキン図形は，次の (242) で与えられる.

(242)

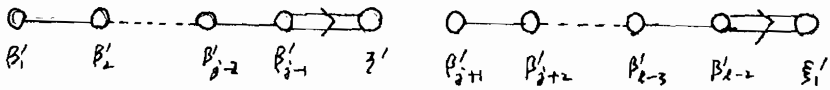


従って $K_p = K(A_p)$ は $B_{\ell-1}$ 型のコンパクト・リー環である. $R^+(B(K_p))$ の最大ルート ν は表 1 から，次の (243) で与えられる：

(243) $\qquad \nu = \beta_1' + 2(\beta_2' + \cdots + \beta_{\ell-2}') + \xi_1'$

そこで $S_j = A_p \exp \operatorname{ad} H_j'$ $(1 \leqq j \leqq \ell-2)$ が (II) 型の外部自己同型の代表元である。このとき $\zeta' = \beta_j' + \cdots + \beta_{\ell-2}' + \xi_1'$ である. $R = \{\pm e_i \pm e_j\}$ とすると，$\zeta' = e_j$, $\beta_k' = e_k - e_{k+1}$ だから ζ' は直交しない $B(K(S_j)) = \{\zeta', \beta_1', \cdots \beta_j,$

$\cdots,\beta'_{l-2},\xi'_1\}$ の元は、$\beta'_{j-1}=e_{j-1}-e_j$ のみである。そして $2\|\zeta'\|^2=\|\beta'_{j-1}\|^2$ だから、$B(K(S_j))$ のディンキン図形は、次の(244)で与えられる。

(244)


従って $K(S_j)$ は、$B_j\times B_{l-j-1}$ 型のコンパクト・リー環である。

S_j に対応する D_l の実形は、$SO_0(2j+1,2l-2j-1)$ のリー環で実現される DI_j 型の実単純リー環である。

A_p に対する D_l の実形は、$SO_0(1,2l-1)$ のリー環で実現される DI 型のリー環である。——

村上の論文[29]の末尾に、「校正中の追加」として、N.R.ウォラックがセントルイスのワシントン大学で播野順一教授の指導下で書いた学位論文[48]で、村上の方法の類似のやり方で実形の分類がなされていることが注意されている。ウォラックの学位論文の要点は、その後「ルート系の極大閉部分系について」という題で公刊された[49]。そこでは実形の分類についても、要点が説明されている。

4　荒木捷朗

荒木[1]は、佐武[32]およびTits[46]等によって導入された、佐武図形による、単純リー環の実形の分類を行った。佐武[33]およびティツが示したように、この方法は単純線型代数群のk-formの分類論にも用いられるが、ここでは実数体に限り、また代数群でなくリー環の分類論として話を進めることにする。

荒木の方法は、実単純リー環Lの、ベクトル部分最大のカルタン部分環を基礎にしている。この点でトーラス部分最大のカルタン部分環を基礎にする村上の方法と対照的である。

荒木の方法は、任意の完全体kに対する単純群Gのk-form G_kの分類にも使えるという普遍性が特長である。一方荒木の方法では、実形の特性部分環kの構造はわりに求める必要があり、村上の方法のように、分類定理がkの構造を自動的に与える形になっていない。

以下荒木の方法を紹介する。ただし第1節の制限階数1の佐武図形の決定は、杉浦[40]の方法を用いた。荒木の方法は制限ルートについての計算を用いるものであった。これについては荒木の原論文[1] §4を見られたい。

1　対合ルート系と佐武図形

Lを実半単純リー環とする.

定義 1.

Lの部分環Cが, 次の(a)(b)をみたすとき, CをLのカルタン部分環(Cartan subalgebra 略して CSA)という:

(a)　CはLの極大可換部分環である.

(b)　任意の$H \in C$に対し, $\mathrm{ad}_L H$は半単純一次変換である.

定義 2.

CをLのカルタン部分環とする。このとき複素化$C^{\mathbb{C}}$は$L^{\mathbb{C}}$のカルタン部分環である。一次写像$\alpha : C^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$に対し, $M = L^{\mathbb{C}}$の部分空間$M_\alpha = \{X \in M \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (\forall H \in C^{\mathbb{C}})\}$とおく.

$$R = \{\alpha : C^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \mid M_\alpha \neq 0 ,\ \alpha \neq 0\}$$

を$(L^{\mathbb{C}}, C^{\mathbb{C}})$のルート系という. 各$\alpha \in R$に対し, $\dim M_\alpha = 1$で

$$M = C^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in R} M_\alpha \ . \ (\text{直和})$$

となる. いま$L^{\mathbb{C}} = M$のキリング形式を$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$とすると, $B \mid C^{\mathbb{C}} \times C^{\mathbb{C}}$は非退化双一次形式である. 従って

$$\alpha(H) = B(H_\alpha, H) \quad (\forall H \in C^{\mathbb{C}})$$

が成立つ$H_\alpha \in C^{\mathbb{C}}$が唯一つ存在する. 以下$\alpha = H_\alpha$と同一視する。

$C_0 = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R} H_\alpha$は$C^{\mathbb{C}}$の一つの実形であり, $B \mid C_0 \times C_0$は正値定符号である。$H, H' \in C_0$の内積を$(H, H') = B(H, H')$によって定義する

るとき，C_0はユークリッド・ベクトル空間となる．特にルートα, βの間の内積を$(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$で定義し，$n(\alpha, \beta) = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$とおく．

二つのルート系R, R'の張るベクトル空間をC_0, C_0'とし，全単写一次写像$\phi : C_0 \to C_0'$が任意の二つのルート$\alpha, \beta \in R$に対し，$n(\alpha, \beta) = n(\phi(\alpha), \phi(\beta))$をみたすとき，$\phi$をルート系の<u>同型写像</u>という．

特に$R \to R$の同型写像全体の作る群を，<u>Rの自己同型群</u>といい，$A(R)$と記す．いまLに関する$L^c = M$の複素共役写像をσとする．任意のルート$\alpha \in R$に対し，$(\sigma\alpha)(H) = \overline{\alpha(\sigma H)}$とおくとき，$\sigma\alpha \in R$，$\sigma M_\alpha = M_{\sigma\alpha}$である。$\sigma_0 = \sigma | C_0$とおくとき，$\sigma_0 \in A(R)$で，$\sigma_0^2 = I$である．

定義 3

ルート系Rと，$\sigma \in A(R)$，$\sigma^2 = I$，$\sigma \neq I$の対(R, σ)を<u>対合ルート系</u>という．

こうして実半単純リー環Lとそのカルタン部分環Cを定めたとき，一つの対合ルート系(R, σ_0)が定まる．この際Lを固定したときでも，Cのとり方によって一般に異なる対合ルート系が生ずる．

定義 4

対合ルート系(R, σ)に対し，$R_0 = \{\alpha \in R \mid \sigma\alpha = -\alpha\}$とおく。$R_0$は$R$の部分ルート系である。以下$W_0 = \langle s_\alpha \mid \alpha \in R_0 \rangle$とおく。$W_0$は$W$の部分群である。$R$の基底$B$に対し，$B$の元の非負整係

数一次結合となるルート $\alpha \in R$ の集合を $R^+(B)$ とおく．B は

$$\sigma(R^+(B) - R_0) = R^+(B) - R_0$$

をみたすとき，<u>σ-基底</u>という．

σ-基底は存在する．$C_0^+ = \{H \in C_0 \mid \sigma H = H\}$，$C_0^- = \{H \in C_0 \mid \sigma H = -H\}$ の基底をこの順序に従ってとり，それに関する字引式順序に関する単純ルート（二つの正ルートの和に分解されない正ルート）の全体 B は，σ-基底である．

R の自己同型群 $A(R)$ は，$W(R)$ と $A(B)$ の半直積だから，

(0) $$\sigma = sp, \quad s \in W(R), \quad p \in A(B)$$

と一意的に分解される．(0) を σ の<u>標準分解</u>という．

命題 1

(R, σ) 互対合ルート系，上の (0) を σ の標準分解とするとき，次の1) 2) が成立つ．

1) 次の (a) (b) は互いに同値な条件である：

(a) B は σ-基底である．

(b) (i) $B_0 = B \cap R_0$ は R_0 の基底である．かつ (ii) $s \in W_0$．

2) B が σ-基底であるとき，次のイ)－ホ) が成立つ：

イ) $R_0^+(B_0) = R^+(B) \cap R_0$．　ロ) s は B_0 を $-B_0$ に移す W_0 の唯一の元．

ハ) $sp = ps$，$s^2 = p^2 = I$．　ニ) $pR_0 = R_0$，$pB_0 = B_0$，$p(B - B_0) = B - B_0$．

ホ) $B = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$，$B_0 = \{\alpha_{\ell-\ell_0+1}, \alpha_{\ell-\ell_0+2}, \cdots, \alpha_\ell\}$ とする．p は B の互換を引起す．それを $\alpha_i \to \alpha_{i'}$ $(1 \leq i \leq \ell)$ とするとき，

$$\sigma\alpha_i = \alpha_{i'} + \sum_{j > \ell-\ell_0} c_{ij}\alpha_j, \quad (1 \leq i \leq \ell-\ell_0), \quad c_{ij} \in N \text{ となる．}$$

証明　1)　(a) $\Rightarrow$ (b).　B を σ-基底とする．$R^+(B)$ は和に関し閉じており，$R = R^+(B) \cup (-R^+(B))$，$R^+(B) \cap (-R^+(B)) = \emptyset$ である。従って $R_0^+ = R^+(B) \cap R_0$ も，同じ性質を持つ。そこで $R_0^+ = R_0^+(B_0')$ となる R_0 の基底 B_0' が存在する．B_0' は R_0^+ の中の単純ルートの全体で，B は $R^+(B)$ 内の単純ルートの全体である．そこで $R_0^+ \subset R^+(B)$ から

(1)　$$B_0 = B \cap R_0 \subset B_0'$$

が成立つ．一方逆向きの包含関係

(2)　$$B_0 \supset B_0'$$

も成立つ．∵) 任意の $\alpha \in B_0'$ をとる。$\alpha = \beta + \gamma$，$\beta, \gamma \in R^+(B)$ と仮定すれば，β, γ の内少なくとも一方は R_0 の元ではない（そうでなければ α は R_0^+ の単純ルートではなくなり，$\alpha \in B_0'$ に反する）．いま $\beta \notin R_0$ とすると，$\gamma \notin R_0$ でもある．なぜならば $\gamma \in R_0$ ならば $\alpha \in R_0$ だから，$\beta = \alpha - \gamma \in R_0$ となり仮定に反する．そこで $\beta, \gamma \in R^+(B) - R_0$ だから，B が σ-基底という仮定により，$\sigma\beta, \sigma\gamma \in R^+(B) - R_0$ であり，$\sigma\beta > 0$，$\sigma\gamma > 0$ となる．一方 $\alpha \in B_0' \subset R_0$ だから，$\sigma\beta + \sigma\gamma = \sigma\alpha = -\alpha < 0$ となり矛盾である．これで α は $R^+(B)$ の単純ルートであり，$\alpha \in B$ が証明された．一方 $\alpha \in R_0$ だから，$\alpha \in B \cap R_0 = B_0$ であり，(2) が証明され，$B_0 = B_0'$ である．

従って $B_0 = B \cap R_0$ は，R_0 の基底であり，(b) (i) がみたされる．

(ii)　$B_0, -B_0$ は R_0 の二つの基底であるから，ある $w \in W_0$ が存在して，$w(-B_0) = B_0$ となる。このとき $w^2 B_0 = B_0$ だから，$w^2 \in W_0$

$\cap A(B_0) = \{I\}$ だから，$w^2 = I$ である．$w\sigma B_0 = w(-B_0) = B_0$ だから

$$w\sigma \in A(B_0)$$

である。従って次の(3)が成立つ:

(3) $\qquad \alpha \in R^+(B) \cap R_0 = R_0^+(B_0) \Rightarrow w\sigma\alpha \in R_0^+(B_0).$

一方 B は σ-基底だから，次の(4)が成立つ:

(4) $\qquad \alpha \in R^+(B) - R_0 \Rightarrow \sigma\alpha \in R^+(B) - R_0.$

いま $B = \{\alpha_i \mid 1 \leqq i \leqq l\}$，$B_0 = \{\alpha_j \mid l - l_0 < j \leqq l\}$ とすると，

(5) $\qquad \sigma\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$ ，$m_i \in \mathbb{N}$ が，$\exists i \leqq l - l_0$，$m_i > 0$

となる。いま $w \in W_0 = \langle s_{\alpha_j} \mid j > l - l_0 \rangle$ だから，

(6) $\qquad w\alpha_i = \alpha_i + \sum_{j > l - l_0} d_{ij}\alpha_j$，$d_{ij} \in \mathbb{N}$，$1 \leqq i \leqq l - l_0$

となる。そこで(5), (6)から，

(7) $\qquad w\sigma\alpha = \sum_{i \leqq l - l_0} m_i\alpha_i + \sum_{j > l - l_0} n_j\alpha_j$ ，$n_j \in \mathbb{Z}$

の形になる。いま $\exists m_i > 0$ $(i \leqq l - l_0)$ だから，(7)により $w\sigma\alpha > 0$

であり，$\forall n_j \geqq 0$ でもある。そこで次の(8)が証明された:

(8) $\qquad \alpha \in R^+(B) - R_0 \Rightarrow w\sigma\alpha \in R^+(B).$

(4)と(8)から，$R^+(w\sigma B) = w\sigma R^+(B) = R^+(B)$ である。従って

(9) $\qquad w\sigma B = B$

となる．いま $\sigma = sp$，$s \in W(R)$，$p \in A(B)$ を(10)の分解とすると，(9)より

(10) $\qquad wsB = wspB = w\sigma B = B$

となり，$ws \in W$ だから，$ws = I$，$s = w^{-1} = w \in W_0$ となり(b)(ii)が成立つ．

(b) ⇒ (a)　R の基底 B が (b) をみたすとする．任意の $\alpha \in R_0$ に

対して $\sigma\alpha=-\alpha$ となるから

(11) $$\sigma s_\alpha \sigma^{-1} = s_{\sigma\alpha} = s_{-\alpha} = s_\alpha$$

である。今 $\sigma = sp$ とり、(10)の分解にすれば、条件 (b)(ii) により、

$s\in W_0=\langle s_\alpha \mid \alpha\in R_0\rangle$ であるから、s は有限個の R_0 の元 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ に対する s_{β_i} の積であるから、(11) により

(12) $$\sigma s = s\sigma$$

である。従ってまた s と $\sigma=p$ も可換である:

(13) $$sp=ps.$$

従ってまた

(14) $$s^2p^2=\sigma^2=I\text{、従って } s^2=I=p^2$$

となる。(13)から $p\sigma=\sigma p$ だから、$R_0=\{\alpha\in R\mid \sigma\alpha=-\alpha\}$ は p で不変で

(15) $$pR_0=R_0$$

(16) $$pB_0=p(B\cap R_0)=B\cap R_0=B_0$$

(17) $$p(B-B_0)=B-B_0$$

が成立つ。また仮定 (b)(i) により B_0 は R_0 の基底であるから、

(18) $s\in W_0$ は、有限個の s_{α_j} $(j>l-l_0)$ の積である。

従って、任意の $i\le l-l_0$ に対し

(19) $$\sigma\alpha_i = sp\alpha_i = s\alpha_{i'} = \alpha_{i'} + \sum_{j>l-l_0} c_{ij}\alpha_j \text{、} (i'\le l-l_0)$$

となる。ここで $c_{ij}\in\mathbb{Z}$ であるが、(17) により $i'\le l-l_0$ だから

(20) $$\sigma\alpha_i\in R^+(B)\text{、} {}^\forall i\le l-l_0\text{、} c_{ij}\in\mathbb{N}$$

である。となる。そこで任意の $\alpha\in R^+(B)-R_0$ ならば、

(21) $$\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i,\quad m_i \in \mathbf{Z} \text{ とするとき、} \exists m_i > 0 \quad (i \leqq l-l_0)$$

だから、$\sigma\alpha = \sum_{i \leqq l-l_0} m_i\alpha_i' + \sum_{j > l-l_0} n_j\alpha_j$ の形で、$\exists m_i > 0 \ (i \leqq l-l_0)$ だから

(22) $$\sigma(R^+(B) - R_0) \subset R^+(B) - R_0$$

となり、σ は全単写だから

(23) $$\sigma(R^+(B) - R_0) = R^+(B) - R_0$$

となる。従って B は R の σ-基底である。

2) イ) (1)(2) から $B_0 = B_0'$ だから、$R_0^+(B_0) = R_0^+(B_0') = R_0^+ = R^+(B) \cap B_0$.

ロ) (10) から $ws = 1$, $s = w^{-1} = w \in W_0$ であり、$sB_0 = -B_0$ で、$s \in W_0$ だから、W_0 は R_0 の基底上に単純推移的に作用するから、s は B_0 を $-B_0$ に移す W_0 の唯一の元である。

ハ) (13) と (14) による。

ニ) (15)(16)(17) による。

ホ) (19)(20) による。

これで命題 1 は証明された。∎

定義 5

(R, σ) を対合ルート系とし、$R_0 = \{\alpha \in R \mid \sigma\alpha = -\alpha\}$ とおく。σ-基底 B に対し $B_0 = B \cap R_0$ とし、$\sigma = sp$ を σ の標準分解とするとき、三つ組 (B, B_0, p) を (R, σ) の佐武図形という。命題 1, 2) ニ) により、位数 2 の群 $\{I, p\}$ が集合 $B - B_0$ に作用する。このとき $B - B_0$ における群 $\{I, p\}$ の軌跡の個数 m を、(R, σ) の制限階数という。

基底 B をそのディンキン図形 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(B)$ で図示し、B_0 の元に対応

する $\mathcal{D}$ の頂点を黒丸●で図示し，$B-B_0$ の元に対応する頂点を白丸○で図示する。そして B の元の置換 p は $p^2=I$ だから互換である．$p\alpha_i=\alpha_{i'}$, $p\alpha_{i'}=\alpha_i$ となるとき $\mathcal{D}$ において $\alpha_i, \alpha_{i'}$ に対応する二つの頂点を矢印 $\curvearrowright$ で $\overset{\alpha_i}{\circ} \leftrightarrow \overset{\alpha_{i'}}{\circ}$ のように結ぶ．この図示によって佐武図形 (B, B_0, p) は同型を除き一意的に定まる．従って佐武図形とはこの図示のことと考えてよい．

定義 6

二つの対合ルート系 (R_1, σ_1) と (R_2, σ_2) が同型であるとは，全単写 $\varphi: R_1 \to R_2$ であってルート系の同型写像であるものが存在して，$\varphi\circ\sigma_1 = \sigma_2\circ\varphi$ をみたすことをいう．——

定義 7

二つの佐武図形 (B, B_0, p) と (B', B_0', p') が同型であるとは，全単写 $\varphi: B \to B'$ であって，$n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ $(\forall\alpha, \beta\in B)$ をみたすものが存在して，$\varphi(B_0) = B_0'$, $\varphi\circ p = p'\circ\varphi$ となることをいう．——

命題 2

対合ルート系 (R, σ) は，その佐武図形で同型を除き定まる．

証明　ルート系 R は，その基底 $B=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ またはそのディンキン図形 $\mathcal{D}$ で同型を除いて定まる。$B_0=\{\alpha_j \mid j>l-l_0\}$ とするとき，命題 1, 2) ホ) により，$\sigma\alpha_i = \alpha_{i'} + \sum_{j>l-l_0} c_{ij}\alpha_j$ だから．$V=\sum_{i=1}^{l}\mathbb{R}\alpha_i$ とするとき，$V^- = \{x\in V \mid \sigma x = -x\}$ は，次の (24) で与えられる．

$$(24)\qquad V^- = (1-\sigma)V = \sum_{i=1}^{l}\mathbb{R}(1-\sigma)\alpha_i = \sum_{i\leq l-l_0}\mathbb{R}(\alpha_i-\alpha_{i'}) + \sum_{j>l-l_0}\mathbb{R}\alpha_j.$$

(24) 右辺は $p\alpha_j = \alpha_{j'}$ と $B_0 = \{\alpha_j \mid j \geq l-l_0\}$ によって定まるから、佐武図形により、V^- が定まり、従って $\sigma x = \begin{cases} -x, & x \in V^- \\ x, & x \in V^+ \end{cases}$ が定まる。∎

可能な佐武図形のタイプを決定するため、佐武図形を一般化して、次の概念を導入する。

定義 8

三つ組 (B, B_0, p) が<u>一般佐武図形</u>であるとは、次の 1) 2) 3) をみたすことをいう：

1) B はあるルート系 R の基底である。

2) B_0 は B のある部分集合である。

3) $p \in A(B)$, $p^2 = I$.

定理 1

一般佐武図形 $\mathcal{S} = (B, B_0, p)$ に対して、次の条件 (a) と (b) は同値である：

(a) $\mathcal{S}$ はある対合ルート系 (R, σ) の佐武図形である。

(b) (i) $pB_0 = B_0$, $p(B-B_0) = B-B_0$ 　(ii) (B_0, B_0, p_0) は $(R_0, -I)$ の佐武図形である。ただし $R_0 = R \cap [B_0]_{\mathbb{R}}$, $p_0 = p \mid [B_0]_{\mathbb{R}}$ である。

証明 (a) ⇒ (b) (i) 命題 1, 2) 3) による。

$B_0 = \{\alpha_j \mid l-l_0 \leq j \leq l\}$ とすると、(i) により $pB_0 = B_0$ だから $[B_0]_{\mathbb{R}} = \sum_{j > l-l_0} \mathbb{R}\alpha_j$ は p で不変である。$[B_0]_{\mathbb{R}}$ 上で σ は $-I$ に等しいから、$[B_0]_{\mathbb{R}}$ は σ でも不変、従って $\sigma p = s$ でも不変である。そこで $p_0 = p \mid [B_0]_{\mathbb{R}}$, $s_0 = s \mid [B_0]_{\mathbb{R}}$ とすると、$\sigma \mid [B_0]_{\mathbb{R}} = -I = s_0 p_0$ が $-I \in A(R_0)$ の標準分解で

ある. また命題1, 1)により, $B_0 = B\cap R_0$ は R_0 の基底であるから, (B_0, B_0, p_0) は対合ルート系 $(R_0, -1)$ の佐武図形である.

(b) ⇒ (a). $\mathcal{S} = (B, B_0, p)$ が条件 (b) をみたす一般佐武図形であるとする. 条件 (b) (ii) により, $\mathcal{S}_0 = (B_0, B_0, p_0)$ は $(R_0, -1)$ の佐武図形である. 従って B_0 は $R_0 = R\cap [B_0]_{\mathbb{R}}$ の基底であり, $p_0 \in A(B_0)$, $p_0^2 = I$ である. そして佐武図形の定義から, $-I \in A(R_0)$ の標準分解は

(25) $$-I = s_0 p_0, \quad s_0 \in W(R_0)$$

の形になる。そして命題1, 2) ハ) により

(26) $$s_0 p_0 = p_0 s_0, \quad s_0^2 = p_0^2 = I$$

となる。いま $V = [B]_{\mathbb{R}}$ 上の1次変換 s を, 次の (27) で定義する.

(27) $$s = \begin{cases} s_0, & [B_0]_{\mathbb{R}} \text{ 上で} \\ I, & [B_0]_{\mathbb{R}}^{\perp} \text{ 上で}. \end{cases}$$

特に s_0 が $[B_0]_{\mathbb{R}}$ の一つのベクトル $a \neq 0$ に直交する $[B_0]_{\mathbb{R}}$ の超平面に関する鏡映であるとき, s は a に直交する V の超平面に関する鏡映である. 従って $s_0 \mapsto s$ という写像は $W(R_0)$ から W_0 の上への同型写像を与える. 従って次の (28) (29) が成立つ:

(28) $$s \in W_0, \quad s^2 = I, \quad sp = ps.$$

(29) $\sigma = sp$ とおくとき, $\sigma \in A(R)$.

($s \in W_0 \subset W(R)$ であり, $p \in A(B)$ だから, $sp \in W(R)\cdot A(B) = A(R)$). 従って

(30) $$\sigma^2 = spsp = sp\cdot ps = s^2 = I,$$

(31) (R, σ) は対合ルート系である.

いま

(32) $$R_0' = \{\alpha \in R \mid \sigma\alpha = -\alpha\}$$

とおくとき，

(33) $$R_0' = R_0$$

であることを示そう．$\sigma|[B_0]_{\mathbb{R}} = -I$ だから，次の(34)が成立つ：

(34) $$R_0' \supset R_0$$

逆向きの包含関係を示そう．いま $B = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, $B_0 = \{\alpha_j \mid l-l_0 < j \leq l\}$ とする．条件(b)(i)により $pB_0 = B_0$ であり，p は $B \to B$ の全単射だから，$p(B - B_0) = B - B_0$ である．そこで $p\alpha_i = \alpha_{i'}$ $(1 \leq i \leq l)$ とすると

(35) $$1 \leqq i \leqq l-l_0 \Leftrightarrow 1 \leqq i' \leqq l-l_0$$

となる．いま任意の $\alpha \in R_0'$ をとる。$\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$ とすると，次の(a)(b)のどちらか一方が成立つ：

(36) (a) $\forall m_i \geqq 0$, (b) $\forall m_i \leqq 0$.

最初に(a)の場合であるとしよう．$s \in W_0$ だから次の(37)が成立つ：

(37) $$-\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i = -\alpha = \sigma\alpha = sp\alpha = s\Big(\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_{i'}\Big) = \sum_{i \leqq l-l_0} m_i\alpha_{i'} + \sum_{j > l-l_0} n_j\alpha_j.$$

(37)の両辺で $i \leqq l-l_0$ となる i に対する α_i の係数は，(37)左辺ではすべて $\leqq 0$ であり，右辺ではすべて $\geqq 0$ である。基底 B は1次独立だから，$m_i = 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq l-l_0)$ となる。従って

(38) $$\alpha = \sum_{j > l-l_0} m_j\alpha_j \in R \cap [B_0]_{\mathbb{R}} = R_0$$

である．α は R_0' の任意の元であったから，次の(39)が証明された：

(39) $$R_0' \subset R_0$$

(34)(39)により，(33)が証明された。

またこのとき，次の(40)が成立つ:

(40) $$B_0 = B \cap R_0$$

$B_0 \subset B$, $B_0 \subset [B_0]_{\mathbb{R}} \cap R = R_0$ だから

(41) $$B_0 \subset B \cap R_0$$

である。一方 B は一次独立だから，$B \cap [B_0]_{\mathbb{R}} \subset B_0$ であるから

(42) $$B \cap R_0 = B \cap [B_0]_{\mathbb{R}} \cap R \subset B_0 \cap R = B_0$$

となる。(41)と(42)から(40)が成立つ.

一般位置図形の定義から $p \in A(B)$ で，(28)から $\rho \in W_0$ であるから

(43) $\sigma = \rho p$ は σ の標準分解である.

(44) B は σ-基底である.

実際任意の $\alpha \in R^+(B) - R_0$ をとるとき

(45) $$\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i, \quad {}^\forall m_i \geqq 0, \quad {}^\exists m_{i_0} > 0, \quad 1 \leqq i_0 \leqq l - l_0$$

となる。このとき

(46) $$\sigma\alpha = \rho p \alpha = \sum_{i \leqq l-l_0} m_i \alpha_{i'} + \sum_{j > l-l_0} \eta_j \alpha_j$$

となる。(45)により $m_{i_0} > 0$ となる $i_0 \in \{1, 2, \cdots, l-l_0\}$ が存在するから，

$\sigma\alpha \in R^+(B) - R_0$ である。従って $\sigma(R^+(B) - R_0) \subset R^+(B) - R_0$ が成立つが，σ は有限集合 R の全単写だから，

$$\sigma(R^+(B) - R_0) = R^+(B) - R_0$$

となる。従って(43)が成立つ.

(40) (43) (44) により $\mathcal{S} = (B, B_0, p)$ が (R, σ) の σ-基底であることが証明された. ∎

定義 9

ルート系Rが互いに直交する二つの部分集合 R_1, R_2 $(\neq \emptyset)$ の合併となることを可約であるという。可約でないとき既約という。可約ルート系Rは、互いに直交する有限個の既約部分系の合併となる。この既約部分系をRの既約成分という。

命題 3　Rを既約ルート系とする。

1)　ルート系Rが、A_n $(n \geqq 2)$, D_{2n+1}, E_6 のいずれか一つであるとき、$-I$の標準分解(定義4.(0))は、次の形となる:

(47) $$-I = w_0 \cdot p, \quad w_0 \in W, \quad p\text{は}A(B)\text{の位数2の元}.$$

2) Rが上の三種のルート系でないときは、次の(48)が成立つ:

(48) $$-I \in W.$$

証明　1)　$R = A_n$ $(n \geqq 2)$ のとき、$n = 2m$ または $2m+1$ において

(48) $$-I = \begin{cases} s_{e_1-e_{n+1}} \cdot s_{e_2-e_n} \cdots s_{e_m-e_{m+1}} \cdot p, & n = 2m \\ s_{e_1-e_{n+1}} \cdot s_{e_2-e_n} \cdots s_{e_{m+1}-e_{m+2}} \cdot p, & n = 2m+1 \end{cases}$$

となる。ここでpはA(B)の位数2の元であり、ディンキン図形の中心に関する対称写像である。

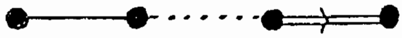
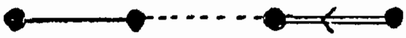
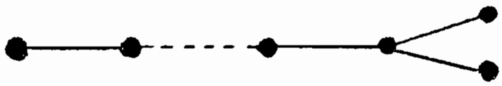
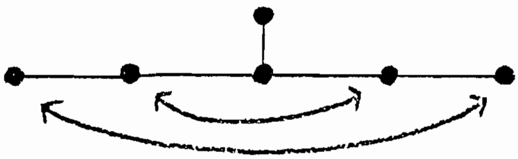
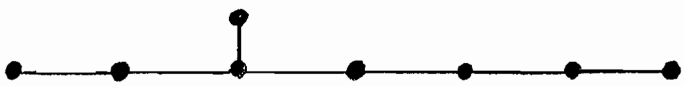
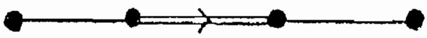
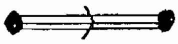
$R = D_{2n+1}$ のときは

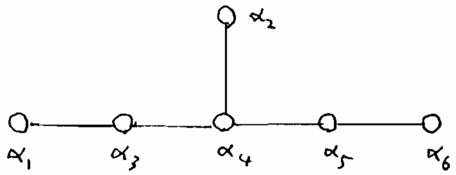
(49) $$-I = s_{e_1-e_2} \cdot s_{e_1+e_2} \cdots s_{e_{2n-1}-e_{2n}} \cdot s_{e_{2n-1}+e_{2n}} \cdot p$$

ここで p は $\alpha_{2n} = e_{2n} - e_{2n+1}$ を $\alpha_{2n+1} = e_{2n} + e_{2n+1}$ に写し、$p\alpha_i = \alpha_i$ $(1 \leqq i \leqq 2n-1)$ となるA(B)の位数2の元である。

$R = E_6$ のディンキン図形は次の形になる:

表3　既約ルート系 R に対する $(R, -I)$ の佐武図形

R	佐武図形
A_1	
A_ℓ $(\ell \geqq 2)$	
B_ℓ $(\ell \geqq 2)$	
C_ℓ $(\ell \geqq 3)$	
D_{2n}	
D_{2n+1}	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	



pをこのディンキン図形の左右対称写像($p\alpha_1=\alpha_6$, $p\alpha_3=\alpha_5$, $p\alpha_4=\alpha_4$, $p\alpha_2=\alpha_2$)とし，$w_0 \in W$を$w_0 B=-B$となる唯一つの元とするとき，

(50) $$-I = w_0 p$$

となる．(48)(49)(50)により1)が示された．

2) Rが1)の三種のルート系でないとき，すなわち$R=A_1$, B_n, C_n, D_{2n}, E_7, E_8, F_4, G_2のときを考える．先ず$R=D_{2n}$のときは，

(51) $$-I = s_{e_1-e_2} s_{e_1+e_2} \cdots s_{e_{2n-1}-e_{2n}} s_{e_{2n-1}+e_{2n}} \in W$$ である．

$R=A_1$, B_n, C_n, E_7, E_8, F_4, G_2のときはディンキン図形に対称性がなく$A(R)/W(R)=\{I\}$, $A(R)=W(R)$となるから，

(52) $$-I \in A(R)=W(R)$$

となる．(51)(52)により2)が証明された．∎

命題3系

既約ルート系Rに対し，対合ルート系$(R,-I)$の佐武図形は，表3で与えられる．

証明　命題3の内容を佐武図形で図示したものである．∎

命題3系を用いて，定理1の内容を佐武図形の言葉で述べることができる．それを次の定理2として述べる．

定理2

一般佐武図形 $S=(B,B_0,p)$に対し，次の(a)と(b)は同値である:

(a)　$\mathcal{S}$ はある対合ルート系 (R, σ) の佐武図形である.

(b)　(i)　$\mathcal{S}$ の矢印 ↶↷ は黒丸と黒丸, 白丸と白丸を結ぶ.

　　(ii)　$\mathcal{S}$ の黒丸の頂点とその間を結ぶ稜および矢印から成る一般佐武図形 $\mathcal{S}_0$ は, その既約成分が表7の11種の佐武図形のどれかと一致する.

証明. 定理1と命題3系から直ちに導かれる. ∎

定理2の特別な場合として $p=1$ すなわち一般佐武図形 $\mathcal{S}$ に矢印 ↶ が現われない場合を考えると, 次の系が得られる.

定理2系

一般佐武図形 $\mathcal{S}=(B, B_0, I)$ に対し, 次の(c)と(d)は同値である.

(c)　$\mathcal{S}=(B, B_0, I)$ は, ある対合ルート系 (R, σ) の佐武図形である.

(d)　B_0 の既約成分に, A_n $(n \geq 2)$, D_{2n+1}, E_6 は含まれない.

証明. 定理1と命題3により, 次の同値が成立つ.

(c) $\Longleftrightarrow$ (B_0, B_0, I) は $(R_0, -1)$ の佐武図形である.

$\Longleftrightarrow$ $-I \in W(R_0)$

$\Longleftrightarrow$ (d) R_0 (または B_0) の既約成分には, A_n $(n \geq 2)$, D_{2n+1}, E_6 は含まれない. ∎

定義 10

対合ルート系 (R, σ) は, σ で不変な R の部分ルート系 $R_1 \neq \emptyset$ が R しか存在しないとき, <u>σ-既約</u>という.

例1.　R が既約ならば, (R, σ) は σ-既約である.

命題4

対合ルート系 (R,σ) に対して、次の条件 (a)(b)(c) は互いに同値である。

(a) (R,σ) は σ-既約で、R は既約でない。

(b) $R_0=\{\alpha\in R \mid \sigma\alpha=-\alpha\}$ は空集合で、R の既約部分ルート系 R_1, $R_2\neq\phi$ であって、$R=R_1\cup R_2$, $R_1\perp R_2$, $\sigma R_1=R_2$ となるものが存在する。

(c) (R,σ) の佐武図形は、$\mathcal{S}=(B_1\cup B_2,\phi,\sigma)$ で、$B_1\cap B_2=\phi$, $\sigma B_1=B_2$, $B_1\perp B_2$ で、B_1, B_2 のディンキン図形は連結である。

証明 (b)$\Rightarrow$(c) $R=R_1\cup R_2$, $R_1\perp R_2$ だから、R_i の基底を B_i とする $(i=1,2)$ とき、R の基底 B は、$B=B_1\cup B_2$, $B_1\cap B_2=\phi$ となる。そして $R_0=\phi$ だから、$B_0=B\cap R_0=\phi$ でありかつ $W_0=\{1\}$ だから、σ の標準分解は、$\sigma=1\cdot p=p$ となる。従って $\mathcal{S}=(B_1\cup B_2,\phi,\sigma)$ である。また $\sigma R_1=R_2$ から $\sigma B_1=\sigma(B\cap R_1)=\sigma B\cap\sigma R_1=B\cap R_2=B_2$ となる。

(c)$\Rightarrow$(b) $\sigma=p\in A(B)$ だから、$\sigma B=B$ である。$B=B_1\cup B_2$, $B_1\perp B_2$, $B_1\cap B_2=\phi$ だから、$R_1\cup R_2=R$, $R_1\perp R_2$ となる。また $B_0=\phi$ だから $R_0=\phi$ となる。そして $\sigma B_1=B_2$ から、$\sigma R_1=R_2$ となる。

(b)$\Rightarrow$(a) $R=R_1\cup R_2$, $R_1\perp R_2$, $R_1,R_2\neq\phi$ だから R は既約でない。一方 R_1, R_2 は既約ルート系だから、R の部分ルート系は、R, R_1, R_2 の三つのみである。そして $\sigma R_1=R_2$ だから、σ で不変な R の部分ルート系は R のである。従って (R,σ) は σ-既約である。

(a)$\Rightarrow$(b) R の既約成分への分解を、$R=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n$ と

する．Rは既約でないから $n \geqq 2$ である．この既約成分への分解は，順序を除いて一意的である．いま $\sigma \in A(R)$ だから，σR_j もまた R の既約成分の一つであるから，$\sigma R_j = R_{\sigma(j)}$ となる。これより，$\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換 $j \mapsto \sigma(j)$ が定まる．$\sigma^2 = 1$ だから，この置換は互換である．$R_j \cup \sigma R_j$ は σ で不変な，R の部分ルート系であるから，(R, σ) が σ-既約であることから $R = R_j \cup R_{\sigma(j)}$ となる。$\sigma(j) = j$ ならば $R = R_j$ となり，R は既約となって仮定に反するから $\sigma(j) \neq j$ である．従って $n = 2$ で，$R = R_1 \cup R_2$，$R_2 = \sigma R_1$ となる。$R = R_1 \cup R_2$ は R の既約分解だから，$R_1 \perp R_2$ である．R_1, R_2 は R の既約成分だから，$R_1, R_2 \neq \phi$ である．最後に次の(53)を示そう．

(53) $$R_0 = \phi.$$

今帰謬法で(53)を証明するために，$\alpha \in R_0$ となるルート α が存在すると仮定して矛盾を導く．$\alpha \in R = R_1 \cup R_2$ だから，$\alpha \in R_1$ または $\alpha \in R_2$ である。どちらでも同じであるから，$\alpha \in R_1$ としよう．このとき，$\sigma\alpha \in \sigma R_1 = R_2$ である。一方 $\alpha \in R_0$ だから $\sigma\alpha = -\alpha \in R_1$ となる。従って $\sigma\alpha \in R_1 \cap R_2 = \phi$ となり矛盾である．∎

例2　複素単純リー環 M を，実リー環と考えたものを $L = M_{\mathbb{R}}$ とする．L の複素化 $L^{\mathbb{C}} \cong M \oplus M$ となる．M のカルタン部分環 C を一つとるとき，$C_{\mathbb{R}}$ は $L = M_{\mathbb{R}}$ のカルタン部分環で $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \cong C \oplus C$ である。$(L^{\mathbb{C}}, C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}})$ のルート系 R は，σ-既約であるが，既約でない．(M, C) のルート系を R_1 とすると，R は R_1 と R_1 の直和する

直和となる。——

以上の結果を用いて、制限階数 $=1$ の対合ルート系を定めることができる。命題2により、そのためには、対応する佐武図形を定めればよい。

定理3

制限階数が1で σ-既約な対合ルート系 (R,σ) は、その佐武図形が表4にある20種類の図形の一つとなるものしかない。

証明. 次の二つの場合(イ)(ロ)に分けて考える。

(54) (イ) $R\neq$既約のとき, (ロ) $R=$既約のとき.

(イ)の場合. (R,σ) は σ-既約としているから、命題4により、次の(55)が成立つ:

(55) $R_0=\emptyset$, $R=R_1\cup R_2$, $R_1\perp R_2$, $\sigma R_1=R_2$, $R_1, R_2\neq\emptyset$.

今制限階数 $=1$ だから、佐武図形 S の白丸は二つで、それが矢印で結ばれている。それ以外に頂点はないから、この場合 S は、 となる。すなわち表4の No. 1 の図形である。

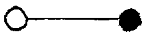
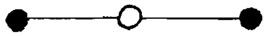
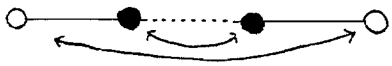
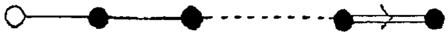
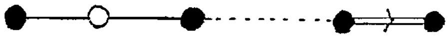
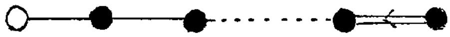
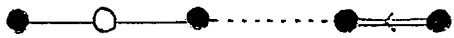
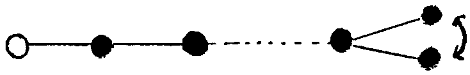
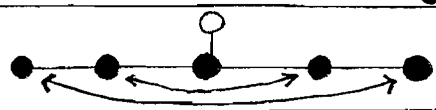
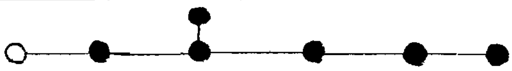
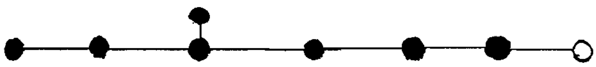
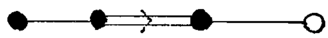
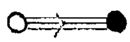
(ロ)の場合.

具体的に $R=A_n$ のときを考えよう。$\sigma=sp$ を標準分解とするとき、次の二つの場合に分けて考える:

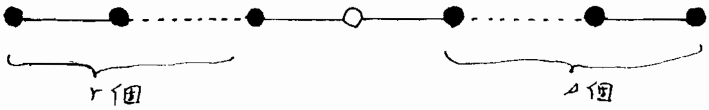
(56) (a) $p=I$, (b) $p\neq I$

つまり佐武図形 S で、矢印が、(a) ない場合、(b) ある場合、の二つに分けて考える。

表4　制限階数1の佐武図形

No.	R	佐武図形	正規	正規拡大可能
1	A		+	+
2			+	+
3			−	−
4			+	+
5			+	+
6	B		+	+
7			−	−
8	C		−	−
9			+	+
10	D_{2n} $(n \geqq 2)$		+	+
11			+	−
12	D_{2n+1} $(n \geqq 2)$		+	+
13			+	−
14	E_6		+	−
15	E_7		+	−
16	E_8		+	−
17	F_4		−	−
18			+	+
19	G_2		−	−
20			−	−

(a)の場合．制限階数が1としているから，白丸の頂点は唯1個である．従って $\mathcal{S}$ は，このとき次の形になる．



$r+s+1=n$

$r, s \geq 0$

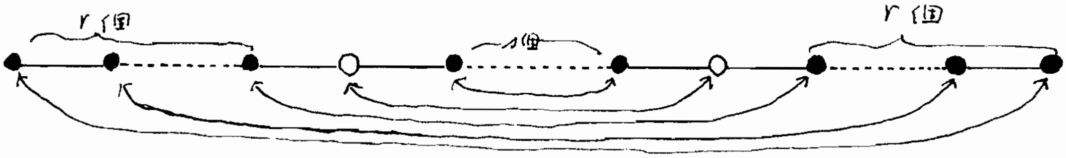
このとき $R_0=A_r\oplus A_s$ となる。今 $p=1$ だから定理2系の条件(d)により，このとき $r\leq 1,\ s\leq 1$ でなければならない．従ってこの場合可能な場合は，次の三つである．

1. $r=s=0$，　2. $r=1, s=0$ または $r=0, s=1$，　3. $r=s=1$

この三つの場合は，それぞれ表4の No.2, No.3, No.4の図形に対応する．

(b)の場合．

A_n型ディンキン図形 $\mathcal{D}$ の対称写像 $p\neq 1$ は，$\mathcal{D}$ の中心に関する左右対称写像である。今 $p\neq 1$ で制限階数が1だから，白丸の頂点は二つで，それが矢印で結ばれている．そしてこの二つの頂点は $\mathcal{D}$ の中心に関し対称の位置にある．そこでこの場合の佐武図形は，次のような形になる．



このとき，$R_0=A_r\oplus A_s\oplus A_r$ である．定理2により，黒丸の頂点とそれを結ぶ線および矢印から成る一般佐武図形 $\mathcal{S}_0$ は，その各既約成分が表3の11種類の図形の内の一つでなけ

ればならない。今上の$\mathcal{S}$において，$r>0$であると仮定すると表3にない図形が生ずるので定理2に反する．従って$r=0$であり，このとき$\mathcal{S}$は表4のNo.5の図形になる．

RがA_n型以外の既約ルート系の場合にも，同様にして表4にある図形しか可能でないことがわかる．∎

制限階数一般の対合ルート系とその佐武図形を考えることもできるが，我々の目標である実形の分類には定理4で十分なので，話を本来のテーマにもどす．

2　佐武図形による実形の分類

前節では，実半単純リー環Lの任意のカルタン部分環Cをとるとき，(L^c, C^c)のルート系Rに，Lに関するL^cの複素共役写像σによって対合（位数2の自己同型写像）σ_0が定義され，対合ルート系(R, σ_0)が生ずることを述べた．一般にLには複数の$\mathrm{Int}\,L$で共役でないカルタン部分環が存在し，Cのとり方によって異なる（同型でない）対合ルート系が生ずる。荒木[1]の方法では，Cとしてベクトル部分最大のカルタン部分環をとる．

定義11

実半単純リー環Lのカルタン部分環（定義1）Cに対し，

$C_t = \{H \in C \mid ad_L H$ のすべての固有値は純虚数である$\}$,

$$C_v = \{ H \in C \mid ad_L H \text{のすべての固有値は実数である} \}$$

とおく。C_t, C_v は C の部分リー環で

(57) $$C = C_t \oplus C_v$$

となる。随伴群 $G_0 = \mathrm{Int}\, L$ の中に，C_t, C_v が生成する連結リー部分群 T_t, T_v は，それぞれトーラス群 $\mathbb{T}^p$，ベクトル群 R^q と同型である。C_t, C_v を C のトーラス部分，ベクトル部分と呼ぶ。

$p + q = l = \dim C = \mathrm{rank}\, L$ である。

いま L に関する L^c の複素共役写像を σ とするとき，σ で不変な L^c のコンパクト実形 L_u が存在する：$\sigma L_u = L_u$．このとき L_u に関する L^c の複素共役写像を τ とするとき，τ により L は不変である（ヘルガソン[20] III章 定理7.1）．このとき

(58) $$K = \{ X \in L \mid \tau X = X \} = L \cap L_u, \quad P = \{ X \in L \mid \tau X = -X \} = L \cap iL_u$$

とおくとき，次の(59)が成立つ：

(59) $$L = K \oplus P, \ [K, K] \subset K, \ [K, P] \subset P, \ [P, P] \subset K.$$

$L = K \oplus P$ なる直和分解を，L のカルタン分解という。$L \cong adL$ だから，L を $G_0 = \mathrm{Int}\, L$ のリー環と考えるとき，G_0 の連結リー部分で K をリー環とするものは，G_0 の極大コンパクト部分群である。

定義 12

上の記号をそのまま用いる。P に含まれる可換部分環中極大なものを一つとり，A とする。A を含む，L の任意の極大

可換部分環をCとするとき，CはLのカルタン部分環で

(60) $$C_t = C \cap K, \quad C_v = C \cap P = A$$

となる［杉浦[39]，命題4）.

このようにして得られたカルタン部分環Cは，Lのカルタン部分環の中で，$\dim C_v$が最大のものである．また逆に$\dim C_v$が最大のLのカルタン部分環はすべてこのようにして得られ，それらはすべて$G_0 = \mathrm{Int} L$で共役である(杉浦[39]定理2). $\dim C_v$が最大のカルタン部分環を，Lの<u>正規</u>カルタン部分環という．

定義 13

対合ルート系(R, σ)は，任意の$\alpha \in R$に対し，

(61) $$\sigma\alpha - \alpha \notin R$$

となるとき，<u>正規</u>であるという．

以下荒木[1]で証明されている命題については，証明を省略し，荒木論文のどの命題であるかだけを記す．荒木の基本定理は次の定理4である．

定理 4

複素半単純リー環Mの二つの実形L, L'に関するMの複素共役写像をσ, σ'とする．またC, C'をそれぞれL, L'の正規カルタン部分環とし，$(M, C^{\mathbb{C}})$，$(M, C'^{\mathbb{C}})$のルート系をR, R'とする．σ, σ'から対合ルート系(R, σ)，(R', σ')が生ずる．このとき次の条件(a)と(b)は同値である：

(a) $L \cong L'$ (b) $(R, \sigma_0) \cong (R', \sigma_0')$

証明 荒木 [1] 系 2.15.

さて荒木の方法では正規カルタン部分環から生ずる対合ルート系によって実形の分類を行うのであるから，一般の対合ルート系の中で，このようなものを特定する必要がある。そこで次のように定義する。

定義 14

対合ルート系 (R, σ_0) は，次の条件 (a) (b) をみたすとき，正規拡大可能 (normally extendable) という。

(a) 実半単純リー環 L とその正規カルタン部分環 C が存在し，

(b) $(L^{\mathbb{C}}, C^{\mathbb{C}})$ のルート系が R で，L に関する $L^{\mathbb{C}}$ の複素共役写像 σ が引起す R の対合（位数 2 の自己同型写像）（定義 2）が σ_0 である。

以下次の記号を固定して話を進める。

定義 15

M を複素半単純リー環，L_τ を M の一つのコンパクト実形で L_τ に関する M の複素共役写像を τ とする。T を L_τ の一つのカルタン部分環とし，$(M, T^{\mathbb{C}})$ のルート系を R，各ルート $\alpha \in R$ に対するルート空間を M_α とする。各 $\alpha \in R$ に対し，$H_\alpha \in T^{\mathbb{C}}$ で，$\alpha(H) = B(H_\alpha, H)$ $(\forall H \in T^{\mathbb{C}})$ となるものが唯一つ存在する。以下 α と H_α を同一視する。$T_0 = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R} H_\alpha$ は $T^{\mathbb{C}}$ の一つの実形であり，

$B|T_0 \times T_0$ は正値定符号だから，$(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$ によりルート α と β の間の内積を定義する。<u>ワイル基底</u> $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ は $M \bmod C^\epsilon$ の基底で次の三条件 (a)(b)(c) をみたすものをいう：

(a) $X_\alpha \in M_\alpha$，$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \quad (\forall \alpha \in R)$.

(b) $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$ のとき，$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ とするとき，

$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ である．

(c) $U_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$, $V_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in L_\tau$. $(\forall \alpha \in R)$.

ワイル基底はいつも存在する．それを一つ固定しておく．

$N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ である．

M を $\mathbb{R}$ 上のリー環と考えたものを $M_\mathbb{R}$ と記す．

命題 5

定義 15 のルート系 R の対合 σ_0 と，$l = \mathrm{rank}\, M$ 個の絶対値 1 の複素数 u_i $(1 \leq i \leq l)$ が任意に一つ与えられたとき，次の 1)—6) をみたす φ が唯一つ存在する：

1) $\varphi \in \mathrm{Aut}\, M_\mathbb{R}$，　2) φ は半線型写像である $(\forall X, Y \in M_\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ に対し，$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$，$\varphi(aX) = \bar{a}\varphi(X))$.

3) $\varphi(T^\mathbb{C}) = T^\mathbb{C}$，$\varphi | T_0 = \sigma_0$.　4) $\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi$，

5) $\varphi(X_\alpha) = \rho_\alpha X_{\sigma_0 \alpha}$，$|\rho_\alpha| = 1 \quad (\forall \alpha \in R)$.

6) $B = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ を R の一つの基底とするとき，$\rho_{\alpha_i} = u_i$ $(1 \leq i \leq l)$.

証明　荒木 [1] (3.1)，(3.2)，(3.3)．

定義 16

Rを定義15のルート系，σ_0 をRの対合とし，$R_0=\{\alpha\in R\mid\sigma_0\alpha=-\alpha\}$，とする．また$B$を$R$の$\sigma$-基底（定義4）とする．命題5の$\rho$が

(a) $$\rho_\alpha=1 \quad (\forall\alpha\in B_0=B\cap R_0)$$

をみたすとき，ρをσ_0の正規拡大という．

命題6

定義15,16と命題5の記号，定義の下で，次の条件(a)(b)(c)は互いに同値である．

(a) (R,σ_0)は，正規拡大可能である．

(b) σ_0の正規拡大ρで，$\rho^2=I$となるものが存在する．

(c) σ_0の正規拡大ρで，$\overline{\rho_\alpha}\rho_{\sigma_0\alpha}=1$ $(\forall\alpha\in B-B_0)$となるものが存在する．

証明　荒木[1]命題3.1.

命題6の条件(c)は，次の命題7により，対合ルート系の性質として表現される．

命題7.

(R,σ)を対合ルート系とし，ρをσの正規拡大とする．またBをRのσ-基底とするとき，次の1) 2)が成立つ．

1) $\alpha\in B-B_0$に対して，$\gamma,\delta\in R_0$であって次の条件(a)(b)(c)をみたすものが存在するとき，$\overline{\rho_\alpha}\cdot\rho_{\sigma\alpha}=1$である：

(a) $\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta\in R$，(b) $\gamma+\delta\notin R\cup\{0\}$，(c) $\sigma\alpha=\alpha+\gamma+\delta$.

2) $\alpha\in B-B_0$に対し，$\gamma,\delta,\varepsilon\in R_0$であって次の(a),(b),(c)

をみたすものが存在することを，$\bar{p}_\alpha p_{\sigma\alpha}=-1$である．

(a)　$\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \alpha+\varepsilon,\ \sigma\alpha-\gamma,\ \sigma\alpha-\delta,\ \sigma\alpha-\varepsilon\ \in R$.

(b)　$\gamma+\delta,\ \gamma+\varepsilon,\ \delta+\varepsilon \notin R\cup\{0\}$,　(c)　$\sigma\alpha=\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon$.

証明　荒木[1] Lemma 4.6, 4.7.

以上の準備の下で，次の定理5が証明される．定理5の中では，各既約ルート系の具体的な形を用いるが，ルート系の記述はここでは，ブルバキ[3]に従い，そこでの記号をそのまま用いる．ただし[3]で(ε_i)と記されている正規直交系をここでは(e_i)と記す．

定理5（荒木[1] §4）

表4にあたえられている，20個の制限階数1の対合ルート系(R,σ)の中で，正規拡大可能であるのは，No. 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18の9個の系に限る．詳しくは次の1) 2) 3)が成立つ．

1)　表4の対合ルート系の内で，No. 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18の9個の系は正規拡大可能である．

2)　表4の内でNo. 3, 7, 8, 17, 19, 20の6個の対合ルート系は正規ではなく，従って正規拡大可能ではない．

3)　表4の中でNo. 11, 13, 14, 15, 16の5個の対合ルート系は正規拡大可能ではない．

証明　1)　命題6，(C)の条件(c) $\bar{p}_\alpha p_{\sigma\alpha}=1$を$\alpha\in B-B_0$に対しみたすことを示せばよい．

No. 1 $B=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\sigma\alpha_1=\alpha_2$.

このとき $L^\sigma=M$ は同型な二つのイデアルの直和であるから、$\rho_{\alpha_1}=\rho_{\alpha_2}$ となるように $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}$ をとることができる。命題5, 5) により、$|\rho_{\alpha_i}|=1$ $(i=1, 2)$ であるから、

$$\bar{\rho}_{\alpha_1}\rho_{\sigma\alpha_1}=\bar{\rho}_{\alpha_1}\cdot\rho_{\alpha_2}=\bar{\rho}_{\alpha_1}\cdot\rho_{\alpha_1}=|\rho_{\alpha_1}|^2=1$$

である。同様に $\bar{\rho}_{\alpha_2}\cdot\rho_{\sigma\alpha_2}=1$ であるから、条件がみたされる。

No. 2. $B=\{\alpha_1\}$, $p=I$.

このときσの標準分解から、$\sigma=s\in W=\{I, s_{\alpha_1}\}$ である。いま $\sigma=s_{\alpha_1}$ であると仮定すると、$\sigma\alpha_1=-\alpha_1$ であるから $\alpha_1\in R_0\cap B=B_0=\phi$ となり矛盾である。従って $\sigma=I$ である。そこで $\bar{\rho}_{\alpha_1}\rho_{\sigma\alpha_1}=|\rho_{\alpha_1}|^2=1$ となり、命題6, (c) の条件がみたされる。

No. 5 $B=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, $B-B_0=\{\alpha_1, \alpha_n\}$, $p\alpha_1=\alpha_n$.

今 $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leqq i\leqq n)$ である。$\beta=\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}=e_2-e_n\in R$ とおくとき、$\sigma\beta=\sigma\alpha_2+\cdots+\sigma\alpha_{n-1}=-\beta$ であり、$\beta\in R_0$ である。いま $T_0^+=\{x\in T_0 \mid \sigma x=x\}$, $T_0^-=\{x\in T_0 \mid \sigma x=-x\}$ とする。$p\alpha_1=\alpha_1'=\alpha_n$ だから命題の証明中の(24)式により、T_0^+, T_0^- は次式で与えられる。

$$T_0^-=\mathbb{R}(\alpha_n-\alpha_1)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{R}\alpha_i$$

$$\begin{aligned}T_0^+&=T_0^{-\perp}=\left\{x=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i=0,\ (x, \alpha_i)=0\ (2\leqq i\leqq n-1),\ (x, \alpha_n-\alpha_1)=0\right\}\\&=\left\{x=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i=0,\ \xi_i=\xi_{i+1}\ (2\leqq i\leqq n-1),\ \xi_1-\xi_2\ \ \xi_n+\xi_{n+1}=0\right\}\\&=\left\{x=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i e_i \;\middle|\; \xi_1+(n-2)\xi_2+\xi_{n+1}=0,\ \xi_1-2\xi_2+\xi_{n+1}=0,\ i=\xi_{i+1}\ (2\leqq i\leqq n-1)\right\}\\&=\left\{x=\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i e_i \;\middle|\; \xi_i=0\ (2\leqq i\leqq n),\ \xi_{n+1}=-\xi_n\right\}=\{\xi(e_1-e_{n+1})\ \ \xi\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}(e_1-e_{n+1})\end{aligned}$$

従って $x\in T_0$ の T_0^+ への射影 $x\mapsto \frac{1}{2}(1+\sigma)x$ は、$x=\alpha_1$ に対しては

$$\frac{1}{2}(1+\sigma)\alpha_1 = \left(e_1-e_2, \frac{e_1-e_{n+1}}{\sqrt{2}}\right)\frac{e_1-e_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(e_1-e_{n+1})$$

となる。従って $\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_n$ は

(62) $$\sigma\alpha_1 = (e_1-e_{n+1})-(e_1-e_2) = e_2-e_{n+1} = (e_2-e_n)+(e_n-e_{n+1}) = \beta+\alpha_n$$

(63) $$\sigma\alpha_n = \alpha_1-\sigma\beta = \alpha_1+\beta$$

となる。いま $[X_{\alpha_n}, X_\beta] = N_{\alpha_n,\beta}X_{\sigma\alpha_1}$ に、命題5の φ を作用させて、

(64) $$\rho_{\alpha_n}N_{\alpha_1+\beta,-\beta} = N_{\alpha_n,\beta}\,\rho_{\sigma\alpha_1}$$

を得る。命題5により、$\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_n}$ としては絶対値1の任意の複素数をとることができるから、今 $|u_1|=1$ となる $u_1\in\mathbb{C}$ を任意にとり、

(65) $$\rho_{\alpha_1}=u_1, \quad \rho_{\alpha_n}=\rho_{\alpha_1}N_{\alpha_n,\beta}/N_{\sigma\alpha_n,\sigma\beta}$$

とおくことができる。($\varphi\in \mathrm{Aut}\,M_R$ だから、$N_{\alpha_n,\beta}^2 = N_{\sigma\alpha_n,\beta}^2$ だから、$|\rho_{\alpha_n}|=|\rho_{\alpha_1}|=1$ となる)。そして $\sigma\alpha_1=\beta+\alpha_n$, $\varphi X_{\alpha_1}=\rho_{\alpha_1}X_{\sigma\alpha_1}$ だから

(66) $$\bar{\rho}_{\alpha_1}\rho_{\sigma\alpha_1} = \bar{\rho}_{\alpha_1}\rho_{\alpha_n}\frac{N_{\sigma\alpha_n,\sigma\beta}}{N_{\alpha_n,\beta}} = \bar{\rho}_{\alpha_1}\cdot\rho_{\alpha_1}\frac{N_{\alpha_n,\beta}\cdot N_{\sigma\alpha_n,\sigma\beta}}{N_{\sigma\alpha_n,\sigma\beta}\cdot N_{\alpha_n,\beta}} = |\rho_{\alpha_1}|^2 = 1$$

となる。同様にして

(67) $$\bar{\rho}_{\alpha_n}\cdot\rho_{\sigma\alpha_n} = 1$$

が証明される。(ただし荒木[1](4.5.1)を用いる)。

残りの6個の表 No. 4, 6, 9, 10, 12, 18 が正規拡大可能であることの証明には、命題7, 1) の条件 (a)(b)(c) をみたすルート $\delta\in R_0$ が存在することを示すことによって、命題6の条件(i)がみた

されることを示す。次の表で γ, δ およびそれらが条件をみたすことを示す。

No / ルート	4	6	9	10, 12	18
α	e_2-e_3	e_1-e_2	e_2-e_3	e_1-e_2	$2^{-1}(e_1-e_2-e_3-e_4)$
σ	$s_{e_1-e_2}\cdot s_{e_3-e_4}$	$s_{e_2}s_{e_3}\cdots s_{e_n}$	$s_{e_1-e_2}\cdot s_{2e_3}\cdots s_{2e_n}$	(68)	$s_{e_2}\cdot s_{e_3}\cdot s_{e_4}$
$\sigma\alpha$	e_1-e_4	e_1+e_2	e_1+e_3	e_1+e_2	$2^{-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)$
γ	e_1-e_2	e_2	e_1-e_2	e_2-e_3	e_2
δ	e_3-e_4	e_2	$2e_3$	e_2+e_3	e_3+e_4
$\alpha+\gamma+\delta$	e_1-e_4	e_1+e_2	e_1+e_3	e_1+e_2	$2^{-1}(e_1+e_2+e_3+e_4)$
$\alpha+\gamma$	e_1-e_3	e_1	e_1-e_3	e_1-e_3	$2^{-1}(e_1+e_2-e_3-e_4)$
$\alpha+\delta$	e_2-e_4	e_1	e_2+e_3	e_1+e_3	$2^{-1}(e_1-e_2+e_3+e_4)$
$\gamma+\delta$	$e_1-e_2+e_3-e_4$	$2e_1$	$e_1-e_2+2e_3$	$2e_2$	$e_2+e_3+e_4$

(68) No. 10, 12 では、 $T_0^- = \sum_{i=2}^{l} \mathbb{R}e_i$, $T_0^+ = \mathbb{R}e_1$, $\sigma x = \begin{cases} -x, & x \in T_0^- \\ x, & x \in T_0^+ . \end{cases}$

2) $\sigma\alpha - \alpha \in R$ となるルート $\alpha \in R$ の存在を示す。

No. \ ルート	σ	α	$\sigma\alpha$	$\sigma\alpha-\alpha$
3	$s_{e_2-e_3}$	e_1-e_2	e_1-e_3	e_2-e_3
7	$s_{e_1-e_2}\cdot s_{e_3}s_{e_4}\cdots s_{e_n}$	e_2	e_1	e_1-e_2
8	$s_{2e_2}s_{2e_3}\cdots s_{2e_n}$	e_1+e_2	e_1-e_2	$-2e_2$
17	$s_{e_1-e_2}s_{e_3}s_{e_4}$	e_1	e_2	e_2-e_1
19	$s_{-2e_1+e_2+e_3}$	e_1-e_3	$-e_1+e_2$	$-2e_1+e_2+e_3$
20	$s_{e_1-e_2}$	e_1-e_3	e_2-e_3	e_2-e_1

3) No. 11, 13, 14, 15, 16 の対合ルート系に対しては、$B-B_0$ の唯一つの元 α に対し命題 7, 2) の条件 (a) $\alpha+\gamma$, $\alpha+\delta$, $\alpha+\varepsilon$, $\sigma\alpha-\gamma$, $\sigma\alpha-\delta$, $\sigma\alpha-\varepsilon \in R$ および (b) $\gamma+\delta$, $\gamma+\varepsilon$, $\delta+\varepsilon \notin R\cup\{0\}$, (c) $\sigma\alpha=\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon$ をみたす $\gamma, \delta, \varepsilon \in R_0$ が存在することを示す。

ルート \ No.	11, 13	16	15	14
α	e_2-e_3	e_7-e_6	$\alpha_1=2^{-1}[e_1+e_8-\sum_{i=2}^{7}e_i]$	$\alpha_2=e_1+e_2$
σ	(69)	(70)	(72)	$-s_\beta$ (75)
$\sigma\alpha$	e_1+e_3	e_8+e_6 (71)	$-2^{-1}[e_7-e_8+e_1-\sum_{i=2}^{6}e_i]$	$\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon$ (76)
γ	e_1-e_2	e_6-e_1	e_4-e_1	e_3-e_2
δ	e_3-e_ℓ	e_1+e_6	e_2+e_3	e_4-e_1
ε	e_3+e_ℓ	e_8-e_7	e_5+e_6	$\alpha_1+e_5-e_1$
$\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon$	e_1+e_3	e_8+e_6	$-2^{-1}[e_7-e_8+e_1-\sum_{i=2}^{6}e_i]$	$\sigma\alpha$ (76)
$\alpha+\gamma$	e_1-e_3	e_7-e_1	$2^{-1}[e_1+e_8+e_4-\sum_{i=2,3,5,6,7}e_i]$	e_1+e_3
$\alpha+\delta$	e_2-e_ℓ	e_7+e_8	$2^{-1}[e_1+e_8+e_2+e_3-\sum_{i=4,5,6,7}e_i]$	e_4+e_2
$\alpha+\varepsilon$	e_2+e_ℓ	e_8-e_6	$2^{-1}[e_1+e_8+e_5+e_6-\sum_{i=2,3,4,7}e_i]$	$\alpha_1+e_5+e_2$
$\sigma\alpha-\gamma$	e_2+e_3	e_8+e_1	$\alpha+\delta+\varepsilon$	$\alpha+\delta+\varepsilon$
$\sigma\alpha-\delta$	e_1+e_ℓ	e_8-e_1	$\alpha+\gamma+\varepsilon$	$\alpha+\gamma+\varepsilon$
$\sigma\alpha-\varepsilon$	e_1-e_ℓ	e_6+e_7	$\alpha+\gamma+\delta$	$\alpha+\gamma+\delta$
$\gamma+\delta$	$e_1-e+e_3-e_\ell$	$2e_6$	$-e_1+e_2+e_3+e_4$	$e_4+e_3-e_2-e_1$
$\gamma+\varepsilon$	$e_1-e_2+e_3+e_\ell$	$e_8+2e_6-e_1$	$-e_1+e_4+e_5+e_6$	(77) $\alpha_1-e_2+e_3+e_5$
$\delta+\varepsilon$	$2e_3$	$e_1+e_6+e_8-e_7$	$e_2+e_3+e_5+e_6$	(77) $\alpha_1-2e_1+e_4+e_5$

No. 16.

8次元実ユークリッド・ベクトル空間 W の正規直交基底 $(e_i)_{1\leqq i\leqq 8}$ をとる。E_8 型ルート系 R は、次式で与えられる：

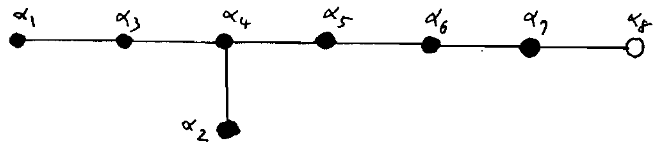
$$R = \{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leqq i < j \leqq 8) ;\quad 2^{-1}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)} e_i \quad (\sum_{i=1}^{8}\nu(i) \text{ は偶数}) \}.$$

R の基底は

$$B = \{ \alpha_1 = 2^{-1}\{(e_1+e_8) - (e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7)\},\ \alpha_2 = e_1+e_2,$$

$$\alpha_3 = e_2 - e_1,\ \alpha_4 = e_3 - e_2,\ \alpha_5 = e_4 - e_3,\ \alpha_6 = e_5 - e_4,\ \alpha_7 = e_6 - e_5,\ \alpha_8 = e_7 - e_6 \}.$$

No. 16 の佐武図形は



$$W^- = \{x \in W \mid \sigma x = -x\} = \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R}\alpha_i = \mathbb{R}\alpha_1 + \sum_{i=1}^{6} \mathbb{R}e_i = \mathbb{R}(e_7 - e_8) + \sum_{i=1}^{6} \mathbb{R}e_i,\quad W^+ = \mathbb{R}(e_7+e_8)$$

(70)
$$\sigma x = \begin{cases} -x, & x \in W^- \\ x, & x \in W^+ \end{cases}$$

で定義される $\sigma \in GL(W)$ は、$A(R)$ の元で R の対合である。

$x = e_7 - e_8 \in W^-$, $y = e_7 + e_8 \in W^+$ だから $e_7 = \frac{1}{2}(x+y)$, $\sigma e_7 = \frac{1}{2}(-x+y) = e_8$.

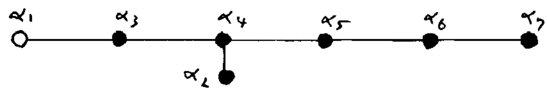
∴ (71) $\alpha = \alpha_8 = e_7 - e_6$ とすると、$\sigma\alpha = e_8 + e_6$ である。

No. 15

No. 16 の8次元空間 W において $V = \{x \in W \mid (x, e_7 + e_8) = 0\}$ とおく。V 内で E_7 型ルート系 R が次式で与えられる：

$$R = \{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leqq i < j \leqq 6) ;\quad \pm(e_7 - e_8),\ \pm 2^{-1}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} e_i) \}$$

ただし $\sum_{i=1}^{6} \nu(i) =$ 奇数とする。R の基底 B は、E_8 の基底から α_8 を除いたものである。No. 15 の佐武図形は次のようになる。



(72) $$V^- = \sum_{i=2}^{7} \mathbb{R}\alpha_i = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{R} e_i, \quad V^+ = \mathbb{R}(e_7 - e_8). \quad \sigma x = \begin{cases} -x, & x \in V^- \\ x, & x \in V^+. \end{cases}$$

$\alpha = \alpha_1$ が $B - B_0$ の唯一の元である。σ の定義から次式を得る.

(73) $$\sigma\alpha = 2^{-1}\{(e_8 - e_7) + (-e_1 + \sum_{i=2}^{6} e_i)\}$$

いま, $\gamma = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = e_4 - e_1$, $\delta = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_3 = e_2 + e_3$,

$\varepsilon = \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_2 = e_5 + e_6$ とすると.

(74) $$\alpha + \gamma + \delta + \varepsilon = -2^{-1}\{e_7 - e_8 + e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6\} = \sigma\alpha.$$

No. 14.

E_8 の 8 次元空間 W の 6 次元部分空間 $U = \{\sum_{i=1}^{8} \xi_i e_i \in W \mid \xi_i \in \mathbb{R},\ \xi_6 = \xi_7 = -\xi_8\}$

において, E_6型ルート系 R は, 次式で定義される.

$$R = \{\pm e_i \pm e_j \ (1 \leqq i < j \leqq 5),\ \pm 2^{-1}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)} e_i) \ (\textstyle\sum_{i=1}^{5} \nu(i) = \text{偶数})\}$$

基底 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ (E_8の基底から α_7, α_8 を除いたもの).

このとき, $U^- = \mathbb{R}\alpha_1 + \sum_{i=3}^{6} \mathbb{R}\alpha_i$, $U^+ = U^{-\perp}$ となる. いま

$$\beta = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8) \in R$$

とすると, $(\beta, \alpha_1) = 0$, $(\beta, \alpha_i) = 0$ $(3 \leqq i \leqq 6)$ だから, $U^+ = \mathbb{R}\beta$ である.

∴ (75) $\sigma x = \begin{cases} -x, & x \in U^- \\ x, & x \in U^+ \end{cases}$ とするとき, $\sigma = -s_\beta$ である.

そして, $\gamma = \alpha_4 = e_3 - e_2$, $\delta = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = e_4 - e_1$, $\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ $+ \alpha_6 = \alpha_1 + e_5 - e_1$ とするとき, 次の (76) が成立つ. $\alpha = \alpha_2 \in B - B_0$

(76) $$\sigma\alpha = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$
$$= \alpha + \gamma + \delta + \varepsilon.$$

(77) $\gamma + \varepsilon = \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$, $\delta + \varepsilon = \alpha_1 + 2(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_6 \notin R$.

∵) ブルバキ[ ] Planche V にあるように, 正のルート $\sum_{i=1}^{6} m_i \alpha_i$ にお

いて係数$m_i \geq 2$が存在するとき，必らず$m_2=1$である．$\delta+\varepsilon$，$\delta+\varepsilon$にたいしては$m_2=0$だから，この二つはルートでない．

以上により No. 11, 13, 14, 15, 16 の対合ルート系にたいしては，$B-B_0$の唯一つの元αにたいして，命題7, 2)の条件をみたす$\gamma, \delta, \varepsilon$が存在するから，$\bar{p}_\alpha p_{\sigma\alpha}=-1$となる。従って命題6の条件(c)がみたされないので，(R, σ)は正規拡大可能でない．∎

上の定理5により，制限階数が1の実単純リー環は分類された．残された問題は，制限階数が一般の場合の分類である．荒木は佐武のB_0-連結という概念を用いて，一般の場合を，制限階数1の場合に帰着させる方法を発見した．これは荒木の方法の中で特に巧妙な部分である．以下これを紹介しよう．

定義 17

(R, σ)を対合ルート系，$R_0=\{\alpha\in R \mid \sigma\alpha=-\alpha\}$とし，$B$をRの一つの$\sigma$-基底，$B_0=B\cap R_0$とする．$\alpha, \beta\in B$が$B_0$-連結とは，次の条件1) 2) 3)をみたすBの元の列

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$$

が存在することを言う：1) $\alpha_0=\alpha$，$\alpha_m=\beta$，2) $\alpha_i\in B_0$ $(1\leq i\leq m-1)$
3) $(\alpha_i, \alpha_{i+1})\neq 0$ $(0\leq i\leq m-1)$.

命題 8（佐武[32] Lemma 3）

対合ルート系(R, σ)のσ-基底を$B=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell\}$，$B_0=\{\alpha_j \mid \ell-\ell_0<j\leq\ell\}$とし，$\sigma$の標準分解を$\sigma=sp$，$(p\in A(B), s\in W)$とし，$p\alpha_i=\alpha_{i'}$とする．

命題1, 2) ホ) により

$$(78)\qquad \sigma\alpha_i = \alpha_{i'} + \sum_{j>l-l_0} c_{ij}\alpha_j,\ c_{ij}\in N \quad (1\leqq i\leqq l-l_0)$$

となる。$1\leqq i\leqq l-l_0$, $l-l_0<j\leqq l$ となる整数 i, j に対し、次の条件(a)と(b)は同値である：

(a) $c_{ij}\neq 0$, (b) α_j は α_i または $\alpha_{i'}$ と B_0-連結である。

証明 佐武[32] Lemma 3.

命題 9

対合ルート系 (R, σ) において、各 $\alpha_i\in B-B_0$ に対し、

$$(79)\qquad B_0(\alpha_i) = \{\alpha_j\in B_0 \mid \alpha_j \text{ は } \alpha_i \text{ または } \alpha_{i'} \text{ と } B_0\text{-連結}\},\ B(\alpha_i) = \{\alpha_i, \alpha_{i'}\}\cup B_0(\alpha_i)$$

$$(80)\qquad R(\alpha_i) = (B(\alpha_i))_R \cap R \qquad ((B(\alpha_i))_R \text{ は } B(\alpha_i) \text{ から } R \text{上 張られる実線型空間})$$

とおくとき、次の1) 2) 3)が成立つ：

1) $R(\alpha_i)$ はルート系である。

2) $\sigma_i = \sigma \mid R(\alpha_i)$ は、ルート系 $R(\alpha_i)$ の対合で、$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ は制限階数1で、$B(\alpha_i)$ はその σ-基底である。

3) $\sigma = \rho p$ を σ の標準分解(定義4)、$p_i = p\mid R(\alpha_i)$ とすれば $\mathcal{S}_i = (B(\alpha_i), B_0(\alpha_i), p_i)$ が、$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ の佐武図形である。

証明 1) $\alpha, \beta\in R(\alpha_i)$ のとき、R がルート系だから $n(\beta, \alpha) = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)\in \mathbb{Z}$, $2\alpha\notin R$ 従って $\notin R(\alpha_i)$ である。また $s_\alpha\beta = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha \in R\cap (B(\alpha_i))_R$ である。

2) 命題8により、$\sigma\alpha_i \in (B(\alpha_i))_R\cap R = R(\alpha_i)$ だから σ は $R(\alpha_i)$ を不変にする。$\sigma\in A(R)$ だから、$\sigma_i = \sigma\mid R(\alpha_i)\in A(R(\alpha_i))$ で、$\sigma^2 = I$ 故 $\sigma_i^2 = I$ で

ある。このとき $B(\alpha_i)$ はルート系 $R(\alpha_i)$ の基底である（ブルバキ[ ] 6章§1命題20）。任意の $\alpha \in R(\alpha_i)^+(B(\alpha_i)) - R(\alpha_i)_0$ に対し，

$$\alpha = m\alpha_i + n\alpha_{i'} + \sum_{\alpha_j \in B_0(\alpha_i)} m_j \alpha_j$$

とするとき，m または n の少くとも一方 >0 である。このとき

$$\sigma\alpha = m\alpha_{i'} + n\alpha_i + \sum_{\alpha_j \in B_0(\alpha_i)} [(m+n)c_{ij} - m_j]\alpha_j$$

となるが，m または $n > 0$ だから，$\sigma\alpha > 0$ となる。従って $B(\alpha_i)$ は $R(\alpha_i)$ の σ_i-基底である。$B_0(\alpha_i) \subset R(\alpha_i)_0$ だから，$B(\alpha_i) - B_0(\alpha_i) = \{\alpha_i, \alpha_{i'}\}$ である。$\alpha_i \neq \alpha_{i'}$ のときは，$p_i\alpha_i = p\alpha_i = \alpha_{i'}$ だから，$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ の制限階数は 1 である。3) 1) と 2) から明らか。∎

命題9系 $\alpha_j, \alpha_{j'} \in B(\alpha_i), j \neq j'$ のとき $p\alpha_j = \alpha_{j'} \Leftrightarrow p_i\alpha_j = \alpha_{j'}$。∵) $p\alpha_j = p_i\alpha_j$.

定理6（荒木[1] 定理3.6）

対合ルート系 (R, σ) に対し，次の条件 (a)(b)(c) は同値である。

(a) (R, σ) は正規拡大可能である。

(b) 各 $\alpha_i \in B - B_0$ に対し，$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ は正規拡大可能である。

(c) 各 $\alpha_i \in B - B_0$ に対し，$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ の佐武図形は，表4の No. 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18 のいずれか一つと同型である。

証明 (a)⇒(b) (a) を仮定すると命題6により，σ の正規拡大 φ で $\varphi^2 = I$ となるものが存在する。今各 $\alpha_i \in B - B_0$ に対し，

$$T_0^{\mathbb{C}}(\alpha_i) = \sum_{\alpha \in R(\alpha_i)} \mathbb{C}H_\alpha, \quad M(\alpha_i) = T_0^{\mathbb{C}}(\alpha_i) + \sum_{\alpha \in R(\alpha_i)} M_\alpha$$

とおく。$\varphi M_\alpha = M_{\sigma\alpha}$，$\varphi(H_\alpha) = H_{\sigma\alpha}$ だから，φ は $M(\alpha_i)$ を不変にする。このとき $\varphi_i = \varphi | M(\alpha_i)$ は σ_i の正規拡大で，$\varphi_i^2 = I$ である。

そこで $(R(\alpha_i), \sigma_i)$ は正規拡大可能である。

(b) ⇒ (a)　各 $\alpha_i \in B - B_0$ に対し，$(R(\alpha_i), \sigma_i)$ が正規拡大可能であるとすると，σ_i の $M(\alpha_i)$ への正規拡大 φ_i で $\varphi_i^2 = I$ となるものが存在する。このとき $\varphi_i X_\alpha = \rho_\alpha^i X_{\sigma\alpha}$ $(\forall \alpha \in R(\alpha_i))$ とすると命題6より

(81)　$$\bar{\rho}_\alpha^i \rho_{\sigma\alpha}^i = 1 \qquad (\alpha = \alpha_0, \alpha_\nu)$$

となる。いま σ の正規拡大を

(82)　$$\rho_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in B_0 \\ \rho_\alpha^i, & \alpha = \alpha_i \in B - B_0 \end{cases}$$

となるようにとると，$\bar{\rho}_\alpha \rho_{\sigma\alpha} = 1$ $(\forall \alpha \in B)$ であるから，命題6により (R, σ) は正規拡大可能である。

(b) ⟺ (c)　定理5．▮

さて以下で佐武図形により，複素単純リー環の実形の分類を実行するのであるが，その前に，佐武図形と対合ルート系が一対一に対応することを確めておく必要がある。佐武図形により対合ルート系が定まることは命題2で示したが，対合ルート系 (R, σ) を一つ定めたとき，その σ-基底 B のとり方によって一般には異なる佐武図形が生ずる。しかし (R, σ) が正規拡大可能のときは，佐武図形は (R, σ) により同型を除き一意的に定まる。

命題10

(R, σ) が正規拡大可能な対合ルート系であるとき，次の1)

2)が成立つ:

1) $W_\sigma = \{ w \in W \mid w\sigma = \sigma w \}$ は，R の σ-基底の全体 $\mathcal{B}_\sigma$ の上に単純推移的に作用する．

2) R の二つの σ-基底 B, B' に関する佐武図形 $\mathcal{S} = (B, B_0, p)$ と $\mathcal{S}' = (B', B_0', p')$ は同型(定義7)である．

証明 1) W_σ が $\mathcal{B}_\sigma$ に推移的に作用することは，佐武[32] Appendix 命題A．W が R の基底全体 $\mathcal{B}$ 上に単純推移的に作用するから，W_σ も $\mathcal{B}_\sigma$ に単純推移的に作用する．

2) 1)により $wB = B'$ となる $w \in W_\sigma$ が存在する．$\alpha \in R_0$ に対し $\sigma w \alpha = w \sigma \alpha = -w\alpha$ だから $w\alpha \in R_0$，$wR_0 = R_0$ である．従って

$$B_0' = B' \cap R_0 = wB \cap wR_0 = w(B \cap R_0) = wB_0$$

となる．また σ の B, B' に関する標準分解をそれぞれ，$\sigma = sp = s'p'$ とすると，$w \in W_\sigma$ は σ と可換だから，

$$s'p' = \sigma = w\sigma w^{-1} = wsw^{-1} \cdot wpw^{-1},$$

$$wsw^{-1} \in W, \quad wpw^{-1} \in A(wB) = A(B')$$

だから，標準分解の一意性から

$$s' = wsw^{-1}, \quad p' = wpw^{-1}$$

である。従って定義7の条件をみたすから，$\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$ である．∎

カルタンの章で述べたように，実単純リー環は，次の二つのカテゴリーのいずれかに属する．

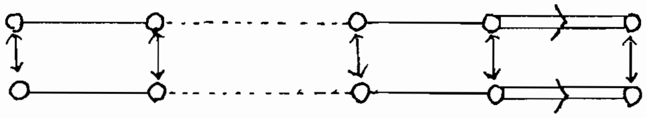
I. 任意の複素単純リー環 M を $\mathbb{R}$ 上のリー環 $M_{\mathbb{R}}$ と考えたもの．

II　任意の複素単純リー環Mの実形L（$L^{\mathbb{C}}=M$となる実リー環）

Iのクラスでは M と $M_{\mathbb{R}}$ は一対一に対応するから、複素単純リー環の分類に帰着するから既知としてよい。佐武図形の分類の立場では、このクラスの実単純リー環は、σ-既約が既約でない佐武図形と対応する。このとき既約成分は2個あり、互いに同型である。この場合 $R_0=\phi$ で $W_0=\{1\}$ であり、従って $\sigma=p\in A(B)$ である。具体的には、既約(連結)な互いに同型なディンキン図形を二つ並べ、対応する頂点を矢印↔で結んだものが、$M_{\mathbb{R}}$の佐武図形である(例2)。

例3

$M=o(2n+1,\mathbb{C})$ に対し、$M_{\mathbb{R}}$ の佐武図形は次のようになる。



従って以下IIのクラスの実単純リー環のみを考えれば十分である。Mの実形中にはコンパクト(キリング形式が負値定符号)であるものが存在し、それらすべて互いに Int M で共役である。従って複素単純リー環とコンパクト実単純リー環の同型類は一対一に対応する。従ってコンパクト実単純リー環の同型類も既知としてよい。コンパクト単純リー環のすべてのカルタン部分環は正規であり、その佐武図形は表3で与えられる。そこで以下では、複素単純リー環Mの非コンパクト実形を

同型を除いて分類すればよい。それはBが連結で$B\neq B_0$となるような佐武図形$S=(B, B_0, p)$で正規拡大可能なもの同型類の分類と同値である(定理4, 5, 6, 命題10)。この分類は定理5により、制限階数が1の場合には既に与えられているので、定理6によって、一般の制限階数の場合の分類を制限階数1の場合に帰着させる作業を実行することだけが残された問題である。この作業は定理7の証明で実行されるが、その際繰返し用いられる論法を、次の命題11, 12, 13で明示しておくのが便利である。

命題 11

B, B'がそれぞれ対合ルート系(R, σ), (R', σ')のσ-基底, σ'-基底であるとき、それらの佐武図形を、$S=(B, B_0, p)$, $S'=(B', B'_0, p')$とする。いま$(R, \sigma)\cong(R', \sigma')$ (定義6)であるとき、次の1) 2) 3)が成立つ。

1) S, S'の土台となるディンキン図形を$\mathcal{D}_S$, $\mathcal{D}_{S'}$とするとき、

$$\mathcal{D}_S \cong \mathcal{D}_{S'}.$$

2) $S_0=(B_0, B_0, p_0)$, $S'_0=(B'_0, B'_0, p'_0)$とすると $S_0\cong S'_0$.

3) $p\neq I \iff p'\neq I$.

証明 いま仮定により、ルート系の同型写像である全単写$\varphi: R\to R'$が存在して

(83) $$\varphi\circ\sigma=\sigma'\circ\varphi$$

をみたす。

1) φ がルート系の同型写像だから、$\mathcal{D}_S \cong \mathcal{D}_{S'}$ である。

2) (83)により、$\varphi(R_0) = R_0'$ であるから $\varphi_0 = \varphi|(R_0)_{\mathbb{R}}$ により

(84) $$(R_0, -I) \cong (R_0', -I)$$

となる。R_0 の任意の基底 B_0 は $(-I)$-基底で、それらの全体の上に $W(R_0)$ が推移的に作用する。従って $(R_0, -I)$ の佐武図形は、基底のとりかたによらずすべて互いに同型であり、(84)から、$S_0 \cong S_0'$ となる。

3) 2)から次の(85)が成立つ:

(85) $$p_0 \neq I \iff p_0' \neq I$$

そして 2)から $|B_0| = |B_0'|$, $|B - B_0| = |B' - B_0'|$ である。一方 $V = (R)_{\mathbb{R}}$ とし、$V^- = \{x \in V \mid \sigma x = -x\}$ とすると、命題2、(24)式から

(86) $$V^- = \sum_{\alpha_j \in B_0} \mathbb{R}\alpha_j + \sum_{\alpha_i \in B - B_0} \mathbb{R}(\alpha_{i'} - \alpha_i)$$

となり、$V' = (R')_{\mathbb{R}}$, V'^- についても同様の式が成立つ。そこで

(87) $$p|B - B_0 = I \iff p'|B' - B_0' = I$$

(88) $$p|B - B_0 \neq I \iff p'|B' - B_0 \neq I$$

が成立つ。(85)と(88)から、$p \neq I \iff p' \neq I$ である。∎

命題11系

命題11の記号の下に次の1) 2) 3)が成立つ:

1) $\mathcal{D}_S \not\cong \mathcal{D}_{S'} \Rightarrow (R, \sigma) \not\cong (R', \sigma')$.　　2) $S_0 \not\cong S_0' \Rightarrow (R, \sigma) \not\cong (R', \sigma')$.

3) $p = I \iff p' = I$.

証明　命題11の対偶。■

定義18

多重通り、$B=\{\alpha_i \mid 1\leq i\leq \ell\}$、$B_0=\{\alpha_j \mid \ell-\ell_0+1\leq j\leq \ell\}$、$p\alpha_i=\alpha_{i'}$ とする。各 $\alpha_i\in B-B_0$ に対し、$B(\alpha_i)$ を命題9の(79)式で定義する。このとき

(89) $$B^c(\alpha_i) = \bigcup_{j\neq i} B(\alpha_j),$$

とおく。そして佐武図形 $S_i=(B(\alpha_i), B_0(\alpha_i), p_i)$ に対して

(90) $$S_i^c = (B^c(\alpha_i),\ B^c(\alpha_i)\cap B_0,\ p_i^c),\quad p_i^c = p \mid (B^c(\alpha_i))_R .$$

とおく。

命題12.

次の(a)と(b)は同値である。

(a) 佐武図形 $S=(B, B_0, p)$ は正規拡大可能である。

(b) ある $i\in\{1,2,\cdots,\ell-\ell_0\}$ に対して、S_i と S_i^c は共に正規拡大可能である。

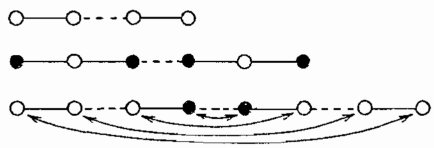
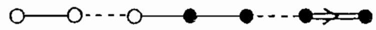
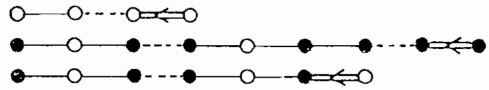
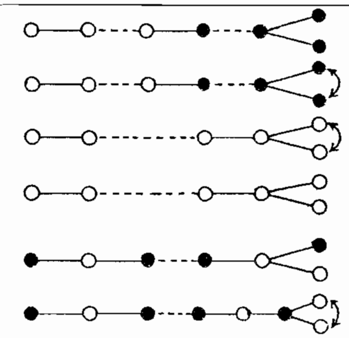
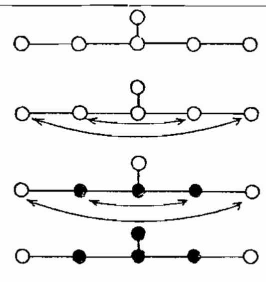
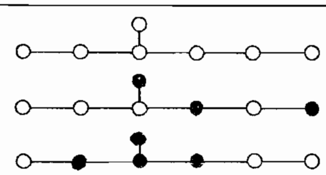
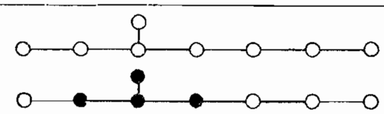
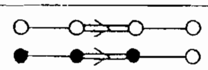
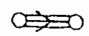
証明. (a)⇒(b). σ の L^c への正規拡大 φ で、$\varphi^2=I$ となるものが仮定(a)の下で存在する(命題6)。S_i および S_i^c に対応する L^c の部分リー環 $L^c(S_i)=\sum_{\alpha\in R(\alpha_i)}\mathbb{C}H_\alpha+\sum_{\alpha\in R(\alpha_i)}M_\alpha$ および同様に定義される $L^c(S_i^c)$ への φ の限定 φ_i, φ_i^c は、σ_i, σ_i^c の $L^c(S_i)$, $L^c(S_i^c)$ への正規拡大で $\varphi_i^2=I$, $\varphi_i^{c\,2}=I$ だから、S_i および S_i^c は共に正規拡大可能である(命題6)。

(b)⇒(a). S_i および S_i^c が共に正規拡大可能であるとすると

(91) $$\bar{\rho}_\alpha \rho_{\sigma\alpha}=1 \qquad (\forall\alpha\in(B(\alpha_i)-B_0(\alpha_i))\cup(B^c(\alpha_i)-B_0^c(\alpha_i)))$$

が成立つ。$B(\alpha_i)\cup B^c(\alpha_i)=B$, $B_0(\alpha_i)\cap B_0^c(\alpha_i)=B_0$ であるから、

表5　非コンパクト実形の佐武図形

Notation	ℓ	r 制限階数	Satake diagram
A_ℓ I	$\ell \geqq 1$	$\ell = r$	
A_{2n+1} II	$\ell = 2n+1 \geqq 3$	$r = n$	
A_ℓ III$_r$	$\ell \geqq 2$	$[\frac{\ell}{2}] \geqq r$	
B_ℓ I$_r$	$\ell \geqq 2$	$\ell \geqq r$	
C_ℓ I	$\ell \geqq 3$	$\ell = r$	
C_ℓ II$_r$	$\ell \geqq 3$	$[\frac{\ell}{2}] \geqq r$	
	$\ell \geqq 4$	$\ell = 2r$	
D_ℓ I$_r$	$\ell \geqq 4$	$\ell - r = 2m \geqq 2$	
	$\ell \geqq 5$	$\ell - r = 2m+1 \geqq 3$	
	$\ell \geqq 4$	$\ell - r = 1$	
	$\ell \geqq 4$	$\ell - r = 0$	
D_{2n} III	$\ell = 2n \geqq 6$	$r = n$	
D_{2n+1} III	$\ell = 2n+1 \geqq 5$	$r = n$	
E I	6	6	
E II	6	4	
E III	6	2	
E IV	6	2	
E V	7	7	
E VI	7	4	
E VII	7	3	
E VIII	8	8	
E IX	8	4	
F I	4	4	
F II	4	1	
G I	2	2	

(12) $$\overline{p_\alpha}\rho_{\sigma\alpha} = 1 \qquad (\forall\alpha \in B - B_0)$$

が成立つことになる。従って命題6によりSは正規拡大可能である。∎

命題 13

前と同じく $S_i = (B(\alpha_i), B_0(\alpha_i), p_i)$, $p_i = p\,|\,(B(\alpha_i))_R$ とする。このとき次の(a)と(b)は同値である。ただし $B \neq B_0$ とする。

(a) $p \neq I$ (b) ある $i \in \{1,2,\cdots,l-l_0\}$ に対して $p_i \neq I$.

証明 (b)⇒(a) p_i の定義から、$p = I \Rightarrow (\forall i)(p_i = I)$ である。従って対偶をとると $(\exists i)(p_i \neq I) \Rightarrow p \neq I$ である。

(a)⇒(b). (a)であるとすると、$p\alpha_i = \alpha_{i'}$ となる $\alpha_i, \alpha_{i'}$ $(i \neq i')$ がある。このとき $\alpha_i \in S_j$ となる $j \in \{1,2,\cdots,l-l_0\}$ があるので、$p_j\alpha_i = \alpha_{i'}$ となり、$p_j \neq I$ である。∎

定理 7.(荒木[1]§5)

複素単純リー環Mの非コンパクト実形Lの正規カルタン部分環から作られる対合ルート系(R, σ)の佐武図形Sは、表5で与えられるものでつくされる。表5の佐武図形の同型類は、複素単純リー環の非コンパクト実形の同型類と一対一に対応する。

証明. 前半の証明は、Sの土台となるディンキン図形 D_S 毎にまとめて行う。

A_l型 $(l \geq 1)$

各 $\alpha_i \in B-B_0$ に対し，$B(\alpha_i)$ のディンキン図形は，分岐点，二重線・三重線を持たないから，A型である．従って $(\mathfrak{k}(\alpha_i), \sigma_i)$ の佐武図形 S_i は表4の No. 1, 2, 4, 5 のいずれかである．いま S のディンキン図形 $\mathfrak{D}_S$ の端の頂点 α_1 をとる。このとき次の (a) (b) のどちらかである．

(93) (a) $\alpha_1 \in B_0$, (b) $\alpha_1 \in B - B_0$

(a) のとき．

表4の No. 1, 2, 4, 5 の内 $\alpha_1 \in B_0$ となるのは No. 4 だけである．このとき $\alpha_1 \in B(\alpha_2)$ で，$S_2 = A_3 \mathrm{II}$ である．もしも $l \geq 4$ ならば，$\alpha_4 \in B - B_0$ である．なぜならば $\alpha_4 \in B_0$ ならば，$B(\alpha_2) \ni \alpha_4$ となり $S_2 = A_3 \mathrm{II}$ であることに反するからである．このとき $S_4 = A_3 \mathrm{II}$ となる．これを繰返すと，(a) のとき $S = A_l \mathrm{II}$ であることがわかる．

(b) のとき．

このとき S_1 は次の三つの内のいずれかである：

(イ) No. 1 $= A_1 \times A_1$, (ロ) No. 2 $= A_1 \mathrm{I}$, (ハ) No. 5 $= A_l \mathrm{III}_1$.

(イ) のとき．

$l = 2$ とすると，$\mathfrak{D}_S$ は連結でないから，$L^* \neq$ 単純となり，定理7で考えている範囲に入らない．従って $l > 2$ でなければならない．このとき $\alpha_2 \in B - B_0$ である．もし $\alpha_2 \in B_0$ とすると $\alpha_2 \in B(\alpha_1)$ となり S_1 は黒丸の頂点 α_2 を含むことになり $S_1 =$ No. 1 という仮定に反する．今 $p_1 \neq I$ だから命題13により $p \neq I$ である．いま $\alpha_i \in B - B_0$ $(1 \leq i \leq r)$，$\alpha_{r+1} \in B_0$ とすれば，$p\alpha_i = \alpha_{l-i+1}$ $(1 \leq i \leq r)$，$\alpha_{l-r} \in B_0$

となり, $S = A_l \mathrm{III}_r$ である.

(ロ) のとき.

$l > 1$ ならば $\alpha_2 \in B - B_0$ である. ∵) $\alpha_2 \in B_0$ なら $\alpha_2 \in B(\alpha_1) \cap B_0 = B_0(\alpha_1) = \phi$ となり矛盾. 今 $p_1 = I$ だから, A型のディンキン図形の対称変換の形から $p = I$ である. 従って $\forall \alpha_i \in B - B_0$ いずれ, S_i は表4の No.2 または No.4 である. 今 $\alpha_1, \alpha_2 \in B - B_0$ だから, $S_2 = $ No.2 でなければならない. 同じ理由で $\forall i$ いずれ $S_i = $ No.2 で, $S = A_l \mathrm{I}$ となる.

(ハ) のとき.

このとき $p \neq I$ だから $p\alpha_1 = \alpha_l \in B - B_0$ であり, $\alpha_i \in B_0$ $(2 \leqq i \leqq l-1)$ である。従って α_i $(2 \leqq i \leqq l-1)$ はすべて α_1 に B_0-連結であり, $B(\alpha_1)$ に含まれる. 従って $S = S_1 = A_l \mathrm{III}_1$ である.

以上で $\mathcal{D}_S = A$ 型のとき, 正規拡大可能な佐武図形は, 表5の $A_l \mathrm{I}$, $A_{2n+1} \mathrm{II}$, $A_l \mathrm{III}_r$ のいずれかであることが証明された. また逆にこの三種の佐武図形は正規拡大可能であることは, 定理6により保証される.

B_l 型 $(l \geqq 2)$

B型のディンキン図形 $\mathcal{D}$ の, 既約(=連結)な部分ディンキン図形 $\mathcal{D}'$ は, (a) $\mathcal{D}$ の二重線の部分を含めば B型であり, (b) 含まなければ A型である.

$\bigcup_{i \leqq l-l_0} B(\alpha_i) = B$ だから, ある $i \in \{1, 2, \cdots, l-l_0\}$ に対して $\mathcal{D}_{S_i}$ が B型となる. 表4で B型で正規拡大可能となるものは唯一つ (No.6) で

ある．従って S_i の階数を m とすれば，$S_i = B_m I_1$ となる。このとき $\mathcal{D}_{B(\alpha_i)}$ の左端の頂点 $\alpha_{\ell-m+1} \in B - B_0$ である。$\ell = m$ ならば $S = S_i = B_\ell I_1$ である。$\ell > m$ ならば $\alpha_{\ell-m} \in B - B_0$ である。($\alpha_{\ell-m} \in B_0$ なら $\alpha_{\ell-m} \in B(\alpha_{\ell-m+1})$ となり $S_j = B_m I_1$ であることに反する)．このとき $S_{\ell-m}$ は A 型で矢印がなくかつ端に黒丸がないから，表4の No. 2 でなければならぬ．$\ell - m > 1$ ならば $\alpha_{\ell-m-1} \in B - B_0$ で，同じ理由で $S_{\ell-m-1} = \text{No. } 2$ となる。これを繰返して，このとき $S = B_\ell I_{\ell-m}$ となる．これは定理6により正規拡大可能である．

C_ℓ 型 $(\ell \geqq 3)$

このとき S_i は A 型または C 型である。C 型の時は $A(R) = W(R)$ で $p = I$ だから，$p_i = I$ である (命題13)．従って次の (94) が成立つ：

(94) $S_i = \text{No. } 2,\ \text{No. } 4,\ \text{No. } 9$

$\mathcal{D}_S$ の左端の頂点 α_1 は，(a) $\alpha_1 \in B - B_0$，(b) $\alpha_1 \in B_0$ のどちらかをみたす．

(a) のとき．

No. 4，No. 9 では端点はすべて黒丸だから，$S_1 = \text{No. } 2$ である。従って $\alpha_2 \in B - B_0$ で同じ理由で $S_2 = \text{No. } 2$ である。これを続けてこの場合には，$S = C_\ell I$ となる．

(b) のとき．

端点 α_1 が黒丸だから，$\alpha_1 \in B_0(\alpha_i)$ となる $\alpha_i \in B - B_0$ がある．そして

(95) (イ) $S_i = \text{No. } 9$，(ロ) $S_i = \text{No. } 4$

のどちらかが成立つ．どちらの場合でも $\alpha_1 \in B_0(\alpha_2)$ である．

(イ)の場合には，$\mathcal{D}_{S_2}$ は端点 α_1 と他の端点 α_ℓ (二重線の端点) を共に含む連結集合だから，$\mathcal{D}_{S_2} = \mathcal{D}_S$，$S = S_2 = C_\ell \mathrm{II}_1$ である．

(ロ)の場合には，$\alpha_4 \in B - B_0$ である。S_4 について上と同じ議論をすると，$S_4 = No.9$ のとき，$S = C_\ell \mathrm{II}_2$ である．$S_4 = No.4$ のときは S_6 について同じ事を繰返す．r 回の後に No.9 が現われるとき，$S = C_\ell \mathrm{II}_r$ である．最後まで No.9 が現われない場合は $\ell = 2r$ で，$S = C_{2r} \mathrm{II}_r$ となる。こうして C 型の場合は CI と CII の二つのタイプが現われる．どちらも定理6により正規拡大可能である．

$D_\ell \quad (\ell \geqq 4)$

各 S_i は A 型または D 型である。表4で正規拡大可能な R 型の佐武図形で矢印を持つのは No.10 のみで，このとき矢印は α_ℓ と $\alpha_{\ell-1}$ を結ぶものだけである．いま $\ell \geqq 4$ としている ($D_3 = A_3$，$D_2 = B_2$ だから) から，No.5 では矢印が二つ以上ある。従って S_i として No.5 が現われることはない．従って次の (96) が成立つ：

(96) $\quad {}^\forall S_i = No.1, 2, 4, 10, 12$ のいずれか．

(a) $\alpha_1 \in B - B_0$，$\quad$ (b) $\alpha_1 \in B_0$

のどちらかである．

(a) のとき．

No.4 は端が黒丸だから，この場合

(イ) $S_1 = No.2$，$\quad$ (ロ) $S_1 = No.10$ または 12，$\quad$ (ハ) $S_1 = No.1$

の三つの場合がある.

(a)のとき. $\alpha_2 \in B-B_0$ であり. S_2 についても上と同じ三つの可能性がある. どこかで No.10 または 12 の形の S_i が現われると終りになる (No.10, 12 は D 型の特徴である最後の部分を含んでいる). そこで場合分けして見ると次の 1. 2. 3. 4. の四つの場合がある.

1. $S_i =$ No. 2 $(1 \leqq i \leqq r-1)$, $S_r =$ No. 10

   このとき $S = D_l I_r$, $l-r = 2m \geqq 2$ である.

2. $S_i =$ No 2 $(1 \leqq i \leqq r-1)$, $S_r =$ No. 12.

   このとき. $S = D_l I_r$. $l-r = 2m+1 \geqq 3$ である.

3. $S_i =$ No. 2 $(1 \leqq i \leqq l-2)$, $S_{l-1} = S_l =$ No. 1

   このとき, $S = D_l I_{l-1}$, $l-r = 1$ である.

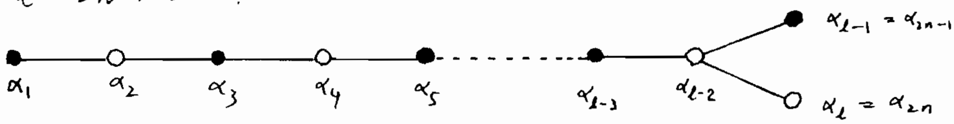
4. $S_i =$ No. 2 $(1 \leqq i \leqq l)$.

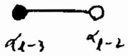
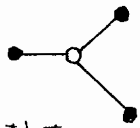
   このとき. $S = D_l I_l$ (正規実形) である.

(b)のとき

$\alpha_1 \in B_0$ だからあるiにつれ $\alpha_1 \in B(q_i)$ となる. S_i は (96) の五個の系の内で端点 α_1 が黒丸のものだから, $S_i =$ No. 4 で $i=2$, $\alpha_1 \in B(\alpha_2)$ である. このとき $\alpha_4 \in B-B_0$ で, $S_4 =$ No. 4 となることも同様にしてわかる. これを繰返すと. $\mathcal{D}_S$ は l の偶奇に従って最後の1個または2個の頂点を除き, No. 4 $= A_3 \mathrm{II}$ 型の図形が並んでいることがわかる.

(α) $\ell = 2n$ のとき.



このとき $\alpha_{\ell-3} \in B_0$, $\alpha_{\ell-2} \in B - B_0$ である. もし $\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \in B - B_0$ ならば,  が $S_{\ell-2}$ となる. しかしこれは表4 No.3 で正規拡大可能でない図形である. 従って $\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell$ の少なくとも一方は黒丸である. $\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell \in B_0$ ならば $S_{\ell-2} =$  となる. これは表4の No.11 で $\ell=4$ の場合であり正規拡大可能である. 従って $\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell$ の内一方は白丸, 他方は黒丸である. そしてどちらが白丸でも同型の図形になる. 従ってこのとき, $S = D_{2n}$ III である.

(β) $\ell = 2n+1$ のとき.

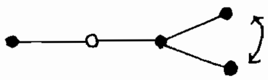
このとき $S_{2i} =$ No. 4 $(1 \leqq i \leqq n-1)$ である. このとき

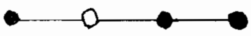
(i) $\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} \in B_0$, (ii) $\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}$ の内の一方のみ $\in B_0$

(iii) $\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} \in B - B_0$

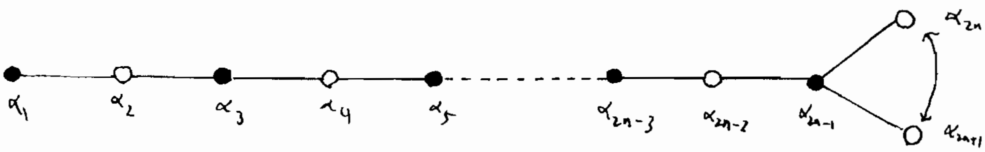
の三つの可能性がある.

(i)(ii) のときは, S_{2n-1} は正規拡大可能であり,

(i) $S_{2n-1} =$  表4 No.13

(ii) $S_{2n-1} =$  表4にない.

従ってこの場合可能なのは (iii) の場合だけである. (iii) のとき

$S =$ 

となり，$S=D_{2n+1}\mathrm{III}$である．

以上のDI，DIIIが正規拡大可能であることは定理6からわかる．

E_6

E_6型ディンキン図形$\mathcal{D}$の部分ディンキン図形$\mathcal{D}_1$ $(\neq\mathcal{D})$は，

(97) $\mathcal{D}_1=A_l$ $(1\leqq l\leqq 5)$ または D_m $(4\leqq m\leqq 5)$

である．$\forall\alpha_i\in B-B_0$に対し

(98) $S_i=$ 表4の No. 1, 2, 4, 5, 10, 12 のいずれか

がある．$\mathcal{D}$の端のルートα_1は，次の(a) (b)のいずれかである．

(a) $\alpha_1\in B-B_0$，　(b) $\alpha_1\in B_0$．

(a)のとき．

表4のNo. 4は$\alpha_1\in B_0$だから，この場合にはSとなり得ない．

このときS_1となり得るのは次の四つの場合である：

(イ) $S_1=$ No. 2　(ロ) $S_1=$ No. 1，(ハ) $S_1=$ No. 5，(ニ) $S_1=$ No. 10 or 12．

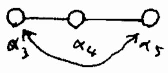
(イ)のとき．

α_1の隣りの$\alpha_3\in B-B_0$でなければならない．No. 2には矢印がないから，Sにも矢印がない（命題13）従って$B(\alpha_1)=\{\alpha_1\}$である。従って$B^c(\alpha_1)=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$で，そのディンキン図形は$D_5$型である．今$\alpha_3$が白丸だから，矢印がないことと合わせて，既述のD型のSの分類と比較すると，$S^c(\alpha_1)=D_5\mathrm{I}_5$でなければならない．従ってこのときSは表5のEI（E_6の正規実形）である．

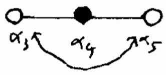
(ロ)のとき

このとき $p\alpha_1=\alpha_6$, $p\alpha_3=\alpha_5$ であるから $\alpha_6\in B-B_0$, $\alpha_6\in B(\alpha_1)$ である。$S_1=$ No.1 だから、α_1,α_6 の隣りの $\alpha_3,\alpha_5\in B-B_0$ である。いま $p\neq I$ だから、S_3 としては次の三つの可能性がある。

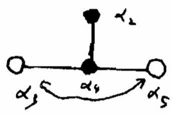
(α) $S_3=$ No.1



(β) $S_3=$ No.5



(γ)



(α)のとき $\alpha_4\in B-B_0$ で、$p_4=I$, $\alpha_3,\alpha_5\in B-B_0$ だから、$\alpha_2\in B-B_0$ でなければならぬ。($\overset{\alpha_4}{\circ}$—$\overset{\alpha_2}{\bullet}$ は正規拡大可能でない)。従ってこのとき、

$S=E\,\mathrm{II}$ となる。

(β)のとき、$\alpha_2\in B-B_0$ となるがこのとき $S_2=$ ○—● (表4のNo.3) となり正規拡大可能でない。

(γ) このとき S_3 は土台が D_4 型であるが、表4にない。従ってこの場合は実形に対応しない。従って(ロ)のとき可能なのはEIIだけで、これは定理6から正規拡大可能である。

(ハ)のとき。

このとき S_1 の制限階数が1で No.5 の形から、$\alpha_3,\alpha_5\in B_0$ であり、かつ $\alpha_4\in B_0$ でもある。そして $\alpha_2\in B-B_0$ だから $S=E\,\mathrm{III}$ である。このとき $S_1=$ No.5, $S_2=D_4\mathrm{I}_1$ は正規拡大可能だから、定理6によりEIIIも正規拡大可能である。

(ニ)のとき。

このとき $\mathfrak{D}_{S_1}$ はD型だから $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\in B_0$, $\alpha_6\in B-B_0$ でなければ

ならない。このとき $S_1 = D_5 I_1$ で矢印はない。S_6 も同じ。従ってこのとき，$S = EIV$（表5）である。$S_1 = S_6 =$ No.12 は正規拡大可能だから，EIV も正規拡大可能である（定理6）。

以上で E_6 の非コンパクト実形は，EI, EII, EIII, EIV の四つに限ることが示された。

E_7

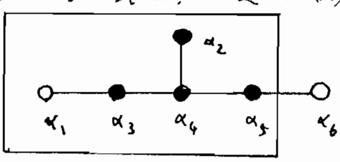
E_7 のディンキン図形 $\mathfrak{D}$ の部分ディンキン図形 $\mathfrak{D}_1$ $(\neq \mathfrak{D})$ は，

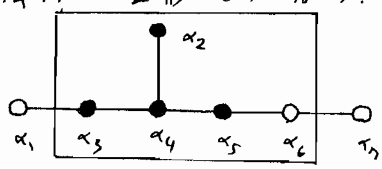
(99) $\mathfrak{D}_1 = A_n$ $(1 \leqq n \leqq 6)$, D_n $(4 \leqq n \leqq 6)$, E_6 のいずれかである。

E_7 に対しては $A(E_7) = W(E_7)$ だから佐武図形に矢印はない。従って各 S_i においても $\rho_i = I$ である。表4の No.10 には矢印があるから，E_7 の S_i としては No.10 は現われない。従ってこのとき

(100) $S_i =$ 表4の No.2, 4, 12 のいずれかである。

今 S_i として No.12 の図形が現われる場合を考えよう。このとき S_i の土台のディンキン図形は D_5 である。D 型のディンキン図形の特徴は，分岐点とそこから出る二本の長さ1の稜である。E_7 の分岐点は α_4 のみである。従ってそこから出る二本の長さ1の稜の他の端点は，α_2, α_3 であるか α_2, α_5 である。そこで $S_i =$ No.12 となる S_i は，次の(A)，(B)図の枠内の図形しかない：

(A) 

(B) 

(A)(B)どちらでも α_6 は白丸である。従って次の(101)が成立つ：

(101)　土台がE_7の佐武図形のS_iとして表4のNo.12が含まれるとき，$\alpha_6 \in B - B_0$である。

いまこのとき，α_7に対し次の二つの場合がある．

(a)　$\alpha_7 \in B_0$，　　(b)　$\alpha_7 \in B - B_0$．

(a)のとき．

このとき$\alpha_7 \in B(\alpha_i)$となる$\alpha_i \in B - B_0$がある．このときS_iは黒丸α_7を含むから表4のNo.2ではない．従って(100)からこの場合

(イ)　$S_i = No. 12$，　　(ロ)　$S_i = No. 4$

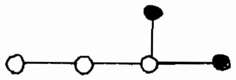
の二つの可能性しかない。

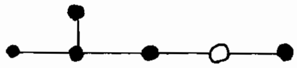
(イ)の場合(101)から$\alpha_6 \in B - B_0$だから，$\alpha_7 \in B(\alpha_6)$で$i=6$である．上の(B)の場合は$\alpha_7 \in B - B_0$だから，このときS_6は(A)の場合である．この場合S_6は表4のNo.11で正規拡大可能でない．

(ロ)の場合

このとき$\alpha_6 \in B - B_0$で$\alpha_7 \in B(\alpha_6)$である．表4により制限階数が1のE_7型正規拡大可能な佐武図形は存在しない．従って$\alpha_i \neq \alpha_6$で$\alpha_i \in B - B_0$となるものが存在する．従ってこのとき$B^c(\alpha_6) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$であり，$S_6^c$の土台は$D_5$である。そこで既に分類のできている$D_5$型の正規拡大可能な佐武図形の表(表5)を用いて$S_6^c$として可能なものを定めることができる．$S_6^c$に矢印がないから，表5の$D_5$Ⅲ，$D_5I_4$，$D_5I_2$は$S_6^c$となり得ない．また$S_6^c$は黒丸の頂点$\alpha_5$を含むから，$D_5I_5$でもない。従って

(102) $S_6^c = D_5 I_r$ で，(α) $r=3$，(β) $r=1$ の二つのみが可能．
が成立つ．

(α)のとき，$S_6^c =$  で，$S = $ EVI (表5)である．

(β)のとき，$S_6^c =$  で，これは表4の No. 11 で正規拡大可能ではない．

EVI では，$S_1 = S_3 =$ No. 2，$S_4 = S_6 =$ No. 4 であるから正規拡大可能である．

(b)のとき．

S_7^cの上台のディンキー図形はE_6である．そしてE_7に矢印がないからS_7^cにも矢印はない．従って表5のE_6の部分から

(103) $S_7^c =$ EI または EIV である．

従って自身1個のS_7を合わせて，(b)の場合のSは

(104) $S =$ EV または EVII である．

EV はE_7の正規実形である．また EVII では，$S_1 = S_6 =$ No. 12 (表4)，$S_7 =$ No. 2 であるから正規拡大可能である．

以上によりE_7の非コンパクト実形は，EV, EVI, EVII の三種である．

E_8.

E_8には矢印がなく，二重線，三重線がない．従ってE_7のときと同様にして，次の(104)が成立つ:

(104) $S_i =$ 表4の No. 2, 4, 12 のいずれかである．

(a) $\alpha_8 \in B - B_0$，　(b) $\alpha_8 \in B_0$

の二つの場合に分けて考える。

(a) のとき。

S_8は端点α_8が白丸だからNo.4ではない。従って

(イ) $S_8 =$ No.2 または (ロ) $S_8 =$ No.12

のどちらかである。

(イ)のとき、S_8^cはE_7型で、$\alpha_7 \in B - B_0$だから、既述のE_7型の分類(表5)により、$S_8^c \neq$ EVI である。従って

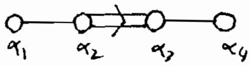
(105) $S_8^c =$ EV または EVII である。

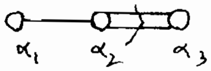
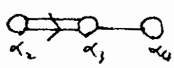
この二つの場合に応じて、

(106) $S =$ EVIII または EIX である。

EVIIIはE_8の正規実形である。またEIXでは、$S_1 = S_6 =$ No.12, $S_7 = S_8 =$ No.2 であるから正規拡大可能である。

F_4

F_4のディンキン図形は、$\mathcal{D} =$  であるから、$\mathcal{D}$の連結な部分ディンキン図形で、階数3のものは、

(A)  B_3 (B)  C_3

の二つしかない。(A)はB_3型、(B)はC_3型である。

F_4の佐武図形Sは分岐点を含まず、矢印⌒を持たない。従ってSから作られる制限階数1の部分佐武図形S_iは、表4の正規拡大可能な9個の図形No.1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18の内のNo.1, 5, 10, 12では有得ない。従って考えるべきものは

(107)　　S_iは表4のNo. 2, 4, 6, 9, 18

だけがある．りま

(a)　$\alpha_4 \in B - B_0$，　(b)　$\alpha_4 \in B_0$

の二つの場合に分けて考える．

(a)のとき，No.4およびNo.9では，両端点が共に黒丸だからS_4になり得ない．従って(107)の5個の系の内残る三つ：

(108)　(イ)　$S_4 = $ No.18，　(ロ)　$S_4 = $ No.6，　(ハ)　$S_4 = $ No.2

を考えればよい．

(イ)のときは，$S_4 = S$であり，Sは表5のFII＝表4のNo.18であり正規拡大可能である．

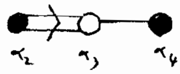
(ロ)　No.6はB型だから$\alpha_2, \alpha_3 \in B_0(\alpha_4)$，$\alpha_1 \in B - B_0$となる。従って$S_4 = B_3$となるが上の(A)で示したように，$\mathcal{S}$の部分図形で$B_3$型となるものは(A)のみで$\alpha_4$を含まないから，この場合は起り得ない．

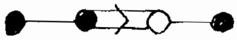
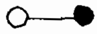
(ハ)　$S_4 = $ No.2だから，このとき$\alpha_3 \in B - B_0$である．このとき$S_4^c = S - \{\alpha_4\}$はB_3型で，短いルート$\alpha_3 \in B - B_0$だから，表5の$B_3 I_r$の$r = 3$の場合である．従ってこのときSの頂点はすべて白丸で，$S = $ FIである。これはF_4の正規実形である．

(b)のとき．

$\alpha_4 \in B_0$だから，$\alpha_4 \in B(\alpha_i)$となる$i \in \{1, 2, 3\}$がある．S_iは端点α_4が黒丸だから，表4のNo.2，No.18ではない．また表4のNo.4

は階数3であって二重積を含まないから、F_4のS_iとは成り得ない。また表4のNo.6がS_iだとすると、S_iはB型でα_4を含むから、$\mathrm{rank}\, S_i \geq 3$となる。従って$S_i$は(A)の形になるから$\alpha_4$を含まず矛盾が生ずる。従って$S_i$ = No.6となることはない。

S_i = No.9の場合はC型だから、$\alpha_2, \alpha_3 \in B(\alpha_i)$であり、$\alpha_1 \notin B(\alpha_i)$である。そこで$S_i$は$C_3$型のNo.9だから、$S_i = S_3 =$ 

となる。このとき$\alpha_1 \in B_0$とすると$\alpha_1 \in S_3$, $S_3 = S$となるが、このSは $S =$  となるが、これは表4に含まれないから起り得ない。そこで$\alpha_1 \in B - B_0$となるがこのとき $S_1 =$  すなわち表4のNo.3となり正規拡大可能でない。

以上でF_4の非コンパクト実形は、表5のFIとFIIの二つに限ることが証明された。

G_2

非コンパクト実形に対応する佐武図形Sでは、$B \neq B_0$である。従ってG_2の基底$B=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $(\|\alpha_1\| > \|\alpha_2\|)$に対し、可能なのは

(a) $\alpha_1, \alpha_2 \in B-B_0$ (b) $\alpha_1 \in B-B_0, \alpha_2 \in B_0$, (c) $\alpha_1 \in B_0, \alpha_2 \in B-B_0$

の三つの場合のみである。(a)は表5のGIであり、G_2の正規実形に対応する。(b)(c)の場合は制限階数1の一般佐武図形であるが、表4に含まれていないので、正規拡大可能ではない。

従ってG_2の非コンパクト実形は、GIだけである。

後半の証明をしよう。複素単純リー環の実形Lの同型類の集

合を$\mathcal{L}$とし, Lの正規カルタン部分環をC, (L^c, C^c)のルート系をR, Lに関する複素共役写像が引起すRの対合をσとし, (R,σ)の同型類の集合を$\mathcal{R}$とする. Lの同型類(L)に, (R,σ)の同型類$((R,\sigma))$を対応させる写像fは, 定理4により, $\mathcal{L}$から$\mathcal{R}$への全単写$\mathfrak{F}$を引起す. $\mathcal{R}$は正規拡大可能な対合ルート系の同型類$\mathcal{R}'$と同一視できる. またコンパクト実形に対する対合ルート系は, $\sigma=-I$となり, 逆も成立つ. 従って複素単純リー環の非コンパクト実形の同型類の集合$\mathcal{L}_0$から, $\sigma\neq -I$となる正規拡大可能な対合ルート系の同型類の集合$\mathcal{R}_0$への全単写$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}|\mathcal{L}_0$が存在する。

次に命題10により, 正規拡大可能な対合ルート系(R,σ)に対し, その佐武図形Sが同型を除いて定まる。そこで写像$\varphi: ((R,\sigma)) \mapsto (S)$は, $\mathcal{R}_0$から正規拡大可能な佐武図形の同型類$\mathcal{S}_0$への全写である. また一方(R,σ)と(R',σ')の佐武図形をS, S'とするとき, $S \cong S'$ならば命題2により$(R,\sigma)\cong(R',\sigma')$であるから, φは単写である. そこでφは$\mathcal{R}_0$から$\mathcal{S}_0$への全単写である。従って$\varphi\circ\mathfrak{F}_0$は$\mathcal{L}_0$から$\mathcal{S}_0$への全単写である.

これで定理7は, すべて証明された. ∎

荒木の方法は, 実形Lに関する複素共役写像をルート系に対する作用によってとらえたものである. この点でカルタン[5]の共役写像による分類を現代化し可視化したものといえる.

5　カッツ

V.G.カッツは[22]において，複素単純リー環$\mathfrak{g}$の有限位数の自己同型写像σを定める方法を与えた．このような自己同型写像は，$\mathfrak{g}$のあるコンパクト実形$\mathfrak{u}$を不変にする(lemma 2)．従って特にσの位数が2のときを考えれば，$\mathfrak{u}$の位数2の自己同型が定められることになり，ガントマッヘル[17]および村上[29]と同じく，$\mathfrak{g}$の非コンパクト実形が分類される．

この分類を実行するのに，カッツはリー環の次数付けと，複覆リー環という考えを利用した．後者はアフィン型のカッツ・ムーディ・リー環(以下アフィン・リー環という)で，その分類は知られていた．アフィン・リー環は，数学・物理学のいくつかの分野に登場することがわかり，現在盛んに研究されている．このように新しい分野との関連を発見したことはカッツの功績である．オッツは実形のトーラス部分が極大となるカルタン部分環(の複素化)を取ってその上のルートを考えている点で，ガントマッヘル，村上と同じであり，村上の方法と平行した部分を持つ．しかしカッツは，$\mathfrak{g}$のディンキン図形の自己同型から引起される$\mathfrak{g}$の自己同型νの定める$\mathfrak{g}$の複覆リー環$L(\mathfrak{g},\nu)$上で考えることにより，分類を統一的に実行することに成功したのであった．勿論村上の方法をより好む人も有り得る．

カッツ[22]では、結果と考え方が簡潔に記されているだけであるが、カッツ[23]、ヘルガソン[20]に証明付きの説明がある。ここでは[20]に従ってこの方法を紹介しよう。ただし[20]の証明をそのまま写しても意味がないので、[20]の定義と命題を記し、前者の証明は大体省略し、具体的な分類の手順を説明することにした。

A　有限位数自己同型の分類

定義1. $\mathbb{C}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ に対し、ある加法アーベル群 A の各元 i に対し、A の部分空間 $\mathfrak{g}_i$ が対応して、

(1) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{g}_i, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$$

をみたすとき、$\mathfrak{g}$ は A を次数群とする次数付け (gradation) を持つという。

例1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が、$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ をみたすとき、これは位数2の巡回群 $\mathbb{Z}_2$ を次数群とする次数付けを与える。——

$\mathfrak{g}$ が(1)をみたすとき、$\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である。また $X \in \mathfrak{g}_0$, $Y \in \mathfrak{g}_i$ に対し $\rho_i(X)Y = [X, Y]$ とおくとき、$(\rho_i, \mathfrak{g}_i)$ は $\mathfrak{g}_0$ の $\mathfrak{g}_i$ 上における表現である。

以下 $\mathfrak{g}$ を有限次元の複素単純リー環とし、σ を $\mathfrak{g}$ の自己同型写像で位数が $m \in \mathbb{N}$ であるとする。σ の固有値は1の m 乗根の全体である。σ は $\mathfrak{g}$ 上の対角型一次変換である。いま ε を1の原始 m 乗根とし、各 $i \in \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に対し

(2) $$\mathfrak{g}_i = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma X = \varepsilon^i X\}$$

とおくとき，

(3) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_i, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$$

となる。これは $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}_m$ を次数群とする次数付けである．

いま文字 x のローラン多項式環 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ と $\mathfrak{g}$ の，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としてのテンソル積を作る。以下 $x^j \otimes Y = x^j Y$ と記す．

(4) $$\mathbb{C}[x, x^{-1}] \otimes \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} x^j \mathfrak{g}$$

となる。いまここでこのベクトル空間における括弧積を，$[x^j Y, x^k Z] = x^{j+k}[Y, Z]$ によって定義するとき，これは $\mathbb{Z}$ を次数群とする $\mathbb{C}$ 上のリー環となる．いま $\mathfrak{g}$ の位数 m の自己同型 σ に対して，(2) により $\mathfrak{g}_i$ を定義して

(5) $$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_m} x^j \mathfrak{g}_{j \bmod m}$$

とおく．これは (4) の部分リー環である．

定義 2　(5) の $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ を，$\mathfrak{g}$ の被覆リー環という．またリー環の準同型写像 $\varphi : L(\mathfrak{g}, \sigma) \to \mathfrak{g}$ が，$\varphi(x^k Y) = Y$ によって定義される．φ を被覆準同型写像という．

以下 B を $\mathfrak{g}$ のキリング形式とする：$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)$.

Lemma 1

1) $B(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ for $i, j \in \mathbb{Z}_m$, $i + j \neq 0$.

2) 任意の $X \in \mathfrak{g}_i$, $X \neq 0$ に対し，$Y \in \mathfrak{g}_{-i}$ で $B(X, Y) \neq 0$ となるものが存在する．特に $B \mid \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ は非退化である．———

Lemma 5.2　$\mathfrak{g}$ の任意の有限位数自己同型写像 σ に対して、σ で不変な、$\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}_1$ が存在する。

証明　$\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ を任意に一つとり、

(6)　$G = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$,　$G_0 = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$,　$U = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$,　$U_0 = \mathrm{Int}\,\mathfrak{u}$

とおく。G_0, U_0 はそれぞれ G, U の単位元連結成分である。

シュヴァレー [11] VI 章の用語を用いると G は U の、G_0 は U_0 の associated algebraic group である。このとき次の (7) が成立つ。

(7)　$G = U\cdot \exp(i\mathfrak{u}) \approx U\times\mathfrak{u}$,　$G_0 = U_0\cdot\exp(i\mathfrak{u}) \approx U_0\times\mathfrak{u}$.　$U_0 = U\cap G_0$

G_0 は G の正規部分群だから、任意の $g\in G$ に対して次の (8) が成立つ:

(8)
$$gG_0 = G_0 g.$$

また $\exp(i\mathfrak{u}) \simeq \mathfrak{u}$ は連結だから、次の (9) が成立つ:

(9)
$$\exp(i\mathfrak{u}) \subset G_0 .$$

(7)(8)(9) から、次の (10)(11) が成立つ:

(10)
$$G_0 U = U G_0 = U_0 \exp(i\mathfrak{u}) G_0 = U_0 G_0 = G_0 U_0 .$$

(11)
$$G = U\exp(i\mathfrak{u}) \subset UG_0 \subset G,\quad G = UG_0 = G_0 U$$

そこで次の (12) が成立つ:

(12)
$$G/U = G_0U/U \approx G_0/G_0\cap U = G_0/U_0$$

以下 (12) により $G/U = G_0/U_0$ と同一視する。

(13)　$M = G_0/U_0$ は、大域的リーマン対称空間で非コンパクト型、従ってその断面曲率は $\leqq 0$ である。

(14)　任意の $g\in G$ は、$G/U = G_0/U_0 = M$ 上に、$\tau_g : xU \to gxU$ に

よって作用する。τ_g は M の等距離変換である。

(15) $\mathfrak{g}$ の位数 m の自己同型写像 σ が与えられたとき、$\{\tau_{\sigma^k} \mid 1 \leqq k \leqq m\}$ は、(ｸﾞﾘｰﾝ) リーマン空間 M 上の等距離変換の作る有限群だから M 上に不動点 xU を持つ。$(x \in G)$ (cf. 杉浦 [43], 定理C または定理D)

このとき $\sigma^k x U = xU$ $(1 \leqq k \leqq m)$ だから、$x^{-1}\sigma^k x U = U$,

(16) $x^{-1}\sigma^k x \in U$, $\sigma^k \in xUx^{-1} = \mathrm{Aut}\, x(\mathfrak{u})$ $(1 \leqq k \leqq m)$

となる。従って σ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $x(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}_1$ を不変にする。∎

以下 $\sigma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ とする。$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}_m$次数付け (3) から、$\mathfrak{u}$ の $\mathbb{Z}_m$次数付け

(17) $$\mathfrak{u} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{u}_i, \quad \mathfrak{u}_i = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_i$$

が与えられる。コンパクト実形 $\mathfrak{u}$ の部分リー環だから $\mathfrak{u}_0$ は完約であり、半単純イデアル $[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0]$ と中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_0}$ の直和となる。

(18) $$\mathfrak{u}_0 = [\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0] \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_0}, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}.$$

いま $[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0]$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}_0'$ をとり、$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_0' + \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_0}$ とすれば、$\mathfrak{t}_0$ は $\mathfrak{u}_0$ の極大可換部分環で、$\mathfrak{f} = \mathfrak{t}_0^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分環である。

Lemma 3.

$\mathfrak{f}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化環 $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{f}] = 0\}$ は、$\mathfrak{g}$ のカルタン部分環である。——

いま $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ (すなわち α は $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ の一次写像)，$i \in \mathbb{Z}_m$ に対し $\bar{\alpha} = (\alpha, i)$ なる pair を考え，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ の同時固有空間

$$\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}_i \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (\forall H \in \mathfrak{h})\}$$

を考える．そして $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} \neq 0$ のとき，$\bar{\alpha} = (\alpha, i)$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルートという．$(\alpha, i) + (\beta, j) = (\alpha+\beta, i+j)$ と定義するとき，$[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\bar{\beta}}] \subset \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$ となる．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート $\neq (0, 0)$ の全体を $\bar{\Delta}$ とし，$\bar{\Delta}^0 = \{(0, i) \in \bar{\Delta} \mid i \in \mathbb{Z}_m\}$ とおく．このとき次の直和分解が成立つ：

(19) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}} \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{(0,0)}$$

(20) $$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}^0} \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$$

(21) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) + \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}^0} \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}.$$

半単純リー環の通常のルート理論と平行に，次の Lemma 4, 5, 6 が成立つ．

Lemma 4.

1) 各 $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}^0$ に対し $\dim \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = 1$.

2) $B \mid \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ は非退化である．各 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対し次の (22) をみたす $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ が唯一つ存在する：

(22) $$B(H_\alpha, H) = \alpha(H) \quad (\forall H \in \mathfrak{h}).$$

$\langle \alpha, \beta \rangle = B(H_\alpha, H_\beta)$ とおく．

3) $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}^0$ ならば，$-\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}^0$ であって

$$[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}^{-\bar{\alpha}}] = \mathbb{C}H_\alpha, \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0 \quad \text{である．}$$

Lemma 5.

$\bar\beta \in \bar\Delta$, $\bar\alpha \in \bar\Delta - \bar\Delta^0$ のとき, 次のことが成立つ.

1) $\{\bar\beta + n\bar\alpha \in \bar\Delta \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\bar\beta + n\bar\alpha \mid p \leqq n \leqq q\}$ となる整数 p, q が存在する. そしてこのとき次の (23) が成立つ:

$$(23) \qquad -2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$$

2) $t\bar\alpha \in \bar\Delta,\ t \in \mathbb{R} \iff t = \pm 1, 0.$

3) $\bar\alpha + \bar\beta \in \bar\Delta$ ならば, $X \in \mathfrak{g}^{\bar\alpha}$, $Y \in \mathfrak{g}^{\bar\beta}$ で $[X, Y] \neq 0$ となるものが存在する. 特に次の (24) が成立つ:

(24) $\bar\alpha + \bar\beta \in \bar\Delta - \bar\Delta^0$ ならば, $[\mathfrak{g}^{\bar\alpha}, \mathfrak{g}^{\bar\beta}] = \mathfrak{g}^{\bar\alpha + \bar\beta}$ である.

Lemma 6.

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\bar\alpha \in \bar\Delta - \bar\Delta^0} \mathbb{R} H_\alpha$ とおくとき, 次の 1), 2) が成立つ:

1) B は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上で実数値をとり, かつ正値定符号である.

2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. ——

定義 3 $\mathfrak{g}$ の被覆リー環 $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} L_j$, $L_j = x^j \mathfrak{g}_{j \bmod m}$ を, $\mathbb{Z}$ を次数群とする次数付きリー環と考える。このとき自然に L_0 は $\mathfrak{g}_0$ と同一視される. 以下上述の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系と平行して, $(L(\mathfrak{g}, \sigma), \mathfrak{h})$ のルート系 $\hat\Delta$ が定義される. $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ と j の pair $\hat\alpha = (\alpha, j)$ に対し, 同時固有空間

$$(25) \qquad L^{\hat\alpha} = \{X \in L_j \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad (\forall H \in \mathfrak{h})\}$$

が $\neq 0$ となるとき, $\hat\alpha = (\alpha, j)$ ($\neq 0$) を $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の $\mathfrak{h}$ に関する <u>ルート</u> といい, その全体を $\hat\Delta$ と記す. $(\alpha, j) + (\beta, k) = (\alpha + \beta, j + k)$ として和を

定義する。また

(26) $$\hat{\Delta}^0 = \{(0, j) \in \hat{\Delta} \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。このとき、次の(27)(28)(29)が成立つ:

(27) $$[L^{\hat{\alpha}}, L^{\hat{\beta}}] \subset L^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}$$

(28) $$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathfrak{f} + \sum_{\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}} L^{\hat{\alpha}} \qquad \text{(直和)}$$

(29) $$(\alpha, j) \in \hat{\Delta},\ j \equiv j' \bmod m \Rightarrow (\alpha, j') \in \hat{\Delta}.$$

写像

(30) $$f: \hat{\alpha} = (\alpha, j) \longmapsto (\alpha, j \bmod m) = \bar{\alpha}$$

は、$L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の $\mathfrak{f}$ に関するルート系 $\hat{\Delta}$ を、$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{f}$ に関するルート系 $\bar{\Delta}$ の上に写す。そしてこのとき

(31) $$L^{\hat{\alpha}} = x^j \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$$

となる。また $f(\hat{\Delta}^0) = \bar{\Delta}^0$ となる。この関係により、Lemma 4, Lemma 5 から、次の Lemma 4′, Lemma 5′ が得られる。

Lemma 4′

1) $\dim L^{\hat{\alpha}} = 1 \quad (\forall \hat{\alpha} \in \hat{\Delta} - \hat{\Delta}^0)$

2) $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta} - \hat{\Delta}^0 \Rightarrow -\hat{\alpha} \in \hat{\Delta} - \hat{\Delta}^0$ で、$[L^{\hat{\alpha}}, L^{-\hat{\alpha}}] = \mathbb{C} H_\alpha$ となる。

Lemma 5′

$\hat{\alpha} \in \hat{\Delta} - \hat{\Delta}^0$, $\hat{\beta} \in \hat{\Delta}$ のとき、次のことが成立つ:

1) $\{\hat{\beta} + n\hat{\alpha} \in \hat{\Delta} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\hat{\beta} + n\hat{\alpha} \mid p \leqq n \leqq q\}$ となる整数 p, q が存在し、次の(32)が成立つ:

(32) $$-2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q.$$

さらに $0 \neq e_{\tilde\alpha} \in L^{\tilde\alpha}$ に対して、次の(33)が成立つ:

(33) $$(\mathrm{ad}\, e_{\tilde\alpha})^{q-p}(L^{\hat\beta+p\tilde\alpha}) \neq 0$$

2) $t\tilde\alpha \in \hat\Delta,\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = \pm 1, 0$

3) $\hat\beta, \hat\alpha+\hat\beta \in \hat\Delta$ ならば、$e_{\hat\alpha} \in L^{\hat\alpha}$, $e_{\hat\beta} \in L^{\hat\beta}$ で、$[e_{\hat\alpha}, e_{\hat\beta}] \neq 0$ となるものが存在する。特に

(34) $$[L^{\hat\alpha}, L^{\hat\beta}] = L^{\hat\alpha+\hat\beta} \quad (\hat\alpha+\hat\beta \notin \hat\Delta^0 \text{ と仮定する}).$$ ——

$L_0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}}$ は完約、$[L_0, L_0]$ は半単純である。$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_0 = L_0$ のカルタン部分環だから、$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap [L_0, L_0]$ は $[L_0, L_0]$ のカルタン部分環である。いま Δ_0 を $(L_0, \mathfrak{h}_0)$ のルート系である。Δ_0 の基底を一つとり、それに関する Δ_0 の正のルートの全体を Δ_0^+ とする。各 $\alpha \in \Delta_0$ を L_0 の中心上では 0 と定義すると、$\mathfrak{h}$ 上の一次形式となる。これをまた α と記す。この α とルート $(\alpha, 0) \in \hat\Delta$ を同一視する。$(\beta, 0)$ の形の $\hat\Delta$ の任意の元は、こうして Δ_0 の元から得られる。

定義 4.

(35) $$\hat\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup \{(\alpha, j) \in \hat\Delta \mid j > 0\}$$

とおき、$\hat\Delta^+$ の元を<u>正のルート</u>と呼ぶ。$\hat\Delta = \hat\Delta^+ \cup (-\hat\Delta^+)$ であり、$\hat\Delta^+$ は閉じている $(\hat\alpha, \hat\beta \in \hat\Delta^+, \hat\alpha+\hat\beta \in \hat\Delta \Rightarrow \hat\alpha+\hat\beta \in \hat\Delta^+)$。正のルート $\tilde\alpha$ が $\hat\Delta^+$ の二つの元の和とならないとき、<u>単純</u>であるという。$\tilde\Pi = \{(\alpha_0, s_0), (\alpha_1, s_1), \cdots\}$ を、$\hat\Delta$ の単純ルートの全体とし、それに対し、$\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\}$ とおく。次の Lemma 7, 4) により、$\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ はどの二つも等しくない。いま $\mathfrak{g}$ は有限次元としている

から α_i は有限個しかない。従って $\hat{\Pi}, \Pi$ は有限集合である。その元の個数を N とする。

Lemma 7.

1) $\hat{\Delta}$ の各元 $\hat{\alpha}$ は、$\hat{\alpha} = \pm \sum_i k_i \alpha_i$ ($k_i \in N$, $\hat{\alpha}_i \in \hat{\Pi}$) と表わされる。

2) $\hat{\Pi} \subset \hat{\Delta} - \hat{\Delta}^0$.

3) Π は $\mathfrak{f}$ の双対空間 $\mathfrak{f}^*$ の一次従属な集合である。

4) $i \neq j$ のとき

$$(36) \qquad a_{ij} = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \in (-N)$$

である。特に $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$ である。

5) $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}^+$ が単純でなければ、ある $\hat{\alpha}_i \in \hat{\Pi}$ に対して $\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_i \in \hat{\Delta}$ となる。——

$0 \leqq i \leqq N-1$ となる各整数 i に対し、

$$(37) \qquad h_i = 2\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^{-1} H_{\alpha_i}$$

とおく。Lemma 4′, 2) により このとき、

(38) $e_i \in L^{\hat{\alpha}_i}$, $f_i \in L^{-\hat{\alpha}_i}$ で、$[e_i, f_i] = h_i$ となるものがある。

このとき、次の関係 (39) が成立つ。

$$(39) \qquad [h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, e_j] = a_{ji} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ji} f_j.$$

定義 5　(36) の a_{ij} を (i, j) 要素とする N 次行列 $A = (a_{ij})_{0 \leqq i, j \leqq N-1}$ をリー環 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の <u>一般カルタン行列</u> という。$\tilde{\alpha}_0, \cdots, \tilde{\alpha}_{N-1}$ から生成されるアーベル群を M とする。次の直和分解 (40) は、$L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の M を

次数群とする次数付けがある.

$$(40) \qquad L(\mathfrak{g},\sigma) = \bigoplus_{\tilde{\alpha}\in M} L^{\tilde{\alpha}}.$$

ここで $L^0 = \mathfrak{f}$ で, $\tilde{\alpha}\notin\hat{\Delta}$ ならば $L^{\tilde{\alpha}} = 0$ である ((28)を見よ).

Lemma 8.

1) (37)(38) で与えられる $3N$ 個の元 $(e_i, f_i, h_i)_{0\leq i\leq N-1}$ は $L(\mathfrak{g},\sigma)$ を生成する.

2) M を次数群とする次数付きリー環 $L(\mathfrak{g},\sigma)$ は, 0 以外の M-graded ideal I ($I = \bigoplus_{\tilde{\alpha}\in M}(I\cap L^{\tilde{\alpha}})$ となるイデアル) を持たない. ただし I は $I\cap\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{C}e_i = 0$ をみたすものとする.

3) σ が $\mathfrak{g}$ の分解不能な自己同型である (すなわち $\mathfrak{g}$ は σ 不変なイデアルの直和とならない) とき, Π は既約である (即ち空でない直交する二つの部分集合の合併とならない). ——

系 以下 σ を分解不能な $\mathfrak{g}$ の自己同型とする ($\sigma^m = 1$ とする).

定義4 の Π の元を $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}\}$ とし, $E = \sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{R}\alpha_i$, $\dim E = n$ とおく. 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は E 上正値定符号である. Π は次の (Π_1) (Π_2) (Π_3) をみたす.

(Π_1) $i\neq j$ ならば $a_{ij} = 2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle \in (-\mathbb{N})$.

(Π_2) Π は既約 (=直交分解不能) である.

(Π_3) Π は一次従属で, E を生成する. 特に $\det(a_{ij}) = 0$.

(Π_1) は Lem. 5, (Π_2) は Lem. 8, (Π_3) は Lem. 7. $\alpha_0, \cdots, \alpha_N$ を左のあ

る正規直交基底に関して数ベクトルで表わし，それを列ベクトルとする行列をPとする．Πが一次従属だから$\det P = 0$である。一方${}^tPP = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq N-1}$となるから，

$\det A = 2^N \prod_{j=0}^{N-1} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle^{-1} (\det P)^2 = 0$ となる．)

Lemma 9

1) Πの任意の真部分集合$\neq \phi$は，一次独立である．特に$N = n+1$である．

2) 集合$\hat{\Pi}$は$\mathbb{Z}$上独立である．すなわち$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \hat{\alpha}_i = 0$ $({}^\forall c_i \in \mathbb{Z})$ならば，${}^\forall c_i = 0$となる．——

Lemma 10.

リー環$L(\mathfrak{g}, \sigma)$と$L(\mathfrak{g}', \sigma')$に対し，$\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0'$の極大可換部分環$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$をとり，それに関するルート系$\Delta, \Delta'$と，単純ルートの全体

(41) $\hat{\Pi} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\Pi}' = (\hat{\alpha}_0', \hat{\alpha}_1', \cdots, \hat{\alpha}_{n'}')$

が与えられたとする．いま$n = n'$であるとし，写像$\hat{\alpha}_i \mapsto \hat{\alpha}_i'$ $(0 \leq i \leq n)$によりMからM'への全単写τが引起されるものとし，それにより一般カルタン行列AとA'は一致すると仮定する．このとき次のことが成立つ:

1) 同型写像

(42) $\hat{\varphi} : L(\mathfrak{g}', \sigma') \to L(\mathfrak{g}, \sigma)$

であって，それによってM', Mによる次数付けが対応

するようなものが存在する。すなわち $L=L(\mathfrak{g},\sigma)$, $L'=L(\mathfrak{g}',\sigma')$ とするとき、$\hat{\varphi}((L')^{\tau(\alpha)}) = L^{\alpha}$ となる。$(\forall\alpha\in\hat{\Delta})$.

2) いま $\hat{\varphi}: L'\to L$ を1)をみたす任意の同型写像とする。いま $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ は共に単純とするとき、同型写像 $\psi:\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}$ と、定数 $c\in\mathbb{C}-\{0\}$ が存在して、次の図式は可換となる:

$$\begin{tikzcd}
L(\mathfrak{g}',\sigma') \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi'"'] & L(\mathfrak{g},\sigma) \arrow[r, "\mu_c"] & L(\mathfrak{g},\sigma) \arrow[dl, "\varphi"] \\
\mathfrak{g}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{g} &
\end{tikzcd}$$

ここで φ, φ' は被覆準同型写像であり、μ_c は $x\mapsto cx$ なる変換に対応する $L(\mathfrak{g},\sigma)$ の自己同型写像である。

(μ_c はローラン多項式環 $\mathbb{C}[x,x^{-1}]$ の自己同型だから、$\mathbb{C}[x,x^{-1}]\otimes\mathfrak{g}$ の自己同型を引起し、それは $L(\mathfrak{g},\sigma)$ を不変にする。)——

定義 6

通常の半単純リー環のルート系またはカルタン行列から、そのディンキン図形が定義されるのと同様に、被覆リー環 $L(\mathfrak{g},\sigma)$ のルート系 $\hat{\Delta}$ とその一般カルタン行列 $A=(a_{ij})$ から、ディンキン図形 $S(A)$ が定義される。$\hat{\Delta}$ の単純ルートの全体 $\hat{\Pi}=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$ の各元 α_i にそれぞれ、平面上に小円を描き、頂点 α_i と α_j の間を $a_{ij}\cdot a_{ji}$ 本の線分(これを稜という)で結ぶ。$|a_{ij}|<|a_{ji}|$ のときこの稜に不等号 $<$ を、$\overset{\alpha_i}{\circ}\Rightarrow\overset{\alpha_j}{\circ}$ のように短いルート $<$ 長いルートとなるように記す。

図形 $S(A)$ の分類は，ルート系のディンキン図形の分類と同様な方法で実行される．ただし今度はルート系の場合には現われなかったサイクルや4重線が可能であり．既約ルート系の場合には，分岐点や多重線は高々一つだったのに対して，二つまで許されるというような違いがある．この分類は，次の Lemma 11 で実行される．

Lemma 11

Lemma 8 系の三条件 $(\Pi_1)(\Pi_2)(\Pi_3)$ をみたす Π に対する図形 $S(A)$ は表6にあるものでつくされる．頂点 α_i に記してある数字 a_i は行列 A の第 i 行ベクトルを c_i とするとき，$\sum_{i=0}^{n} a_i c_i = 0$ をみたす．

図形 $S(A)$ によって一般カルタン行列は一意的に定まる．

証明　ここでは既約ルート系の分類は既知とする（ヘルガソン [20]，松島 [27] 等を見よ）．図形 $S(A)$ は，次の条件 (a)−(e) をみたす．

(a)　$S(A)$ の真部分図形の各連結成分は，既約ルート系のディンキン図形である．((Lemma 9, 1) による．任意の $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対し行列 A の第 i 行と第 i 列を除いた行列 A_i は $\det A_i \neq 0$ でカルタン行列である）

(b)　$S(A)$ は連結である．((Π_2) による)．

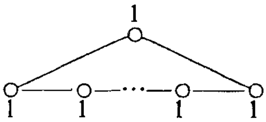
(c)　$S(A)$ の部分図形 S が l 個の頂点 $\{\beta_1, \cdots, \beta_l\}$（$\beta_k$ はある α_i に一致する）とその間の線から成るとき，$b_{ij} = 2\langle\beta_i, \beta_j\rangle / \langle\beta_j, \beta_j\rangle$ とおくとき，$\sum_{i<j} (b_{ij} b_{ji})^{1/2} \leqq l$ である．

$\because$）$\varepsilon_i = \beta_i / \|\beta_i\|$，$\alpha = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i$ とおくと，$\langle\alpha, \alpha\rangle \geqq 0$ から，$\sum_{i<j} (b_{ij} b_{ji})^{1/2} =$

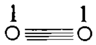
表6 Tables of Diagrams $S(A)$ (ヘルガソン[20]より引用)

TABLE 1

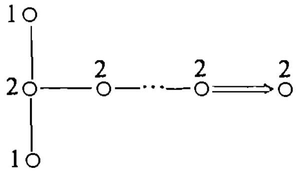
$\mathfrak{a}_n^{(1)}$ $(n>1)$



$\mathfrak{a}_1^{(1)}$

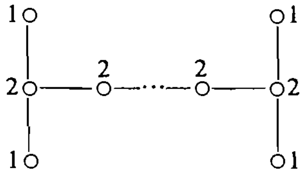


$\mathfrak{b}_n^{(1)}$ $(n>2)$

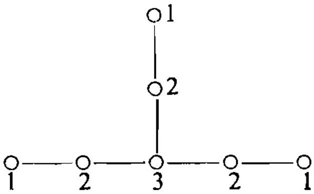


$\mathfrak{c}_n^{(1)}$ $(n>1)$

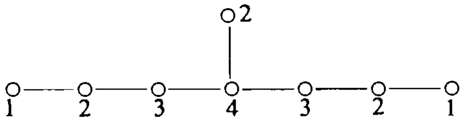
$\mathfrak{d}_n^{(1)}$ $(n>3)$



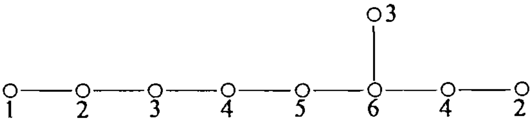
$\mathfrak{e}_6^{(1)}$



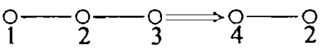
$\mathfrak{e}_7^{(1)}$



$\mathfrak{e}_8^{(1)}$



$\mathfrak{f}_4^{(1)}$



$\mathfrak{g}_2^{(1)}$

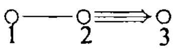
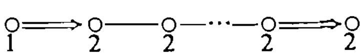


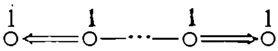
TABLE 2

$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$ $(n>1)$

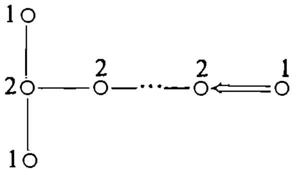


$\mathfrak{a}_2^{(2)}$

$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$ $(n>1)$



$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$ $(n>2)$



$\mathfrak{e}_6^{(2)}$

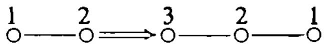
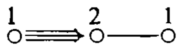


TABLE 3

$\mathfrak{d}_4^{(3)}$



$\mathfrak{a}_n^{(1)}$ 等の記号はアフィン・リー環の記号である.
cf. カッツ[22], pp. 48. 49.

For $\mathfrak{a}_n^{(1)}$, $\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$, $\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$, $\mathfrak{b}_n^{(1)}$, $\mathfrak{c}_n^{(1)}$, $\mathfrak{d}_n^{(1)}$, $\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$, there are $n+1$ vertices.

$-2\sum_{i<j}\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle \leqq l$ となる.

(d) $S(A)$がサイクルCを含むとき, CはN個の頂点からなり, 稜はすべて一重である. そして$S(A)=C$となる. すなわち$S(A)$は表6のTable 1にある$\mathfrak{a}_n^{(1)}$である ((c)による)
従って$S(A)\neq\mathfrak{a}_n^{(1)}$ならば, $S(A)$はサイクルを含まない.

(e) $S(A)$が三重稜を含むときは, 他の稜はすべて一重である.
((c)による. $3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}>3$ だから三重稜と二重稜を含むと(c)に反する)

(f) $S(A)$は二重稜を高々二つしか含むことができない.
(三つ含むとすると, $3\cdot 2^{\frac{1}{2}}>4$ となり, (c)に反する)

(g) $S(A)$はルート系のディンキン図形ではない. ((Π_3)によりΠは一次従属だから, ルート系の基底になり得ない)

(h) $N=2$のとき, $S(A)$は表6の$\mathfrak{a}_1^{(1)}$または$\mathfrak{a}_2^{(2)}$である。

($S(A)$は連結(b) k重稜を持つとき$k\leqq 3$なら$S(A)$はルート系に対応し(g)に反する. そこで$k=4$である. $\|\alpha_0\|$と$\|\alpha_1\|$が等しいかどうかにより, $S(A)=\mathfrak{a}_1^{(1)}$または$\mathfrak{a}_2^{(2)}$となる.)

(k) $S(A)$が4重稜を持てば$\mathfrak{a}_1^{(1)}$または$\mathfrak{a}_2^{(2)}$. (他の頂点α_2があれば$S(A)-\{\alpha_2\}$が(h)に反する.)

これらの性質(a)〜(k)によって$S(A)$は定まる. 即ち次の(A)が成立つ

(A) 有限個の頂点とその間を結ぶk重稜 ($k=1,2,3,4$) と $k\geqq 2$ のとき稜に不等号$<$がつけられた図形Sが(a)−(k)をみたせば, Sは表6にある図形の一つに一致する.

∵) (i) (d)によりSがサイクルを含むとき $S=\mathfrak{a}_n^{(1)}$.

(ii) (i)により以下Sはサイクルを含まないとしてよい.

(iii) Sがサイクルを含まないとき、Sの端点pが存在し、

$S-\{p\}$は連結である. (端点がpの稜は$S-\{p\}$では除いてある)

(iv) $S-\{p\}$は(a)によりあるルート系Δのディンキン図形$\mathfrak{D}$である.

(v) 従ってSは$\mathfrak{D}$に一つの頂点pと、それと結ばれる稜を追加したものである.

(vi) このときpと結ばれる頂点は唯一つである ∵) (b)によりSは連結だから、pはSのある頂点α ($\neq p$)と結ばれる. pと結ばれるSの頂点が二つあるとSはサイクルを含むことになり(ii)に反する.

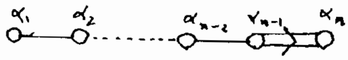
(vii) $n=1$のときは、(a)により$S=\mathfrak{a}_1^{(1)}$または$\mathfrak{a}_2^{(2)}$である.

(viii) 故に$n\geqq 2$の場合を考えれば十分. 特に4重稜はないとしてよい((d)).

(ix) $S-\{p\}$がB_n型ディンキン図形$\mathfrak{b}_n$であるとき、Sとして可能なもの(つまり上の(a)−(g)をみたすもの)は表6の中の次の4つ

(43) $$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)},\ \mathfrak{d}_{n+1}^{(2)},\ \mathfrak{b}_n^{(1)},\ \mathfrak{f}_4^{(1)}\ (n=4\text{のとき})$$

に限る. ($n\geqq 2$とする.)

∵) $\mathfrak{b}_n$のディンキン図形は  である.

pがα_1と一重稜で結ばれたとすると$S=\mathfrak{b}_{n+1}$となり(g)に反する.

pがα_1と二重稜で結ばれているとき、$\|p\|>\|\alpha_1\|$ならば$S=\mathfrak{a}_{2m}^{(2)}$ ($2m=n$)、$\|p\|<\|\alpha_1\|$ならば、$S=\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$である. α_{n-1}とα_nの間が二重稜なので、pがα_1と三重稜で結ばれることはない(e). また(viii)

から四重稜はない。

ρ が α_2 と一重稜で結ばれていれば S は表6の $\mathfrak{b}_n^{(1)}$ である。

ρ が α_2 と k 重稜 $(k \geqq 2)$ で結ばれているとすると、$S-\{\alpha_1\}$ は二つの多重稜を持つが、(a)により $S-\{\alpha_1\}$ はルート系のディンキン図形であるのでこれは矛盾である。

ρ が α_i $(3 \leqq i \leqq n-1)$ と一重稜で結ばれているとき、$S-\{\alpha_1\}$ は分岐点 α_3 と二重稜を含むからルート系のディンキン図とはなり得ない。これは(a)に反する。ρ と α_i が多重稜で結ばれるときも $S-\{\alpha_1\}$ が二つの多重稜を含むことになり(a)に反する。

ρ が α_n と一重稜で結ばれているとする。$n=4$ ならば $S=\mathfrak{f}_4^{(1)}$ である。それ以外のときは(β)または(a)に反する。$n=2, 3$ のとき $S=\mathfrak{c}_3, \mathfrak{f}_4$ であり(β)に反する。$n \geqq 5$ のときは $S-\{\alpha_1\}$ は二重稜の両端から稜が出て居り、かつ $S-\{\alpha_1\} \neq \mathfrak{f}_4$ だから(a)に反する。

以上で(ix)は証明された。

$S-\{\rho\}$ が $\mathfrak{b}_n$ 以外の既約ルート系のディンキン図形のときも(ix)と同様にして、S の可能な形を定めることができる。それを次の(X)にまとめる。証明は(ix)と同様だから省略する。

(X) (1) $S-\{\rho\}=\mathfrak{a}_n$ $(n \geqq 2)$ のとき、$S=\mathfrak{a}_n^{(1)}, \mathfrak{d}_4^{(3)}, \mathfrak{e}_7^{(1)} (n=7), \mathfrak{e}_8^{(1)} (n=8), \mathfrak{g}_2^{(1)}$ のいづれかである。

(2) $S-\{\rho\}=\mathfrak{c}_n$ $(n \geqq 2)$ のとき、$S=\mathfrak{c}_n^{(1)}, \mathfrak{a}_{2m-1}^{(2)} (n=2m-1), \mathfrak{e}_6^{(2)} (n=6)$ のいづれかである。

(3) $S-\{\rho\}=\mathfrak{d}_n$ $(n \geqq 4)$ のとき、$S=\mathfrak{d}_n^{(1)}, \mathfrak{a}_{2m-1}^{(2)} (n=2m-1), \mathfrak{e}_8^{(1)} (n=8)$ のいづれかである。

(4) $S-\{\rho\}=\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$ のときそれぞれ $S=\mathfrak{e}_6^{(1)}, \mathfrak{e}_7^{(1)}, \mathfrak{e}_8^{(1)}$ である

(5) $S-\{p\}=f_4$ のとき，$S=f_4^{(1)}$ または $e_6^{(2)}$ である．

(6) $S-\{p\}=g_2$ のとき，$S=g_2^{(1)}$ または $d_4^{(3)}$ である．

(ix)(x) の結果をまとめると次のようになる．

(xi) (a)−(k) をみたす図形は表6でつくされる．

(xii) $(\Pi_1)(\Pi_2)(\Pi_3)$ をみたすベクトルの集合 Π の一般カルタン行列 $A=(a_{ij})$ に対応する図形は表6にあるものでつくされる．

(B) 図形 $S(A)$ により，一般カルタン行列 A は定まる．

∵) $A_{ij}=a_{ij}a_{ji}$ の可能な値は 0, 1, 2, 3, 4 の五個である。図形 $S(A)$ における頂点 α_i と α_j の間を結ぶ線の個数と不等号 < の向きによって a_{ij} および a_{ji} の値が定まることは次の表からわかる．

図形	α_i ○ ○ α_j	α_i ○—○ α_j	α_i ○=>○ α_j	α_i ○≡>○ α_j	α_i ○≣○ α_j	α_i ○≣>○ α_j
a_{ij}	0	−1	−2	−3	−2	−4
a_{ji}	0	−1	−1	−1	−2	−1

(C) 一般カルタン行列 A の行ベクトルを $c_0, c_1, \cdots, c_n$ とすると

(44) $$a_0c_0+a_1c_1+\cdots+a_nc_n=0$$

となる $(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ が存在する。このとき $\forall a_i\neq 0\ (0\leq i\leq n)$ である。特に $a_0>0$ ととれる．さらに $(a_0,\cdots,a_n)$ の最大公約数 $=1$ とできる．

∵) (Π_3) により $\det A=0$ だから，(44) をみたす $0\neq(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ が存在する。今 A の成分は有理整数だから，連立一次方程式の理論から，(44) をみたす $0\neq(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{Q}^{n+1}$ が存在する．分母を払って

て $(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ となる。$(a_0,\cdots,a_n)$ の最大公約数 d が 1 より大きいときは，d で割ることにより，最大公約数 $=1$ とできる。

次に $^\forall a_i\neq 0$ を証明する。どれでも同じだから $a_0\neq 0$ を示す。

今 $a_0=0$ と仮定して矛盾を導く。$a_0=0$ とすると $c_1,\cdots,c_n$ の間に自明でない一次関係があることになる。そこで A の第 0 行を除いた $(n,n+1)$ 型行列を A_0 とすると，$\mathrm{rank}\,A_0\leqq n-2$ となる。そこで

(45) A_0 の $n-1$ 次小行列式はすべて 0 である。

一方 Π の $n-1$ 個の元，例えば $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ は一次独立である (Lem. 9, 2)). $\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{R}\alpha_i$ の正規直交基底に関する α_i の成分ベクトルを第 i 列ベクトルとする $n-1$ 次行列を P とすると $\det P\neq 0$ である。

そこで $B={}^tPP=(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_{1\leqq i,j\leqq n-1}$ とすると，$\det B=(\det P)^2\neq 0$ である。そこで B の第 j 列に $2\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle^{-1}$ を掛けることを $j=1,2,\cdots,n-1$ それぞれ行って得られる行列を C とすると，

(46) $$\det C = 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle^{-1}\det B\neq 0$$

となる。C は A_0 の $n-1$ 次小行列だから，(45)と(46)は矛盾する。

これで $a_0\neq 0$ が帰謬法で証明された。$a_0<0$ なら $(a_0,\cdots,a_n)$ に -1 をかけて，$a_0>0$ をみたす(44)の解が得られる。■

(44) をみたす $(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$ を求める実例を示そう。

例 1. $S(A)=\mathfrak{g}_2^{(1)}$ (表 6) に対し (a_0,a_1,a_2) を求めよう。$\mathfrak{g}_2^{(1)}$ は G_2 型ルート系の基底 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ に対し，$\delta=3\alpha_2+2\alpha_1$ を最大ルートとして $\alpha_0=-\delta$ を添加した図型である。(e_1,e_2,e_3) を正規直交基底と

とするとき、

$$\alpha_1 = -2e_1 + e_2 + e_3, \quad \alpha_2 = e_1 - e_2, \quad \alpha_0 = e_1 + e_2 - 2e_3$$

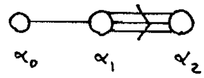
である（ブルバキ[3]。ただし表6と合わせるため α_1 と α_2 を交換した）。このとき

$$\|\alpha_1\|^2 = 6, \quad \|\alpha_2\|^2 = 2, \quad \|\alpha_0\|^2 = 6$$

$$\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle = -3, \quad \langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle = 0, \quad \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -3$$

このとき $\mathfrak{g}_2^{(1)}$ の一般カルタン行列 A と図形 $S(A)$ は、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$



である。A の第 i 行ベクトルを C_i とすると、$1\cdot C_1 + 2\cdot C_2 + 3C_3 = 0$ であり、$(a_0, a_1, a_2) = (1, 2, 3)$ であることがわかる。——

Lemma 11 により図形 $S(A)$ の分類は出来たが、表6の各図形が実際ある複素リー環 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ に対応することを確かめることが必要である。実際には特別な自己同型（後の定義9で述べるディンキン図形の自己同型 $\bar{\nu}$ から引起される $\mathfrak{g}$ の自己同型 ν）による $L(\mathfrak{g}, \nu)$ によって表6の $S(A)$ はつくされるのである。ν の定義をするために必要な二つの定義を述べておく。

定義7.

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環、$\mathfrak{h}$ をその一つのカルタン部分環とし、$n = \dim \mathfrak{h}$、Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ を Δ の基底とする。$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し $\alpha(H) = B(H_\alpha, H)$ となる $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ が唯一つ存在する。$\langle \alpha, \beta \rangle = B(H_\alpha, H_\beta)$ とし、$n(\alpha, \beta) = 2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \beta, \beta \rangle$, $n(i, j) = n(\alpha_i, \alpha_j)$

とおく．$X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ を $[X_i, Y_i] = H_{\alpha_i} = H_i$ となるようにとる。このとき $C = \{X_i, Y_i, H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ は $\mathfrak{g}$ を生成する．C を $\mathfrak{g}$ の<u>標準生成元</u>という。C は次の関係式をみたす：

(S1) $[H_i, H_j] = 0$

(S2) $[X_i, Y_i] = H_i$, $[X_i, Y_j] = 0 \quad (i \neq j)$

(S3) $[H_i, X_j] = n(j, i)X_j$, $[H_i, Y_j] = -n(j, i)Y_j$

(S_{ij}^{+}) $(\mathrm{ad}\, X_i)^{-n(j,i)+1} X_j = 0$

(S_{ij}^{-}) $(\mathrm{ad}\, Y_i)^{-n(i,j)+1} Y_j = 0$

これらの関係は，$\mathfrak{g}$ を定義する基本関係式である．すなわち $3n$ 個の元 $\{X_i, Y_i, H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ から生成される $\mathbb{C}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}_0$ が (S1)(S2)(S3)(S_{ij}^{+})(S_{ij}^{-}) をみたせば，$\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ と同型になる．

定義 8

ルート系 Δ, Δ' があるとする．Δ, Δ' が張るユークリッド・ベクトル空間を E, E' とする。全単写線型写像 $\phi: E \to E'$ が次の (I1)(I2) をみたすとき，ϕ を Δ から Δ' への<u>同型写像</u>であるといい，同型写像が存在するとき，Δ と Δ' は<u>同型</u>であるといい，$\Delta \cong \Delta'$ と記す．ただし $n(\alpha, \beta) = 2\langle\alpha, \beta\rangle / \langle\beta, \beta\rangle$ である．

(I1) $\phi(\Delta) = \Delta'$ (I2) $\forall\alpha, \forall\beta \in \Delta$ に対し，$n(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$.

特に Δ から Δ への同型写像を，Δ の<u>自己同型写像</u>といい，その全体が作る群を Δ の<u>自己同型群</u>といい，$\mathrm{Aut}\,\Delta$ または $A(\Delta)$ と記す．

Δの基底Πを一つとるとき　$A(\Pi)=\{\phi\in A(\Delta)\mid \phi(\Pi)=\Pi\}$ とする。

$W(\Delta)$ をΔのワイル群とするとき、$A(\Pi)\cong A(\Delta)/W(\Delta)$ である。$A(\Pi)$ をΔのディンキン図形 $\mathfrak{S}$ の自己同型群という。

定義9

定義7,8の記号を用いる。$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系Δの基底Πに対するディンキン図形の自己同型群 $A(\Pi)$ の元 $\bar{\nu}$ に対し、$\nu\in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ で $\bar{\nu}\alpha_i=\alpha_{\bar{\nu}(i)}$ とするとき、

(47)　$\nu X_i = X_{\bar{\nu}(i)},\quad \nu Y_i = Y_{\bar{\nu}(i)},\quad \nu H_i = H_{\bar{\nu}(i)},\quad 1\le i\le n$

をみたすものが唯一つ存在する。νを $\bar{\nu}$ が引起する $\mathfrak{g}$ の自己同型写像という。

Lemma 12

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純リー環、νを $\mathfrak{g}$ のディンキン図形の自己同型 $\bar{\nu}$ が引起する $\mathfrak{g}$ の自己同型とする。いま $\bar{\nu},\nu$ の位数を k とするとき、$k=1,2,3$ である。このとき被覆リー環 $L(\mathfrak{g},\nu)$ の一般カルタン行列を A、その図形を $S(A)$ とする。$(\mathfrak{g},\nu)$ として可能なもの全部をとるとき、生ずる $S(A)$ の全体は、表6 Table k のすべての図形をつくしている。

証明 1) $k=1$ のとき。

このとき $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系Δのある順序に関する単純ルートの全体を $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とし、最大ルートをδとする。このとき、$(\alpha_1,0),\cdots,(\alpha_n,0)$ は $L(\mathfrak{g},1)$ の単純ルートである。また $(-\delta,1)$ も

$L(\mathfrak{g},I)$の単純ルートである　∵) $(-\delta,1)=(\beta,1)+(\alpha,0)$, $\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha>0$ とすると，$\delta+\alpha=-\beta\in\Delta$, $\alpha>0$ だから δ より大きなルート $\delta+\alpha$ が存在することになり矛盾.

Lemma 9 により $N=n+1$ だから，$L(\mathfrak{g},I)$ の単純ルートの全体 $\hat{\Pi}$ は

$$\hat{\Pi}=\{(-\delta,1),(\alpha_1,0),\cdots,(\alpha_n,0)\}$$

である．このとき $\Pi=\{-\delta,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ に対応する図形 $S(A)$ を作るとき，表6 Table 1 のすべての図形をつくす．頂点 α_i に記されている数字 a_i は，最大ルート δ を α_i の一次結合で表わしたときの係数として定められる: $\delta=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$ (3節の表1参照).

このときの $S(A)$ は次のようにして得られる．$S(A)-\{\delta\}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ は Δ の基底だから，その図形は Δ のディンキン図形 $\mathcal{D}$ である．後は，$-\delta$ が $\mathcal{D}$ のどの頂点 α_i と何重線で結ばれるかを知り，多重線の場合 $\|-\delta\|$ と $\|\alpha_i\|$ の大小を知れば，$S(A)$ が描ける.

それには $-\delta$ と α_i の内積を求めカルタン整数 $a_{\alpha_i,-\delta}$ を求めればよい．その結果は，次の表に記す.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_n$ $(n\geq 2)$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{c}_n$	$\mathfrak{d}_n$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{g}_2$
$a_{\alpha_i,-\delta}\,a_{-\delta,\alpha_i}$	4	$\begin{cases}1, & i=1,n\\ 0, & 1<i<n\end{cases}$	δ_{i1}	$2\delta_{i1}$	δ_{i2}	δ_{i2}	δ_{i1}	δ_{i8}	δ_{i1}	δ_{i2}
$S(A)$	$\mathfrak{a}_1^{(1)}$	$\mathfrak{a}_n^{(1)}$	$\mathfrak{b}_n^{(1)}$	$\mathfrak{c}_n^{(1)}$	$\mathfrak{d}_n^{(1)}$	$\mathfrak{e}_6^{(1)}$	$\mathfrak{e}_7^{(1)}$	$\mathfrak{e}_8^{(1)}$	$\mathfrak{f}_4^{(1)}$	$\mathfrak{g}_2^{(1)}$

大小関係は a_1 では $\|-\delta\| = \|\alpha_1\|$，$c_n$ では $\|-\delta\| > \|\alpha_1\|$ である．

2) $k = 2, 3$ のとき．

g_0 のディンキン図形 $\mathcal{D}$ が位数2の自己同型を持つのは，$a_n\ (n \geq 2)$，d_n，e_6 の場合だけである。また位数3の自己同型を持つのは d_4 だけである．以下 $\bar{\nu}$ を $\mathcal{D}$ の位数 $k > 1$ の自己同型とし，ν を(47)で定義される，$\bar{\nu}$ により引起される g の自己同型とする．

以下各タイプの単純リー環 g に対し，$L(g, \nu)$ の図形が表6 Table 2, 3の図形となることを確める。このときA型リー環については，階数の偶奇によって二つに分けて扱う必要がある．

1) $g = a_{2n}$，$k = 2$，$\bar{\nu}(i) = 2n - i + 1$

このとき，次式により $\{\bar{H}_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を定義する：

$$(48) \qquad \begin{aligned} \bar{H}_i &= H_i + H_{2n-i+1} & & \bar{H}_n = 2(H_1 + H_{n+1}) \\ \bar{X}_i &= X_i + X_{2n-i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), & & \bar{X}_n = X_n + X_{n+1} \\ \bar{Y}_i &= Y_i + Y_{2n-i+1} & & \bar{Y}_n = 2(Y_n + Y_{n+1}) \end{aligned}$$

このとき $\bar{H}_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i$ は ν で不変であるから，$g_0 = \{X \in g \mid \nu X = X\}$ に含まれる．$\{H_i, X_i, Y_i\}$ の間の交換法則は既知であるから，それを用いて $\{\bar{H}_i, \bar{X}_i, \bar{Y}_i\}$ の間の交換法則を求めることができる．それは

$$(49) \qquad [\bar{X}_i, \bar{Y}_j] = \delta_{ij} \bar{H}_i, \quad [\bar{H}_j, \bar{X}_j] = a_{ji} \bar{X}_j, \quad [\bar{H}_i, \bar{Y}_j] = -a_{ji} \bar{Y}_j.$$

の形である．ここで a_{ji} は整数で，行列 (a_{ji}) は c_n のカルタン行列であることが直接計算で a_{ji} を求めることによって確められる．

g_0 の部分リー環 $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\bar{H}_i$ は，g のカルタン部分環 $f = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{C}H_i$

のなかで，ν で不変な元の全体である．$\mathfrak{h}$ は $\hat{\mathfrak{h}}$ の正則元を含むから，$\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ ($\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化環) となる．特に $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_0$ の極大可換部分環である．さて $\mathfrak{g}_0$ の中心 $\mathfrak{c}_0$ は $\mathfrak{h}$ に含まれる．そして $\sum_{i=1}^{n} c_i\overline{H}_i$ がすべての $\overline{X}_j$ と可換ならば，$\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ji}=0$ $(1\leq i\leq n)$ となる．行列 $(a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ は正則だから，これより $c_i=0$ $(1\leq i\leq n)$ を得る．これは $\mathfrak{c}_0=0$ を意味する．従って完約リー環 $\mathfrak{g}_0$ は半単純である．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{h}$ は半単純一次変換のみからなるので，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分環である．そして $\mathbb{C}\overline{X}_j$ は $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h})$ のルート空間であり，対応するルートを $\overline{\alpha}_j$ とすると，(49) 第二式から $\overline{\alpha}_j(\overline{H}_i)=a_{ji}$ となる．$\det(a_{ji})\neq 0$ だから，$\{\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_n\}$ は一次独立である．そこで $\{\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_n\}$ を基底として $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{R}\overline{H}_i$ の双対空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 上に字引式順序をいれるとき，$\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$ をそれぞれ $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{z}(\mathfrak{h}))$ の正，負のルートに対するルート空間から張られる部分空間とすると，これらは部分リー環でもある。そして直和分解

(50)
$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\oplus\mathfrak{n}^+$$

が成立つ．このとき $\mathfrak{n}^+$ は X_i $(1\leq i\leq n)$ と，X_{i_λ} 達の任意の $r\in\mathbb{N}$ $(r>1)$ に対する r 階交換子 $[X_{i_1},\cdots,X_{i_r}]$ によって張られる．$\overline{\nu}\Delta^+=\Delta^+$ だから，ν は $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$ をそれぞれ不変にする．そこで ν の不変空間

(51)
$$\mathfrak{g}_0=(\mathfrak{n}^-\cap\mathfrak{g}_0)\oplus\mathfrak{h}\oplus(\mathfrak{n}^+\cap\mathfrak{g}_0)$$

が成立つ．そして $\mathfrak{n}^+\cap\mathfrak{g}_0$ は，$\overline{X}_i$ 達と任意の

(52)
$$\overline{X}_{(i)}=[X_{i_1},\cdots,X_{i_r}]+\nu[X_{i_1},\cdots,X_{i_r}]\qquad(r>1)$$

から張られる。いま $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}\}$ を $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{f}))$ の単純ルート系とするとき、元 $\bar{X}_{(i)}$ は $\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}$ (ルート) に対する $\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$ の同時固有ベクトルである。$\alpha_j|\mathfrak{f} = \bar{\alpha}_i$ (ただし $i=j$ または $\bar{\nu}(j)$) であるから、$\bar{X}_{(i)} \in \mathfrak{g}_0^{\beta}$ ただし β は $\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_n$ からとった r 個のルートの和である。そこで $\{\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_n\}$ はルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{f})$ の単純ルートであり、しかも $\dim \mathfrak{f} = n$ だから、これ以外に単純ルートはない。$\bar{\alpha}_j(\bar{H}_i) = a_{ji}$ だから ルート系のカルタン行列は (a_{ji}) であるから、$\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{f})$ は B_n 型ルート系である。

最後に $L(\mathfrak{g}, \nu)$ に対する $S(A)$ を定めよう。Lemma 9.1) により $S(A)$ のある頂点 P_0 をとるとき、$S(A)-\{P_0\}$ は $\mathfrak{g}_0$ のディンキン図形となる。

(α が $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{f})$ の単純ルートならば、$(\alpha, 0)$ は $L(\mathfrak{g}, \nu)$ の単純ルートとなる) そこで今の場合 $(\bar{\alpha}_1, 0), \cdots, (\bar{\alpha}_n, 0)$ は、$L(\mathfrak{g}, \nu)$ の $\mathfrak{f}$ に関する単純ルートである。いま $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{f}))$ の最大ルートを δ とする。$\mathfrak{g}$ は A_{2n} 型だから、その単純ルート $\alpha_1 = e_1 - e_2, \cdots, \alpha_{2n} = e_{2n} - e_{2n+1}$ に対し、その順序にとった和 $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \cdots + \alpha_j$ はまたルートであり、従って最大ルートは $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2n}$ である。そこで

$$Y = [(\mathrm{ad}\,Y_n)(\mathrm{ad}\,Y_{n-1})\cdots(\mathrm{ad}\,Y_2)Y_1,\ (\mathrm{ad}\,Y_{n+1})(\mathrm{ad}\,Y_{n+2})\cdots(\mathrm{ad}\,Y_{2n-1})Y_{2n}]$$

は、$\mathfrak{g}^{-\delta}$ の 0 でない元である。また上の Y を $Y = [Z, W]$ とかくとき、$\nu \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ に対し $\nu((\mathrm{ad}X)Y) = \nu([X, Y]) = [\nu X, \nu Y] = (\mathrm{ad}(\nu X))(\nu Y)$ である。

一方 $\bar{\nu}(n+1) = n, \bar{\nu}(n+2) = n+1, \cdots, \bar{\nu}(1) = 2n$; $\bar{\nu}(n+1) = n, \cdots, \bar{\nu}(2n) = 1$ なる $\nu Z = W, \nu W = Z$ だから $\nu Y = [\nu Z, \nu W] = [W, Z] = -Y$ で、$Y \in \mathfrak{g}_1$ となる。そこで $0 \neq Y \in \mathfrak{g}^{-\delta} \cap \mathfrak{g}_1$

表7　複素単純リー環の位数2の自己同型の固定部分環

(ヘルガソン[20]より引用)

TABLE I

THE ORDER k OF ν AND THE ALGEBRA $\mathfrak{g}_0$

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{a}_{2n}$	$\mathfrak{a}_{2n-1}$	$\mathfrak{d}_{n+1}$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{d}_4$
k	2	2	2	2	3
$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{c}_n$	$\mathfrak{b}_n$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{g}_2$
$S(A)$	$\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$	$\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$	$\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$	$\mathfrak{e}_6^{(2)}$	$\mathfrak{d}_4^{(3)}$

TABLE II

($\mathfrak{g}_0$ SEMISIMPLE)

$k=1$			$k=2$		
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	実形	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	実形
$\mathfrak{b}_n$ $(n>2)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(2 \leq p \leq n)$	BI	$\mathfrak{a}_{2n}$ $(n \geq 1)$	$\mathfrak{b}_n$	AI
$\mathfrak{c}_n$ $(n>1)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$ $(1 \leq p \leq [\frac{1}{2}n])$	CII	$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n>2)$	$\mathfrak{d}_n$	AI
			$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n>2)$	$\mathfrak{c}_n$	AII
$\mathfrak{d}_n$ $(n>3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{d}_{n-p}$ $(2 \leq p \leq [\frac{1}{2}n])$	DI	$\mathfrak{d}_{n+1}$ $(n>1)$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(0 \leq p \leq [\frac{1}{2}n])$	DI
$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	GI	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{c}_4$.	EI
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{b}_4$	FII	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{f}_4$	EIV
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{c}_3$	FI			
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_5$	EII			
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_7$	EV			
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{d}_6$	EVI			
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{e}_7$	EIX			
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{d}_8$	EVIII			

TABLE III

($\dim(\text{center}(\mathfrak{g}_0)) = 1$)

$\mathfrak{g}$	$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$	実形	$\mathfrak{g}$	$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$	実形
$\mathfrak{a}_n$ $(n \geq 1)$	$\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-p-1}$ $0 \leq p \leq [\frac{1}{2}(n-1)]$	AIII	$\mathfrak{d}_n (n>3)$	$\mathfrak{d}_{n-1}$	DI
			$\mathfrak{d}_n (n>4)$	$\mathfrak{a}_{n-1}$	DIII
$\mathfrak{b}_n (n>2)$	$\mathfrak{b}_{n-1}$	BI	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{d}_5$	EIII
$\mathfrak{c}_n (n>1)$	$\mathfrak{a}_{n-1}$	CI	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_6$	EVII

$\subset L(\mathfrak{g},\nu)^{(-\delta^*,1)}$ となる。一方 lemma 4' により $\dim L(\mathfrak{g},\nu)^{(-\delta^*,1)}=1$ だから

(53) $$x\mathfrak{g}^{-\delta}\cap\mathfrak{g}_1 = L(\mathfrak{g},\nu)^{(-\delta^*,1)}$$

となる。元 $\bar{Y}_i\ (1\leq i\leq n)$ はすべて (53) の左辺と可換である ($-\delta$ が $\mathfrak{g}$ の最小ルートだから). また $\bar{\alpha}_i\ (1\leq i\leq n)$ は $\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h})$ の単純ルートの全体だから, $\bar{Y}_i\ (1\leq i\leq n)$ は $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{n}^-$ を生成する. Lemma 5', 3) により $(-\delta^*,1)-(\bar{\alpha},0)\notin\tilde{\Delta}^+$ がすべての $(\bar{\alpha},0)\in\Delta_0^+$ に対して成立つ. 従って $(-\delta^*,1)$ は $L(\mathfrak{g},\nu)$ の $\mathfrak{h}$ に関する単純ルートである. $\therefore \Pi=\{-\delta^*,\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n\}$ である.

$\mathfrak{b}_n$ 型ルート系である $\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h})$ の最大ルート $\bar{\delta}$ は, $\bar{\delta}=\bar{\alpha}_1+2(\bar{\alpha}_2+\cdots+\bar{\alpha}_n)$ である. $\alpha_j|\mathfrak{h}=\bar{\alpha}_j$ または $\bar{\alpha}_{\sigma(j)}$ だから, $\delta^*=\delta|\mathfrak{h}=(\alpha_1+\cdots+\alpha_{2n})|\mathfrak{h}=2(\bar{\alpha}_1+\cdots+\bar{\alpha}_n)=\bar{\alpha}_1+\bar{\delta}$ である。ある正規直交系 (e_n) に関し, $\bar{\alpha}_1=e_1-e_2$, $\bar{\delta}=e_1+e_2$ だから, $\langle\bar{\alpha}_1,\bar{\delta}\rangle=0$ である。従って

(54) $$\langle\bar{\alpha}_1,-\delta^*\rangle=\langle\bar{\alpha}_1,-\bar{\alpha}_1-\bar{\delta}\rangle=-\langle\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_1\rangle<0$$

となる。従って $S(A)$ は $S(A)-\{-\delta^*\}=\mathfrak{b}_n$ に, $-\delta^*$ を添加して得られる。$\delta^*=\bar{\alpha}_1+\bar{\delta}=(e_1-e_2)+(e_1+e_2)=2e_1$ だから $\|\delta^*\|^2=4>2=\|\bar{\alpha}_1\|^2$ だから $\overset{-\delta^*}{\circ}\Longrightarrow\overset{\bar{\alpha}_1}{\circ}$ であるから, $S(A)$ は表6 Table 2 の $\mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$ となる.

他の単純リー環 $\mathfrak{a}_{2n-1}$, $\mathfrak{d}_n\ (n\geq 4)$, $\mathfrak{e}_6$ に対しても, 同様の方法で, ディンキン図形の自己同型 $\bar{\nu}$ から引起される $\mathfrak{g}$ の自己同型 (位数 $k=2,3$) ν に対し, $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ と, ν の不変部分リー環 $\mathfrak{g}_0$ を定めることができる. その結果は, 表7の中の Table I に記してある. ∎

注意1 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ が共に $\mathbb{C}$ 上の単純リー環で, σ,σ' がそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$

の有限位数の自己同型とする。このとき $L(\mathfrak{g},\sigma)$ と $L(\mathfrak{g}',\sigma')$ の図形が共に $S(A)$ で一致すれば $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}'$ である (Lemma 10 による). ——

注意 2. $k=2,3$ のときの $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形として現われるものは表 6 の Table 2, 3 の中の図形だけで Table 1 の図形は現われない。それは $\mathfrak{g}=A_n\ (n\geq 2)$, $D_n\ (n>3)$, E_6 のときの $L(\mathfrak{g},I)$ の図形として Table 1 に現われるものは一重稜のみの図形である。一方表 7 Table I にみるように、$k=2,3$ の自己同型 ν の不変元の作る部分環 $\mathfrak{g}_0$ は、表 7 Table I にあるように、$\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$ ですべて二重稜または三重稜を含む。従って $\mathfrak{g}_0$ のディンキン図形を部分図形として含む $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ は二重稜または三重稜を含まなければならない。——

定義 10 前と同じく $\mathfrak{g}$ を複素単純リー環, ν を $\mathfrak{g}$ のディンキン図形 $\mathfrak{D}$ の自己同型 $\bar{\nu}$ から引起される $\mathfrak{g}$ の自己同型 (Lemma 12 の証明で $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_{2n}$ に対して与えたものなどと同様のもの, ヘルガソン [10] p. 507 参照) とする。ν の位数を k とする。$k=1,2,3$ である。$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_k}\mathfrak{g}_i$ で $\sigma\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}_{i+1}$ でかつ $\dim\mathfrak{g}_1=\frac{1}{k}\dim\mathfrak{g}>0$. 表 7 Table I からわかるように $\mathfrak{g}_0$ は単純リー環である。$\beta\in\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h})$ が単純ルートならば, $\hat{\beta}=(\beta,0)$ も $L(\mathfrak{g},\nu)$ の $\mathfrak{h}$ に関する単純ルートである。今 $(\alpha_0,1)$ の形の $L(\mathfrak{g},\nu)$ のルートの内で最小のものを $\hat{\alpha}_0$ とする。$(\alpha_0,1)=(\beta,1)+(\gamma,0)$, $(\beta,1),(\gamma,0)\in\hat{\Delta}^+$ のような分解は存在しないから, $\tilde{\alpha}_0$ は $L(\mathfrak{g},\nu)$ の単純ルートである。Lemma 9 により, $N=n+1$

だから，$L(\mathfrak{g},\nu)$ の単純ルートの全体は

(55) $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_n$；ただし $\hat{\alpha}_0=(\alpha_0,1)$，$\hat{\alpha}_i=(\alpha_i,0)$ $(1\leq i\leq n)$

でつくされる．

いま $n+1$ 個の非負整数の列 $(s_0,s_1,\cdots,s_n)\neq 0$ が与えられたとき，$L(\mathfrak{g},\nu)$ の新しい次数付け（次数群$=\mathbb{Z}$）を，次のように定義する．いま $\alpha=\sum_{i=0}^{n}k_i\hat{\alpha}_i$ に対して $\deg\alpha=\sum_{i=0}^{n}k_is_i$ とする．そして

(56) $$L(\mathfrak{g},\nu)=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}L(\mathfrak{g},\nu)_j，\quad ただし$$

(57) $$L(\mathfrak{g},\nu)_j=\sum_{\deg\alpha=j}L(\mathfrak{g},\nu)^{\alpha}\quad とする．$$

この次数づけを，型 $(s_0,\cdots,s_n)$ の次数づけという．

定理 13

$\mathfrak{g}$ を複素単純リー環，σ を $\mathfrak{g}$ の有限位数の自己同型写像とする。このとき Lemma 11, 12 により，$\mathfrak{g}$ のディンキン図形の自己同型から引起される $\mathfrak{g}$ の自己同型 ν があって，$L(\mathfrak{g},\sigma)$ と $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ が一致するものが存在する．いま $L(\mathfrak{g},\nu)$ の $\mathfrak{h}$ に関する単純ルートの全体が $\{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_n\}$ であり，$\hat{\beta}_i=(\beta_i,s_i)$ とする。一方 $L(\mathfrak{g},\sigma)$ の $\mathfrak{h}$ に関する単純ルートは $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,\cdots,\hat{\alpha}_n\}$ で，$\hat{\alpha}_0=(\alpha_0,1)$，$\hat{\alpha}_i=(\alpha_i,0)$ $(1\leq i\leq n)$ であるとする．このとき $L(\mathfrak{g},\nu)$ と $L(\mathfrak{g},\sigma)$ は，$\mathbb{Z}$ を次数群とする型 $(s_0,\cdots,s_n)$ の次数付きリー環として同型である．

証明　$L(\mathfrak{g},\sigma)$ と $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ は一致し，$S(A)$ は一般カルタン行列 A を定める (Lemma 11)．従って単純ルートの順番を適当

にとれば、全単写 $\hat{\beta}_i \mapsto \hat{\alpha}_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ により $L(\mathfrak{g}, \nu)$ と $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の一般カルタン行列が一致することになる。このとき、ルート $\hat{\beta} = \sum_{i=0}^{n} k_i \hat{\beta}_i$ にルート $\tilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} k_i \hat{\alpha}_i$ が対応し、Lemma 10, 1) により同型写像 $\hat{\varphi} : L(\mathfrak{g}, \sigma) \to L(\mathfrak{g}, \nu)$ が、$L(\mathfrak{g}, \sigma)^{\hat{\beta}}$ を $L(\mathfrak{g}, \nu)^{\tilde{\alpha}}$ の上に写す。

従ってこのとき二つの次数付きリー環の型 $(s_0, \cdots, s_n)$ の次数付けは、$\hat{\varphi}$ によって対応する。■

Lemma 14

$\mathfrak{g}, \nu, k$ を Lemma 12 と同じとする。表6の Table k において単純ルート $\tilde{\alpha}_0, \cdots, \tilde{\alpha}_n$ の上に記された数字を $a_0, \cdots, a_n$ とする。$L(\mathfrak{g}, \nu)$ に型 $(s_0, \cdots, s_n)$ の次数付けを与えたとき、$m = k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$ とおくとき、

$$(58) \qquad x^k L_j = L_{j+m} \qquad \text{が成立つ。}$$

証明 $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0, 1)$, $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_i, 0)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ である。また表6 各 $S(A)$ に対し、数字の列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ は、$\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i = 0$ をみたす。また表6 のすべての $S(A)$ に対し $a_0 = 1$ であるから次の (59) が成立つ:

$$(59) \qquad (0, k) = k \sum_{i=0}^{n} a_i \tilde{\alpha}_i, \quad \text{従って} \quad \deg(0, k) = k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i = m.$$

一方 $L^{\tilde{\alpha}} \subset L_j$ となる任意のルート $\tilde{\alpha} = (\alpha, j)$ に対して、$L^{\tilde{\alpha}} = \{x^j X \mid X \in \mathfrak{g}_{j \bmod k}, [H, X] = \alpha(H) X \ (\forall H \in \mathfrak{h})\}$ であり、$x^k L^{\tilde{\alpha}} \subset L^{\tilde{\alpha} + (0, k)}$ で $\deg(\tilde{\alpha} + (0, k)) = j + m$

$$(60) \qquad x^k L_j \subset L_{j+m}$$

となる。そこで $x^{-k} L_{j+m} \subset L_j$ となるから x^k をかけて

$$(61) \qquad L_{j+m} \subset x^k L_j$$

となる。(60) と (61) により (58) が成立つ。■

カッツの理論の主定理は、次の定理である.

定理 15

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純リー環とし, $\mathfrak{g}$ のディンキン図形の自己同型 $\bar{\nu}$ から引起される $\mathfrak{g}$ の自己同型を ν とし, その位数を k とする ($k=1,2,3$). ν による次数群 $\mathbb{Z}_k$ の $\mathfrak{g}$ の次数づけを

(62) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_k} \mathfrak{g}_i^{\nu}$$

とする. $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$ に対して, $\mathfrak{h}^{\nu} = \{H\in\mathfrak{h} \mid \nu H = H\} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0^{\nu}$ とおくとき, $\mathfrak{h}^{\nu}$ は $\mathfrak{g}_0^{\nu}$ のカルタン部分環である. ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_0^{\nu}, \mathfrak{h}^{\nu})$ の単純ルート系を $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ とし, それに対応する $\mathfrak{g}_0^{\nu}$ の標準生成元を $\{X_i, Y_i, H_i \mid 1\leq i\leq n\}$ とする. $(\alpha_0, 1)$ の形の $L(\mathfrak{g},\nu)$ のルート中最小のものを $\hat{\alpha}_0$ とし, $tX_0 \in L(\mathfrak{g}_0^{\nu},\nu)^{\hat{\alpha}_0}$ となる $0\neq X_0\in\mathfrak{g}_1^{\nu}$ を一つ固定しておく. $0\neq(s_0,\cdots,s_n)\in\mathbb{N}^{n+1}$ は, 公約数 $a>1$ を持たないものとする。いま単純ルート $\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_n\}$ に対応する $L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ (表6) において, 頂点 $\hat{\alpha}_i$ の上に記された数字を a_i ($0\leq i\leq n$) とする。ただし $\hat{\alpha}_i = (\alpha_i, 0)$ ($1\leq i\leq n$) である. このとき

(63) $$m = k\sum_{i=0}^{n} a_i s_i$$

とおく. また ε を1の原始 m 乗根とする. このとき次の 1), 2), 3) が成立つ:

1) $\mathfrak{g}$ の元 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ は $\mathfrak{g}$ を生成する. このとき

(64) $$\sigma X_i = \varepsilon^{s_i} X_i, \quad (0\leq i\leq n)$$

によって $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 σ が定義され, σ の位数は m である.

このような自己同型σを，型$(s_0,\cdots,s_n)$の自己同型という．

2) $\{i\in\{0,1,2,\cdots,n\}\mid s_i=0\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$とする．このとき

(65) $\mathfrak{g}_0^\sigma=\mathfrak{z}_0\oplus\mathfrak{m}$，$\mathfrak{z}_0$は$\mathfrak{g}_0^\sigma$の中心で$n-t$次元．$\mathfrak{m}$＝半単純リー環

となる．$\mathfrak{m}$のディンキン図形は，$L(\mathfrak{g},\sigma)$の図形$S(A)$において頂点$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}\}$とその間の稜から成る部分図形である．

3) $\mathfrak{g}$の任意の位数mの自己同型は，1)で定義した自己同型σと，Aut $\mathfrak{g}$の中で共役である．

証明 1) a) $X_0,\cdots,X_n$は$\mathfrak{g}$を生成する．

$\varphi: L(\mathfrak{g},\nu)\to\mathfrak{g}$を被覆準同型とし，$P=\sum_{j=1}^{k}x^j\mathfrak{g}_{j \bmod k}$とおく．

$\varphi(P)=\sum_{j=1}^{k}\mathfrak{g}_{j \bmod k}=\mathfrak{g}$である．lemma 10, 1)の証明から，元$e_0=xX_0$，$e_1=X_1,\cdots,e_n=X_n$は，$L(\mathfrak{g},\nu)$の部分リー環$L(\mathfrak{g},\nu)^+=\bigoplus_{\alpha>0}L(\mathfrak{g},\nu)^\alpha$を生成する．一方$L(\mathfrak{g},\nu)^+\supset P$であるから，$\mathfrak{g}\supset\varphi(L(\mathfrak{g},\nu)^+)\supset\varphi(P)=\mathfrak{g}$，従って$\varphi(L(\mathfrak{g},\nu)^+)=\mathfrak{g}$で，$X_0,\cdots,X_n$は$\mathfrak{g}$を生成する．

b) σの定義．

先ず$L(\mathfrak{g},\nu)$の自己同型$\hat\sigma$を，

(66) $$\hat\sigma(e_\alpha)=\varepsilon^{\sum_{i=0}^{n}k_is_i}e_\alpha \quad \text{if } \alpha=\sum_{i=0}^{n}k_i\alpha_i,\ e_\alpha\in L(\mathfrak{g},\nu)^\alpha$$

によって定義する．($L(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}L^\alpha$ (直和) だから(66)により一次変換として$\hat\sigma$が定義される．(勿論$\mathfrak{h}=L^0$と考える)．そして$[L^\alpha,L^\beta]\subset L^{\alpha+\beta}$だから，$\hat\sigma$はリー環の自己同型となる．) いま

(67) $$L(\mathfrak{g},\nu)=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}L_j$$

を，$L(\mathfrak{g},\nu)$の型$(s_0,\cdots,s_n)$の次数群$\mathbb{Z}$の次数付けとする．

このとき $L_j \subset \{X \in L(\mathfrak{g},\nu) \mid \hat{\sigma} X = \varepsilon^{j} X\} = L(\mathfrak{g})$ となる。一方 Lemma 14 から $x^{k}L_j = L_{j+m}$ だから、$x^{k}L_j \subset L(\mathfrak{g})$ である。そこで $L(\mathfrak{g},\nu)$ のイデアル $(1-x^{k})L(\mathfrak{g},\nu)$ は $\hat{\sigma}$ で不変である。一方被覆準同型 φ の核 $\ker\varphi$ が $(1-x^{k})L(\mathfrak{g},\nu)$ となる。従って $L(\mathfrak{g},\nu)$ の自己同型 $\hat{\sigma}$ から、剰余リー環 $\mathfrak{g} = L(\mathfrak{g},\nu)/\ker\varphi$ の自己同型 σ が生ずる。$xX_0 \in L^{\hat{s}_0}$ だから、$\hat{\sigma}(xX_0) = \varepsilon^{s_0}\cdot xX_0$ で、φ を作用させて $\varphi\circ\hat{\sigma} = \sigma\circ\varphi$ を用いると、$\sigma X_0 = \varepsilon^{s_0}X_0$ となる。また $X_i \in L^{\hat{s}_i}$ $(1\leq i\leq n)$ だから、$\hat{\sigma} X_i = \varepsilon^{s_i} X_0$, $\sigma X_i = \varepsilon^{s_i} X_i$ となり、(64) が成立つ。

$$\begin{tikzcd} L(\mathfrak{g},\nu) \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\varphi"'] & L(\mathfrak{g},\nu) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\sigma"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

c) σ の位数は m.

σ の位数を l とする。$\varepsilon^{m}=1$ だから、$\sigma^{m}=I$ であり、$l \mid m$ である。そこで $m = lf$ となる $f\in\mathbb{Z}^{+}$ がある。$\sigma^{l}=I$ だから、$X_i = \sigma^{l}X_i = \varepsilon^{ls_i}X_i$, $\varepsilon^{ls_i}=1$ $(0\leq i\leq n)$ となる。ε は1の原始 m 乗根だから、$m \mid ls_i$ $(0\leq i\leq n)$ となるので、$f \mid s_i$ $(0\leq i\leq n)$ である。$(s_0,\cdots,s_n)$ の正の公約数は1だけだから、$f=1$ で、$l=m$ となる。

2) σ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ を不変にする (Lemma 2)。そこで $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\sigma} = \{X\in\mathfrak{g} \mid \sigma X = X\}$ 及び $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_0 = \{X\in\mathfrak{u} \mid \sigma X = X\}$ とおくとき、$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}}$ となる。$\mathfrak{u}$ はコンパクト・リー環だから、$\mathfrak{u}_0$ は完約である。従って $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}}$ も完約で、中心 $\mathfrak{z}_0$ と導来環 $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] = \mathfrak{m}$ の直和となる。そして $\mathfrak{m}$ は半単純である。このとき $\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$ は、$\mathfrak{z}_0$ と $\mathfrak{m}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}$ の直和である：

(68) $$\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_0 \oplus \mathfrak{h}_m$$

位数 m の $\mathfrak{g}$ の自己同型 σ による、$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}_m$-次数づけ $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_m}\mathfrak{g}_i$ を考える。任意の $r\in\mathbb{Z}$ に対し lemma 14 により、

(69) $$\varphi(L_{j+rm}) = \varphi(x^{kr}L_j) = \varphi(L_j)$$

となるから、$\varphi(L_j)=\mathfrak{g}_{j \bmod m}$ である。また $L_j\cap(1-x^k)L(\mathfrak{g},\nu)=0$ だから、φ は L_j から $\mathfrak{g}_{j \bmod m}$ の上への線型同型写像を与える。特に

(70) $$\mathfrak{g}_0 \cong \bigoplus_{\deg\tilde{\alpha}=0} L(\mathfrak{g},\nu)^{\tilde{\alpha}}$$

が成立つ。一方 $\deg\tilde{\alpha}$ の型は $(s_0,\dots,s_n)$ で、$s_i=0 \Leftrightarrow i\in\{i_1,i_2,\dots,i_t\}$ だから、$\deg\tilde{\alpha}=0 \iff \tilde{\alpha}=\sum_{r=1}^{t} k_{i_r}\tilde{\alpha}_{i_r}$ である。lemma 10 の証明中に注意されているように、$\tilde{\alpha}>0$ のとき、$L(\mathfrak{g},\nu)^{\tilde{\alpha}}$ は交換子 $[e_{j_1},\dots,e_{j_s}]$ で、$e_j=e_{\tilde{\alpha}_j}\in L^{\tilde{\alpha}_j}$ かつ $\tilde{\alpha}_{j_1}+\cdots+\tilde{\alpha}_{j_s}=\tilde{\alpha}$ となるもので張られる。従って部分リー環

(71) $$\bigoplus_{\deg\tilde{\alpha}=0} L(\mathfrak{g},\nu)^{\tilde{\alpha}}$$

は、$\{H_i, e_{i_r}, f_{i_r} \mid 1\le i\le n,\ 1\le r\le t\}$ から生成される。$Y_j=\varphi(f_j)$ とおくとき、$2t$ 個の元 $\{X_{i_r}, Y_{i_r}\mid 1\le r\le t\}$ は、簡約リー環 $\mathfrak{g}_0$ の半単純成分 $\mathfrak{m}$ を生成する。$\mathfrak{m}$ のカルタン行列は、$(a_{i_k i_l})_{1\le k,l\le t}$ である。これは $L(\mathfrak{g},\nu)$ の一般カルタン行列 (a_{ij}) の小行列である。

従って $\mathfrak{m}$ のディンキン図形 $\mathcal{D}$ は、$L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ において、頂点 $\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_t}\}$ とその間の線から成る部分図形である。そこで $\operatorname{rank}\mathfrak{m}=\dim\mathfrak{h}_m=t$ であり、(68) により、$\dim\mathfrak{z}_0=\dim\mathfrak{h}-\dim\mathfrak{h}_m=n-t$ である。

3) τを$\mathfrak{g}$の位数mの任意の自己同型とし，εを1の原始m乗根とする．$\mathfrak{g}_j^\tau = \{X \in \mathfrak{g} \mid \tau X = \varepsilon^j X\}$とおくとき，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in Z_m} \mathfrak{g}_j^\tau$となり$\mathfrak{g}$の一つの$Z_m$次数づけが得られる．今$\varphi' : L(\mathfrak{g}, \tau) \to \mathfrak{g}$を被覆準同型とする．このとき2)の証明で示したように，

(72) $$\varphi'(L(\mathfrak{g}, \tau)_j) = \mathfrak{g}_{j \bmod m}$$

である．定理13により，型$(s_0, \cdots, s_n)$を持つZ次数付けを持つリー環$L(\mathfrak{g}, \nu)$があって，$L(\mathfrak{g}, \nu) \cong L(\mathfrak{g}, \tau)$となるものが存在する．Lemma 10, 2)により，$\mathfrak{g}$の適当な自己同型ψが存在して

(73) $$\psi(\varphi'(L(\mathfrak{g}, \tau)_j)) = \varphi(\bigoplus_{\deg \alpha = j} L(\mathfrak{g}, \nu)^\alpha)$$

となる．そこでψは，τのε^j-固有空間$\mathfrak{g}_j^\tau$を，1)で構成された型$(s_0, \cdots, s_n ; k)$の$\mathfrak{g}$の自己同型σのε^j-固有空間$\mathfrak{g}_j^\sigma$の上に写す．故に

(74) $$\psi \circ \tau \circ \psi^{-1} = \sigma$$

となり，τはσに$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$内で共役である．∎

上の定理15は，任意の自然数mを位数とする$\mathfrak{g}$の自己同型に適用できる．ここでは我々の目的である$\mathfrak{g}$の実形の分類のために，位数2の場合を調べよう．

定理A

1) $\mathfrak{g}$の自己同型σの位数mが2のときの位数の公式(63)は，

(75) $$2 = k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$$

である。(75)の解となる$k, a_i, s_i \in N$ $(0 \leq i \leq n)$の値は次の(イ)(ロ)(ハ)の三組しかない．

(イ)　$k=1$，$a_{i_0}=2$，$s_{i_0}=1$，$s_i=0$ $(i\neq i_0)$

(ロ)　$k=2$，$a_{i_0}=s_{i_0}=1$，$s_i=0$ $(i\neq i_0)$

(ハ)　$k=1$，$a_{i_0}=a_{i_1}=1$，$s_{i_0}=s_{i_1}=1$ $(i_0\neq i_1)$，$s_i=0$ $(i\neq i_0, i_1)$.

2)　σ の固定部分環$\mathfrak{g}$は完約で中心$\mathfrak{z}_0$と半単純リー環$\mathfrak{m}$の直和である。1) の(イ)(ロ)(ハ)の場合に応じて，$\dim\mathfrak{z}_0$は，(イ)(ロ) 0，(ハ) 1 である．半単純リー環$\mathfrak{m}$のディンキン図形Sは，$L(g,V)$の図形$S(A)$の部分図形であり，(イ)(ロ)の場合には$S(A)-\{\alpha_{i_0}\}$，(ハ)の場合には，$S(A)-\{\alpha_{i_0},\alpha_{i_1}\}$である．

3)　$\mathfrak{m}$の具体的な形は，表7の Table II, III に与えられている．

(イ),(ロ) の場合には$\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_0$で，それは表7の Table II の$k=1$および$k=2$の所に記されている．(ハ)の場合は$\mathfrak{m}=[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$で，表7 Table III にある．

証明　1)　(75) において正整数kの取り得る値は$k=1,2$だけである．$k=2$のときは，一つのi (それをi_0とする) に対してのみ$a_{i_0}s_{i_0}=1$，他の$a_is_i=0$で，$a_i>0$だから$s_i=0$である．これが(ロ)の場合である．$k=1$のときは，(イ)または(ハ)の場合になる．

2)　定理15, 2) により$\dim\mathfrak{z}_0=n-t$で，tは$s_i=0$となるiの個数である．そこで(イ)(ロ)(ハ)の場合に応じて，$t=n,n,n-1$であり，$\dim\mathfrak{z}_0=0,0,1$となる．そして$\mathfrak{m}$のディンキン図形は，それぞれ$S(A)-\{\alpha_{i_0}\}$ (イ)(ロ)；$S(A)-\{\alpha_{i_0},\alpha_{i_1}\}$ (ハ) となる．

3) (イ)のとき.

表6のS(A)において頂点α_iに記されている数字a_iが2となるものを取出す. $S(A)=\mathfrak{A}_n^{(1)}$ $(n>1)$ではすべての$a_i=1$だから, このような頂点はない. 従って$\mathfrak{A}_n^{(1)}$ $(n>1)$に対しては(イ)の場合の対合的自己同型は存在しない. $S(A)=\mathfrak{B}_n^{(1)}$に対しては$a_i=2$となる頂点は$n-1$個あり, $\{\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$がそうである。そこでこの場合(イ)の場合の対合的自己同型は$n-1$個あり. そのとき$\mathfrak{g}_0$のディンキン図形は, $S(A)-\{\alpha_i\}$ $(2\leqq i\leqq n)$であり, その形から, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{D}_i \oplus \mathfrak{B}_{n-i}$ $(2\leqq i\leqq n)$である. 他のS(A)の場合も同様で, $\mathfrak{g}_0$の形は, 表7 Table II の$k=1$の所に記されている.

(ロ)のとき.

$k=2$だから表6のTable 2にあるS(A)において, $a_{i_0}=1$となる頂点α_{i_0}を考える. このとき$\mathfrak{g}_0$のディンキン図形は, $S(A)-\{\alpha_{i_0}\}$となる。

$S(A)=\mathfrak{A}_{2n}^{(2)}$では, $a_i=1$となるiは$i=0$だけである. このとき$S(A)-\{\alpha_0\}=\mathfrak{B}_n$である. $S(A)=\mathfrak{A}_{2n-1}^{(2)}$のときは, $a_i=1$となるiは, $i=0, 1, n$の3つである. $S(A)-\{\alpha_0\}$と$S(A)-\{\alpha_1\}$は同型で, 対応する自己同型はAut $\mathfrak{g}$で共役であり, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{C}_n$である。$S(A)-\{\alpha_n\}$のときは, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{D}_n$である. 他の場合も同様である。この場合の$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$は, 表7 Table II の$k=2$の所に記されている.

(ハ) のとき.

$k=1$ だから表6 Table I の $S(A)$ を考える. そして $a_{i_0}=a_{i_1}=1$ となる (i_0, i_1) $(i_0\neq i_1)$ をとる. 表6 Table I の $S(A)$ 中 $e_8^{(1)}, f_4^{(1)}, g_2^{(1)}$ には $a_i=1$ となる i が一つしかないから, (ハ)の場合の自己同型は存在しない.

$S(A)=\mathfrak{a}_n^{(1)}$ $(n>1)$ の場合, すべての $a_i=1$ である. いま α_{i_0} と α_{i_1} $(i_0<i_1)$ に対して $i_0<i<i_1$ となる整数 i が p 個あるとすると,

$$S(A)-\{\alpha_{i_0},\alpha_{i_1}\} = \underbrace{\circ\!-\!\circ\cdots\circ\!-\!\circ}_{p\text{個}}\quad \underbrace{\circ\!-\!\circ\cdots\circ\!-\!\circ}_{n-p-1\text{個}}$$ となるから,

$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] = \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-p-1}$ $\quad (0\leqq p\leqq [\frac{1}{2}(n-1)])$ である.

他の場合も同様である. その結果として生ずる対 $(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0])$ は, 表9 Table III に示されている. ∎

注意　定理A 3)の証明の(ロ)の場合で $\mathfrak{g}_0$ の図形が $S(A)-\{\alpha_0\}$ となる場合と $S(A)-\{\alpha_1\}$ となる場合の自己同型は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の中で共役であると述べたが, それは次の定理16による.

定理 16.

定理15の仮定および記号の下で, 次のことが成立つ.

σ, σ' がそれぞれ型 $(s_0,\cdots,s_n;k)$, $(s_0',\cdots,s_n';k')$ の有限位数の各の自己同型とするとき, 次の条件(a)と(b)は同値である.

(a)　σ と σ' は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の中で共役である.

(b)　$k=k'$ であって, かつ列 $(s_0,\cdots,s_n)$ と $(s_0',\cdots,s_n')$ は, 図形 $S(A)$ の自己同型 τ_0 によって移り合う.

証明 (b)⇒(a). $k=k'$ であって、$L(\mathfrak{g},\nu)$ の図形 $S(A)$ の自己同型 ψ_0 によって $(s_0,\cdots,s_n)$ が $(s_0',\cdots,s_n')$ に移るものとする。Lemma 10 により、ψ_0 は $L(\mathfrak{g},\nu)$ の自己同型 $\hat{\varphi}$ を引起し、$\hat{\varphi}\hat{\sigma}\hat{\varphi}^{-1}=\hat{\sigma}'$ となる。一方 $L(\mathfrak{g},\nu)$ の自己同型 μ_c と $\mathfrak{g}$ の自己同型 ψ は、Lemma 10, 2) により、$\varphi\circ\mu_c\circ\hat{\varphi}=\psi\circ\varphi$, $\mu_c\hat{\sigma}'=\hat{\sigma}'\mu_c$ をみたす。また $\varphi\circ\hat{\sigma}=\sigma\circ\varphi$, $\varphi\circ\hat{\sigma}'=\sigma'\circ\varphi$ が成立つ。これらによって次の(76)が成立つ。

(76) $$\psi^{-1}\sigma'\psi\varphi=\psi^{-1}\sigma'\varphi\mu_c\hat{\varphi}=\psi^{-1}\varphi\hat{\sigma}'\mu_c\hat{\varphi}=\psi^{-1}\varphi\mu_c\hat{\varphi}\hat{\sigma}=\varphi\hat{\sigma}=\sigma\varphi.$$

従って $\psi\sigma'\psi=\sigma$ となり、σ と σ' は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役である。

(a)⇒(b) 逆に σ と σ' が共役であると仮定する。

このとき $L(\mathfrak{g},\sigma)$ と $L(\mathfrak{g},\nu)$ および $L(\mathfrak{g},\sigma')$ と $L(\mathfrak{g},\nu')$ は同じ図形を持つから、σ と σ' が共役と合わせて、$L(\mathfrak{g},\nu)$ と $L(\mathfrak{g},\nu')$ の図形 $S(A)$ は同じである。従って ν と ν' の位数 k と k' は一致する：$k=k'$. またこのとき、$\nu=\nu'$ となる。今仮定により $\tau\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在して

(77) $$\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma'$$

となる。いま σ と σ' によって引起される、$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}_m$-次数づけを

(78) $$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_m}\mathfrak{g}_i\ ,\quad \mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_m}\mathfrak{g}_i'$$

とするとき、(77) により、次の (79) が成立つ：

(79) $$\tau\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}_i'\quad(\forall i\in\mathbb{Z}_m)$$

$\nu=\nu'$ だから、部分リー環 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^\nu=\mathfrak{h}^{\nu'}$ は、$\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_0'$ の共通のカルタン部分環である。一方 (79) により、$\tau\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0'$ だから、$\tau\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_0'$ の

カルタン部分環である。$\mathbb{C}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}_0'$ の任意の二つのカルタン部分環は、$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_0'$ の元 τ_1 により共役で、$\tau_1\tau\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ となる。$[\mathfrak{g}_0', \mathfrak{g}_i'] \subset \mathfrak{g}_i'$ だから、$\tau_1 \mathfrak{g}_i' = \mathfrak{g}_i'$ となる。従って任意の $X_i \in \mathfrak{g}_i'$ に対し

$$(80) \qquad \sigma'\tau_1 X_i = \varepsilon^i \tau_1 X_i = \tau_1(\varepsilon^i X_i) = \tau_1 \sigma' X_i, \quad \sigma'\tau_1 = \tau_1\sigma'$$

が成立つ。従って $\tau_1\tau\sigma(\tau_1\tau)^{-1} = \tau_1\sigma'\tau_1^{-1} = \sigma'$ となる。そこで τ の代りに $\tau_1\tau$ をとることができる。以下記号を簡略化するため、$\tau_1\tau$ を改めて τ と記すことにすると、この新しい τ に対し、(77), (79) が成立つ。

今自己同型 τ により、正のルート $\alpha \in \Delta([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{f} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])$ と、$\alpha' \in \Delta([\mathfrak{g}_0', \mathfrak{g}_0'], \mathfrak{f} \cap [\mathfrak{g}_0', \mathfrak{g}_0'])$ が対応するとしよう。すなわち、$\alpha' = \alpha \circ \tau^{-1}$ とする。いま $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_0' \subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ と考えられる（任意の $X \in \mathfrak{g}_0'$ に対し $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0'} X$ を $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ と同一視する）。$\tau \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ を、$L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の自己同型 $\hat{\tau}$ に拡張する（$\hat{\tau}(x^j Y) = x^j \tau(Y)$ とする）。このとき

$$(81) \qquad \hat{\tau}(L(\mathfrak{g}, \sigma)^{(\alpha, j)}) = L(\mathfrak{g}, \sigma')^{(\alpha', j)}$$

となる。そこで $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ の単純ルートの全体 $(\alpha_0, s_0), \cdots, (\alpha_n, s_n)$ は、$\hat{\tau}$ により、$L(\mathfrak{g}, \sigma')$ の単純ルートの全体 $(\alpha_0', s_0'), \cdots, (\alpha_n', s_n')$ に τ によって移される。特に列 $(s_0, \cdots, s_n)$ と $(s_0', \cdots, s_n')$ は、$L(\mathfrak{g}, \sigma)$ と $L(\mathfrak{g}, \sigma')$ の共通の図形 $S(A)$ の自己同型によって対応する。■

定理 B

複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の二つの位数 2 の自己同型写像 σ, σ' に対し、次の二つの条件 (a), (b) は同値である。

(a) σ と σ' は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役である；$\exists g\in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $\sigma'=g\sigma g^{-1}$.

(b) σ, σ' の固定の作る部分環を，$\mathfrak{g}_0=\{X\in\mathfrak{g}\mid \sigma X=X\}$, $\mathfrak{g}_0'=\{X\in\mathfrak{g}\mid \sigma' X=X\}$ とおくとき，$\mathfrak{g}_0\cong\mathfrak{g}_0'$ である.

証明 (a)⇒(b) $X\in\mathfrak{g}_0' \Leftrightarrow \sigma' X=X \Leftrightarrow g\sigma g^{-1}X=X \Leftrightarrow \sigma g^{-1}X=g^{-1}X \Leftrightarrow g^{-1}X\in\mathfrak{g}_0 \Leftrightarrow X\in g\mathfrak{g}_0$ である. 従って $g\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0'$ で $\mathfrak{g}_0\cong\mathfrak{g}_0'$.

(b)⇒(a) $\mathfrak{g}_0\cong\mathfrak{g}_0'$ となるための必要十分条件は，それらのディンキン図形 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ が一致することであるが，今の場合には，$\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ が $S(A)$ の部分図形として，$S(A)$ の自己同型で移り合うことが条件になる. 例えば定理 A, 1) の (イ) の場合には，$\mathfrak{g}_0$ のディンキン図形 $\mathfrak{D}$ は，表 6 Table 1 の $S(A)$ の一つにおいて，$a_i=2$ となる頂点 α_i を $S(A)$ から除いた $S(A)-\{\alpha_i\}$ として実現される.

具体的に $S(A)=C_n^{(1)}$ $(n>1)$ では，$a_i=2$ となるのは $i=1,2,\cdots,n-1$ の $n-1$ 個である. そして $S(A)-\{\alpha_{p-1}\}$ $(2\leq p\leq n-1)$ は $C_p\oplus C_{n-p}$ のディンキン図形である. $C_n^{(1)}$ は左右対称の図形なので，$S(A)-\{\alpha_{p-1}\}$ と $S(A)-\{\alpha_{n-p+1}\}$ は，$S(A)$ の自己同型（左右対称）で互いに移り合う. 従って定理16により，対応する自己同型は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役となる.

他の場合も同様で，$\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_0'$ のディンキン図形 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}'$ が同じになるのは，$\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}'$ が $S(A)$ の自己同型で移り合う場合しかないことが，すべての場合を個別にチェックすることにより確められる. ∎

B 実形の分類.

以下複素単純リー環$\mathfrak{g}$の実形を同型を除いて決定する. $\mathfrak{g}$のコンパクト実形$\mathfrak{u}$は, $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$で互いに共役であり, $\mathfrak{g}$の同型類と$\mathfrak{u}$の同型類は一対一に対応する。本稿では$\mathfrak{g}$の同型類は既知としているから, $\mathfrak{u}$の同型類も既知である。そこで以下では$\mathfrak{g}$の非コンパクト実形の同型類を決定する.

定義 1. $\mathfrak{g}$を複素半単純リー環, $\mathfrak{l}$を$\mathfrak{g}$の非コンパクト実形, τを$\mathfrak{l}$に関する$\mathfrak{g}$の複素共役写像とする. このときτで不変な$\mathfrak{g}$のコンパクト実形$\mathfrak{u}$が存在する([A] III章 定理7.1).

$\tau|\mathfrak{u} = \tau_0$ は, $\mathfrak{u}$の位数2の自己同型で, それによって$\mathfrak{u}$の$\mathbb{Z}_2$を次数群とする次数付け

(1) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \oplus \mathfrak{u}_1, \quad \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u} \cap i\mathfrak{l}.$$

が生ずる. このとき

(2) $$\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{k}, \qquad i\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{p}$$

とおくと,

(3) $$\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \qquad [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

となり, これにより$\mathfrak{l}$の$\mathbb{Z}_2$-次数付けが得られる。$\mathfrak{l}$の分解(3)を, $\mathfrak{l}$の<u>カルタン分解</u>という. $\mathfrak{k}$に関する$\mathfrak{g}$の複素共役写像をρとするとき, $\rho|\mathfrak{k} = I$, $\rho|\mathfrak{p} = -I$ で $\rho\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ である。$\rho|\mathfrak{l} = \theta$ は$\mathfrak{l}$の位数2の自己同型である。θを$\mathfrak{l}$の<u>カルタン対合</u>という.

定義 2 リー環$\mathfrak{a}$の位数2の自己同型全体の集合を $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{a}$ と記す. $\sigma, \tau \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{a}$ は, ある $g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{a}$ により $\tau = g\sigma g^{-1}$ となるとき,

共役であるという。これは $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{a}$ における一つの同値関係である。これによる同値類全体の集合を $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{a}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{a}$ と記す。

定理1.

$\mathfrak{g}$ を複素単純リー環、$\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の一つの固定したコンパクト実形とする。

1) 任意の $s \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ は、$\mathfrak{g}$ 上の $\mathbb{C}$ 線型写像 s^C に一意的に拡張される。写像 $s \mapsto s^C$ は、$\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ から $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}$ への一対一写像である。

2) $s_1, s_2 \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ が共役 $\Rightarrow s_1^C$ と s_2^C は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役である。

3) 1) 2) により、写像 $\tau : \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u} \longrightarrow \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が生ずる。

τ は全単写である。

4) $s_1, s_2 \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ に対し、次の同値が成立つ：

s_1, s_2 は共役 $\Longleftrightarrow s_1^C$ と s_2^C は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役である。

証明　1) 2) すぐ確められるように $s^C \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ で $s^{C2} = I$ であるから、$s^C \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}$ である。$g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ により、$s_2 = g s_1 g^{-1}$ ならば、$s_2^C = g^C s_1^C g^{C-1}$ となるから、2) が成立つ。従って $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ の共役類 (s) に対し、s^C の共役類 (s^C) が定まり、$\tau : (s) \mapsto (s^C)$ は、$\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ から $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ への写像である。$s_1^C = s_2^C$ ならば、$\mathfrak{u}$ 上で考えて $s_1 = s_2$ となるから、$s \mapsto s^C$ は $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u} \to \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}$ の一対一写像である。

3) (a) τ は全写である。

任意の $\sigma \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}$ をとる。A. lemma 2 により、σ は $\mathfrak{g}$ のあるコンパクト実形 $\mathfrak{v}$ を不変にする：$\sigma\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$。$\mathfrak{g}$ のコンパクト実形は

$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ で共役である（[20] III章系7.3）。そこで $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在して、$\mathfrak{u}' = \varphi\mathfrak{u}$ となる。このとき $\sigma\varphi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ であるから、$s = \sigma|\varphi\mathfrak{u}$ とおく。このとき $s^c = \sigma$ である。$s \in \mathrm{Inv}(\varphi\mathfrak{u})$ であり、$\varphi^{-1}s\varphi\mathfrak{u} = \varphi^{-1}\varphi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ であるから、$\varphi^{-1}s\varphi \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ である。そして

(4) $$(\varphi^{-1}s\varphi)^c = \varphi^{-1}s^c\varphi = \varphi^{-1}\sigma\varphi$$

だから、$\sigma' = (\varphi^{-1}s\varphi)^c$ とおくとき、$\sigma' \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}$ で、$\sigma'\mathfrak{u} = \varphi^{-1}s\varphi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ である。(4)により $(\sigma') = (\varphi^{-1}\sigma\varphi) = (\sigma)$ であり、$(\sigma') = (\varphi^{-1}s\varphi) = \tau(s)$ であるから、$(\sigma) = \tau(s)$ で τ は全写である。

(b) τ は単写である

今 $s_1, s_2 \in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ とし、$s_1^c = \sigma_1$, $s_2^c = \sigma_2$ が $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役とする：$\exists g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $\sigma_2 = g\sigma_1 g^{-1}$. いま $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ はコンパクト・リー群で線型代数群でもある。$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ の複素化で、$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ で不変な内積に関して自己随伴である。従って $g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ は、一意的に

(5) $$g = pu, \quad u \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}, \quad p = \exp(iX), \quad X \in \mathfrak{u}$$

と表わされる。（シュヴァレー [11] 第VI章 §IX Lemma 2，杉浦 [43] §2 命題 2）

従って $\sigma_2 = g\sigma_1 g^{-1}$ は、この場合

(6) $$pu\sigma_1 u^{-1}p^{-1} = \sigma_2$$

と書くことができる。$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上のリー環と見たものを $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ とすると

(7) $$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$$

で、これが $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ のカルタン分解である。これに対応する $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ のカルタン対合を θ とする。$\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ である。今 θ による $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の

内部自己同型を考える

(8) $$\theta p \theta^{-1} = \theta \exp(iX)\theta^{-1} = \exp(\theta(iX)) = \exp(-iX) = p^{-1}$$

また任意の $s \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ と $X \in \mathfrak{u}$ に対し, $\theta s^c \theta^{-1} X = \theta s X = s^c X$, $\theta s^c \theta^{-1}(iX) = \theta s^c(-iX) = \theta(-isX) = isX = s^c(iX)$ となるから,

(9) $$\theta s^c \theta^{-1} = s^c \quad (\forall s \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u})$$

となる. 1) と同様 $s \mapsto s^c$ は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ から $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ への一対一写像であるから. 以下これにより $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u} \subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ と考える. 今 (6) の両辺に θ による内部自己同型を作用させると, (8)(9) により 次の (10) が成立つ:

(10) $$p^{-1} u \sigma_1 u^{-1} p = \sigma_2$$

(6) と (10) から (11) $$p^2 u \sigma_1 u^{-1} = u \sigma_1 u^{-1} p^2$$ となる。

今 $u\sigma_1 u^{-1} = v$ とすると, $p^2 = \exp(2iX) = v p^2 v^{-1} = \exp(2i(\mathrm{Ad}\,v)X)$ となる。

exp は $i\mathfrak{u}$ 上で一対一写像だから, $2iX = 2i(\mathrm{Ad}\,v)X$ である。従って

(12) $$v p v^{-1} = \exp(i(\mathrm{Ad}\,v)X) = \exp iX = p$$

となり, p と v は可換である. そこで (10) は

(13) $$u \sigma_1 u^{-1} = \sigma_2$$

となる。(13) の両辺を $\mathfrak{u}$ 上で考えると,

(14) $$u s_1 u^{-1} = s_2$$

となり, s_1 と s_2 は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ 内で共役である. これで (6) が証明された.

4) ⇒ は 2), ⇐ は 3) で証明されている. ∎

定理 2.

$\mathfrak{g}$ を複素単純リー環とし, その非コンパクト実形の同型類

の集合を $R(\mathfrak{g})$ と記す. 今 $\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の一つの固定したコンパクト実型とし, $\mathfrak{u}$ の位数2の自己同型の共役類全体の集合を, 前と同じく $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ と記す. このとき $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ から $R(\mathfrak{g})$ への全単写 φ が存在する. 1) $\sigma\in\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ に関する $\mathfrak{u}$ の $\mathbb{Z}_2$-次数付けを, $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0\oplus\mathfrak{u}_1$ とするとき, $\mathfrak{l}=\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1$ は $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形 $\mathfrak{l}$ のカルタン分解である. 2) 同様に $\sigma'\in\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ に実形 $\mathfrak{l}'$ が対応するとしよう. σ と σ' が $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ 内で共役ならば, $\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{l}'$ は同型である. 3) そこで σ の共役類 (σ) に, $\mathfrak{l}$ の同型類 $(\mathfrak{l})$ を対応させるとき, 写像 $\varphi:\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}\longrightarrow R(\mathfrak{g})$ が定義される. φ は全単写である.

証明 1) $\mathfrak{l}$ はベクトル空間として $\mathfrak{g}$ の実形であり, $[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_0]\subset\mathfrak{u}_0$, $[\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_1]\subset\mathfrak{u}_1$, $[\mathfrak{u}_1,\mathfrak{u}_1]\subset\mathfrak{u}_0$ であるから, $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の部分リー環である. そこで $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{g}$ のリー環としての実形である. σ は位数2だから, $\mathfrak{u}_1\neq 0$ である. ($\mathfrak{u}_1=0$ なら $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0$, $\sigma=I$ となる). そこで $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形で, $\mathfrak{l}=\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1$ はカルタン分解である.

2) いま $\tau\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ が存在して, $\sigma'=\tau\sigma\tau^{-1}$ となったとする. $X\in\mathfrak{u}$ に対し, $X\in\mathfrak{u}_0'\iff\sigma'X=X\iff\tau\sigma\tau^{-1}X=X\iff\sigma\tau^{-1}X=\tau^{-1}X\iff\tau^{-1}X\in\mathfrak{u}_0\iff X\in\tau\mathfrak{u}_0$ となるから, $\mathfrak{u}_0'=\tau\mathfrak{u}_0$ である. 同様にして $\mathfrak{u}_1'=\tau\mathfrak{u}_1$ である. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}\subset\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ と考えるとき, $\tau\mathfrak{l}=\tau(\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1)=\tau\mathfrak{u}_0\oplus i\tau\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}_0'\oplus i\mathfrak{u}_1'=\mathfrak{l}'$ となり, $\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{l}'$ は同型である.

3) a) φ は全写である.

$\mathfrak{g}$ の任意の非コンパクト実形 $\mathfrak{l}$ をとる. $\mathfrak{l}$ に関する $\mathfrak{g}$ の複

素共役写像を ρ とするとき，ρ で不変な $\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ がある（[20] III章定理7.1）．$\rho|\mathfrak{u}=\sigma_1$ とすると $\sigma_1\in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}$ である．

$\mathfrak{u}$ と $\mathfrak{u}'$ は $\mathfrak{g}$ の二つのコンパクト実形だから，ある $\varphi\in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}\subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在して，$\varphi\mathfrak{u}=\mathfrak{u}'$ となる（[20] III章系7.3）．このとき $\varphi\sigma_1\varphi^{-1}\mathfrak{u}'=\varphi\sigma_1\mathfrak{u}=\varphi\mathfrak{u}=\mathfrak{u}'$ となり，$\varphi\sigma_1\varphi^{-1}$ は $\mathfrak{u}'$ を不変にする．$\varphi\sigma_1\varphi^{-1}=\sigma$ とおくと，$\sigma\in \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}'$ であり，σ,σ_1 に関する $\mathfrak{u}',\mathfrak{u}$ の $\mathbb{Z}_2$-次数付けを，$\mathfrak{u}'=\mathfrak{u}'_0\oplus\mathfrak{u}'_1$，$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0\oplus\mathfrak{u}_1$ とする．このとき $\mathfrak{u}_0=\mathfrak{u}\cap\mathfrak{l}$，$\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}\cap i\mathfrak{l}$ だから，$\mathfrak{l}=\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1$ である．いま $\mathfrak{l}'=\mathfrak{u}'_0\oplus i\mathfrak{u}'_1$ とおくと，$\mathfrak{l}'$ も $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形である．2) の証明と同様にして，$\varphi\mathfrak{u}_0=\mathfrak{u}'_0$，$\varphi\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}'_1$ となるから，$\varphi\mathfrak{l}=\mathfrak{l}'$ で，$\mathfrak{l}\cong\mathfrak{l}'$ となる。従って $(\mathfrak{l})=(\mathfrak{l}')=\Phi(\sigma)$ であり，Φ は全写である．

b) Φ は単写．

いま $\mathfrak{g}$ の二つの非コンパクト実形 $\mathfrak{l},\mathfrak{l}'$ が，同型写像 $\tau:\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}'$ により同型とする．τ を $\mathbb{C}$-線型写像 $\tau^{\mathbb{C}}$ に拡張すると $\tau^{\mathbb{C}}\in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ である．a) により，$\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{l}'$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト実形 $\mathfrak{u}$ の二つの位数2の自己同型 σ と σ' から生ずるとしてよい．σ と σ' に対応する $\mathfrak{u}$ の $\mathbb{Z}_2$-次数付けを，$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_0\oplus\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}'_0\oplus\mathfrak{u}'_1$ とする。このとき，$\mathfrak{l}=\mathfrak{u}_0\oplus i\mathfrak{u}_1$，$\mathfrak{l}'=\mathfrak{u}'_0\oplus i\mathfrak{u}'_1$ が $\mathfrak{l},\mathfrak{l}'$ のカルタン分解である。$\tau\mathfrak{u}_0=\mathfrak{k}$，$\tau(i\mathfrak{u}_1)=\mathfrak{p}$ とおくと，$\mathfrak{l}'=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{l}'$ のもう一つのカルタン分解である。$\mathfrak{l}'$ の二つのカルタン分解は $\mathrm{Int}\,\mathfrak{l}'$ で共役だから，$\rho\in \mathrm{Int}\,\mathfrak{l}'\subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}\subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ により，$\rho\mathfrak{k}=\mathfrak{u}'_0$，$\rho\mathfrak{p}=i\mathfrak{u}'_1$ とな

$\mathfrak{z}_0$. 今 $\theta = \rho^c \circ \tau^c \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ により，$\theta\mathfrak{l} = \mathfrak{l}'$ であり，$\theta\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0'$, $\theta\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_1'$ である。そして任意の $X \in \mathfrak{u}_0$, $Y \in i\mathfrak{u}_1$ に対して，$\theta^{-1} = \theta$ だから

$$(15) \qquad \theta\sigma'\theta^{-1}(X+Y) = \theta(\sigma'(\theta X + \theta Y)) = \theta(\theta X - \theta Y) = X - Y = \sigma(X+Y)$$

だから，$\theta\sigma'\theta^{-1} = \sigma$ となり，$\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ だから，σ と σ' は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ の中で共役であり，$(\sigma) = (\sigma')$ である。これで φ が単写であることが証明された。■

定理 3

$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ を複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の二つの非コンパクト実形とし，$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ $(i=1,2)$ を $\mathfrak{g}_i$ のカルタン分解とする。このとき次の二つの条件 (a) と (b) は同値である：

(a) $\quad \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$, $\qquad$ (b) $\quad \mathfrak{k}_1 \cong \mathfrak{k}_2$.

証明 (a) $\Rightarrow$ (b). いま同型写像 $\tau : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が存在したとする。このとき $\tau\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2'$, $\tau\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2'$ とすると，$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k}_2' \oplus \mathfrak{p}_2'$ は $\mathfrak{g}_2$ のカルタン分解である。$\mathfrak{g}_2$ の二つのカルタン分解は，$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2$ で共役となるから，ある $\varphi \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_2$ が存在して，$\varphi\mathfrak{k}_2' = \mathfrak{k}_2$, $\varphi\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}_2$ となる。このとき $\varphi\circ\tau$ は $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ の同型写像で，$(\varphi\circ\tau)\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2$ となるから，$\mathfrak{k}_1 \cong \mathfrak{k}_2$ である。

(b) $\Rightarrow$ (a) $\mathfrak{u}_j = \mathfrak{k}_j \oplus i\mathfrak{p}_j$ $(j=1,2)$ は，$\mathfrak{g}$ の二つのコンパクト実形であるから，${}^{\exists}\tau \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在して，$\tau\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1$ となる。いま $\tau\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1'$, $\tau\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_1'$, $\tau\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1'$ とおく。$\mathfrak{g}_1'$ も $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形であり，$\mathfrak{g}_1' = \mathfrak{k}_1' \oplus \mathfrak{p}_1'$ はそのカルタン分解である。いま $\mathfrak{k}_1 \cong \mathfrak{k}_2 \cong \mathfrak{k}_1'$

である. $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus i\mathfrak{p}_1$ は, $\mathfrak{u}_1$ の $\mathbb{Z}_2$-次数付けだから, 対応する $\mathfrak{u}_1$ の位数2の自己同型を s_1 とすると, $\mathfrak{k}_1$ は s_1 の固定元よりなる部分環である。 $\mathfrak{k}_1' = \tau\mathfrak{k}_2 \subset \tau\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1$ だから, $\mathfrak{u}_1$ のキリング形式(負値定符号)に関する $\mathfrak{k}_1'$ の直交空間を $\mathfrak{m}$ とすると, $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}_1' \oplus \mathfrak{m}$ により $\mathfrak{u}_1$ のもう一つの $\mathbb{Z}_2$-次数付が定義される. それに対応する $\mathfrak{u}_1$ の位数2の自己同型を s_1' とする. s_1, s_1' を $\mathfrak{g}$ の自己同型に拡張したものを $s_1^C, s_1'^C$ とすると, $s_1^C, s_1'^C$ の固定元部分環は $\mathfrak{k}_1^C, \mathfrak{k}_1'^C$ で同型である そこで A 定理 B により, s_1^C と $s_1'^C$ は $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 内で共役で, $s_1'^C = g s_1^C g^{-1}$ となる $g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在する そこで定理1. 4) により ある $h \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}_1$ が存在して, $s_1' = h s_1 h^{-1}$ となる。 このとき $X \in \mathfrak{u}_1$ に対し, $X \in \mathfrak{k}_1' \iff s_1' X = X \iff h s_1 h^{-1} X = X \iff s_1 h^{-1} X = h^{-1} X \iff h^{-1} X \in \mathfrak{k}_1 \iff X \in h\mathfrak{k}_1$ である. 従って $\mathfrak{k}_1' = h\mathfrak{k}_1$ であり, 同様にして $\mathfrak{p}_1' = h\mathfrak{p}_1$ である. そこでこのとき,

$$\tau\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1' = \mathfrak{k}_1' + \mathfrak{p}_1' = h(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1) = h\mathfrak{g}_1$$

となるから, $\mathfrak{g}_2 = \tau^{-1} h \mathfrak{g}_1$ だから, $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ となる. ∎

定理4

定理1, 2の全単写 $\tau : \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u} \to \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ と $\varphi : \mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u} \to R(\mathfrak{g})$ により, 全単写 $\psi = \tau \circ \varphi^{-1} : R(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が存在する。

これにより複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形の同型類 $R(\mathfrak{g})$ は, $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ および $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ と一対一に対応する.

定理1により $\mathrm{Inv}\,\mathfrak{u}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{u}$ の各元 σ からカルタン分解を通じ

て，具体的に $\mathfrak{g}$ の非コンパクト実形 $\mathfrak{l}=\mathfrak{k}_0\oplus i\mathfrak{k}_1$ が与えられる。

こうして生ずる非コンパクト実形 $\mathfrak{l}$ がどれだけあるかということと，$\mathfrak{l}$ の σ による固定元の作る部分環 $\mathfrak{g}_0$ の形は，$\mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ によって知ることができる。その結果は，表7の Table II, III で示されている。

証明　この定理は，これまでの結果をまとめたものである。最後の部分について言えば，A定理15,16と定理Aにより，$\mathrm{Inv}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が具体的に与えられ，A定理Bにより，各共役類は，固定部分環 $\mathfrak{g}_0$ で定まるので，表7の Table II, III のように，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ なる pair によって $R(\mathfrak{g})$ の元が定まるのである。■

大域的な連結単純リー群の分類は，単純リー環の分類と，被覆群の理論を組み合わせて得られる。これは後藤守邦・小林堯[18]において実行されている。

また例外リー群・リー環の具体的な記述については，シェイファー[34]，ジェイコブソン[21]，横田[52]等を参照されたい。

文 献

[1] Sh.Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J.Math., Osaka City University 13(1962), 1-34.

[2] A.Borel et J. de Siebenthal, Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment.Math.Helv. 23(1949), 200-221.

[3] N.Bourbaki,"Groupes et algèbres de Lie", Ch.4,5,6, 1968, Hermann, Paris.

[4] E.Cartan,"Sur la structure des groupes de transformations finis et continus", Thèse, Nony, Paris, 1894.

[5] E.Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann.École Norm. Sup. 31(1914), 263-355.

[6] E.Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semisimples, Bull.Sci.Math. 49(1925), 361-374.

[7] E.Cartan, Sur les espaces de Riemann dans lequels le transport par parallélism conserve la courbure, Rend.Acc.Lincei, 3i(1926), 544-547.

[8] E.Cartan, La géométrie des groupes simples, Annali di Mat. 4(1927),209-256.

[9] E.Cartan, Sur certaines formes riemaniennes remarquables des géométries à groupes fondamental simple, Ann.École Norm.Sup. 44(1927), 345-467.

[10] E.Cartan, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanienne, J. Math.pures et appl. 8(1929), 1-33.

[11] C.Chevalley, "Theory of Lie groups I", Princeton Univ.Press, Princeton, 1946.

[12] C.Chevalley, Sur la classification des algèbres de Lie simples et de les représentations, C.R.Acad.Sci.Paris 227(1948), 1136-1138.

[13] C.Chevalley, "Théorie des Groupes de Lie III", Hermann, Paris, 1955.

[14]E.B.Dynkin, The structure of semi-simple Lie algebras (Russian), Uspehi Mat.Nauk 2(1947), 59-127. A.M.S.Translation No. 17(1950).

[15] H.Freudenthal, "Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie", (mimeographed note), Rijkuniv. Utrecht, 1951.

[16] F.Gantmacher, Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie groups, Mat.Sbornik 5(1939), 101-144.

[17] F.Gantmacher, On the classification of real simple Lie groups, Mat.Sb. 5(1939), 217-249.

[18] M.Goto and E.T.Kobayashi, On the subgroups of the centers of simply connected simple Lie groups — Classification of simple Lie groups in the large, Osaka J,Math. 6(1969), 251-281.
[19]Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, Trans.A.M.S. 70(1951), 28-96.
[20] S.Helgason, "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic Press, New York, 1978.
[21] N.Jacobson, "Exceptional Lie algebras", Marcel Dekker, New York, 1971.
[22] V.G.Kač, Automorphims of finite order of semisimple Lie algebras, Funct. Anal.Appl. 3(1969), 252-254.
[23] V.G.Kac, "Infinite dimensional Lie algebras", Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1983.
[24] W.Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I-IV, Math.Ann. 31(1888),252-290, 33(1889),1-48, 34(1889),57-122, 36(1890),161-189.
[25] B.Kostant, On the conjugacy of real Cartan subalgebras, Proc.Nat.Acad. Sci. 41(1955), 967-970.
[26] P.Lardy, Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus,au moyen des isomorphies involutives, Comment.Math.Helv.8 (1935-36), 189-234.
[27] 松島与三, "リー環論", 共立出版, 1956.
[28] S.Murakami, On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra, J. Math.Soc.Japan 4(1952), 103-133. Supplement and corrections, ibid.5(1953),105.
[29] S.Murakami, Sur la classification des algèbres de Lie réelles et simples, Osaka J.Math. 2(1965), 291-307.
[30] M.S.Ragunathan, On the first cohomology of discrete subgroups of simple Lie groups, Amer.J.Math. 87(1965), 103-139.
[31] I.Satake, On a theorem of E.Cartan, J.Math.Soc.Japan 2(1951),284-305.
[32] I.Satake, On representations and compactifications of symmetric Riemann spaces, Ann. of Math. 71(1960), 77-110.
[33] I.Satake, "Classification Theory of Semisimple Algebraic Groups",Marcel Dekker, New York, 1971.
[34] R.D.Schafer, "An Introduction to Nonassociative Algebras", Academic Press, New York, 1966.
[35] Séminaire C.Chevalley, "Classification des groupes de Lie algébriques", 2 vols., École Norm.Sup., Paris, 1958.

[36] Séminaire "Sophus Lie", "Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie", École Norm.Sup. Paris, 1955.

[37] J.P.Serre, "Algèbres de Lie semisimples complexes", Benjamin, New York, 1966. English translation, Springer, New York, 1987.

[38]J.A.Springer, Involutions of simple algebraic groups, J.Fac.Sci.Univ.of Tokyo, Section IA, Math. 34(1987),, 655-670.

[39] M.Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J.Math.Soc.Japan 11(1959), 374-434. Correction, ibid., 23(1971), 374-383.

[40] M.Sugiura, Classification over the real field,Appendix to [33],128-146.

[41] 杉浦光夫, 対称空間論研究史, 数学セミナー 1983, 10月号, 11月号.

[42] 杉浦光夫, "リー群論", 共立出版, 東京., 2000.

[43] 杉浦光夫. リー群の極大コンパクト部分群の共軛性, 津田塾大学 数学計算機科学研究所報 17(1999), 142-193.

[44] A.I.Sirota and A.S.Solodovnikov, Non-compact semisimple Lie groups, Uspehi Mat. Nauk 18(1963), 57-64.

[45] E.Stiefel, Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und discontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischen Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen, Comment.Math.Helv. 14(1941-42), 350-380.

[46] J.Tits, Classification of algebraic semisimple groups, in "Algebraic groups and discontinuous subgroups", Proc.Symp.Pure Math. 9, A.M.S.,33-62.

[47] van der Waerden, Die Klassifizierung der einfachen Lie'schen Gruppen, Math.Zeit. 37(1933), 446-462.

[48] N.Wallch, A classification of involutive automorphisms of compact simple Lie algebras up to inner equivalence, Dissertation, Washington Univ.1965.

[49] N.Wallach,On maximal subsystems of root systems, Canad.J.Math.20(1968) 555-574.

[50] A.Weil, "Discontinuous subgroups of classical groups", mimeographed note, Univ. of Chicago, 1958.

[51] H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen, I,II,III,Nachtrag, Math.Zeit. 23(1925),271-309; 24(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

[52] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, 京都, 1992.

[53] M.Hausner and J.T.Schwartz,"Lie Groups;Lie Algebras", Gordon&Breach,1968.