多重ガンマ関数とその周辺

津田塾大学
片山孝次

近年になって整数論に登場した(といえる)多重ガンマ関数について，その歴史(といったほどでもないが)を，ゼータ関数との対比のもとに述べよう.

1. ゼータ関数

リーマンは，その　有名な論文

"Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe,
Monatsberichte der Berliner Akademie 1859= Werke 145-153"

において，リーマン·ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, Re $s>1$，の関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}(1-s))$$

の二つの証明を与えた.

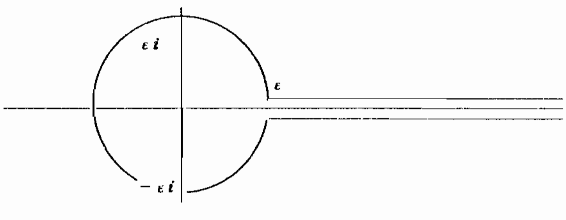
第一証明は contour integral による表現

$$2\sin\pi x\,\Pi(s-1)\zeta(s)=i\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

(原文どおり．積分範囲は下に示す $I(\varepsilon,\infty)$と考えてよい．$\Pi(s)=\Gamma(s-1)$ である.$\log(-x)$) は負の x にたいして実数値を取る.),

書き直して

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)e^{-s\pi i}}{2\pi i}\int_{I(\varepsilon,\infty)}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz,$$



を用いるもの(詳しい取り扱いは，Siegel[2],I 参照)，第二証明は,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2)^{s/2}}$$

を二次形式のゼータ(Epstein zeta) とみて，テータ関数

$$\vartheta(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2x},\qquad x>0$$

の反転公式を用いるもの(Siegel[1]), である.

第二証明に用いられた方法は, 一般の Epstein zeta の関数等式の証明に拡張された. (Epstein[1], 1907, Lerch[1], 1892. ただし, Epstein[1]では, 対角形の二次形式. また, Lerch は Malmsten-Lipschitz formula とよんでいる. 論文の年月からいって, Epstein zeta ではなく, Lerch zeta と呼ぶべきか. 詳しくは Siegel[1]を参照. そこでは, 球関数つきのEpstein zeta が論じられている.) さらに Hecke[1] は, 代数体のzeta を Epstein zeta とみて関数等式を導いている. Hecke の功績の一つは, いろいろな概念の適切な代数体版を作り出した所にある. Hecke[2], [3].

第一証明では, ゼータ は "(一次式)$^{-s}$ の和" のまま扱われている. リーマン以後は次のように拡張されている.

フルヴィッツ・ゼータ(1882)

$$\zeta(s, w)=\sum_{n=0}^{\infty}(w+n)^{-s},\quad w>0,\ \mathrm{Re}\, s>1,$$

$$\zeta(s, w, \omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(w+n+\omega)^{-s},\quad \omega,\ w>0,\ \mathrm{Re}\, s>1$$

$$=\frac{\Gamma(1-s)e^{-s\pi i}}{2\pi i}\int_{I(\varepsilon,\infty)}\frac{e^{-wt}t^{s-1}}{1-e^{-\omega t}}dt,$$

多重リーマン・ゼータ(Barnes[4], 1901; [5], 1904)

$$\zeta_r(s, w, \tilde{\omega})=\sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}(w+m_1\omega_1+\cdots\cdots+m_r\omega_r)^{-s}$$

$$\omega_i,\ w>0,\quad \tilde{\omega}=(\omega_1,\cdots\cdots,\omega_r),\ \mathrm{Re}\, s>r,$$

$$=\frac{\Gamma(1-s)e^{-s\pi i}}{2\pi i}\int_{I(\varepsilon,\infty)}\frac{e^{-wt}t^{s-1}}{\prod_{i=1}^{r}(1-e^{-\omega_i t})}dt$$

代数体(n次)のゼーター, Lー関数　　それは次の形をしている:

$$\sum_{(\xi)}\frac{a_n}{N(\xi)^s}=\sum\frac{a_n}{(n\text{変数の}\,n\,\text{個の一次式の積})^s}$$

(ここで和は, 同伴な数の代表にわたる.)

Shintani L 関数([1], 1976)

$$\zeta_{Shin}(\tilde{s}, A, \tilde{x}; \tilde{\chi})=\sum_{z_1,\cdots,z_r=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{r}\chi_k{}^{z_k}\prod_{j=1}^{n}L_j{}^{*}(\tilde{z}+\tilde{x})^{-s_j}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)^n}\int_0^{\infty}t^{s_1-1}dt_1\cdots\int_0^{\infty}t^{s_n-1}dt_n\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{(1-x_j)L_j(t)}}{e^{L_j(t)}-\chi_j}$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \\ a_{r1} \cdots\cdots a_{rn} \end{bmatrix}, \quad a_{jk} > 0,$$

$$L_j(t_1, \cdots\cdots, t_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_k,$$

$$L_j^*(t_1, \cdots\cdots, t_n) = \sum_{j=1}^{r} a_{jk} z_j,$$

$$\tilde{x} = (x_1, \cdots\cdots, x_r), \quad x_j > 0,$$

$$\tilde{\chi} = (\chi_1, \cdots\cdots, \chi_r), \quad \chi_j \neq 0, \quad \chi_j \in \mathbb{C}, \quad |\chi_j| \leq 1,$$

$$\tilde{s} = (s_1, \cdots\cdots, s_n).$$

Shintani は $s_1 = \cdots\cdots = s_n = s$ のときに定義した. Shintani[1], (1976). この論文で, Shintaniは上記 n 一重積分の s に関する微分を

$$\text{contour integral} \int_{I(\varepsilon,\infty)} \int_{I(\varepsilon,1)}{}^{n-1}$$

に変換したが, このことおよび, 代数体のゼータの, 同伴な数の代表に関する和を, 単数群が一重に働く open convex cone の上での $m_1, \cdots\cdots, m_n$, $m_i \geq 0$, に関する和に変換したが, これは画期的なことである, とおもう.

一般の $\tilde{s}$ の場合は, Iida[1], (1993) による.

Shintani の idea は

multiple gamma-function と Shintani L ー関数を結び付ける,

Shintani L ー関数と代数体の L ー関数を結び付ける

(代数体の L について, 数論的に重要なのは L の $s=1$ における値である. それを関数等式により L の $s=0$ における値に帰着させる. さらにそれを $\zeta_{Shin}(0, \cdots)$ に結び付ける. そこに多重ガンマが登場する.)

ところにある. ただし, Shintani[1] ではmultiple gamma-function はまだ explicit には現れていない.

2. ガンマ関数

ガンマ関数の定義としては, 普通 "Euler の第二種積分"(Legendre による命名)が採用される:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0). \qquad (1772)$$

ガンマ関数の始まり(?) は, Euler による無限積表示

$$\Gamma(s) = s^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \right\}$$

$$s \neq 0, -1, -2, \cdots\cdots$$

である.(Euler, 1729) これから Euler の第二種積分および

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots(n-1)}{s(s+1)\cdot\cdots\cdots(s+n-1)}\,n^{s}, \qquad \text{(Euler)}$$

が導かれた. Weierstrass は

$$\Gamma(s)^{-1}=s\,e^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\right\},\quad s\neq 0,1,2,\cdots\cdots$$

を用いた(1856). これは"Weierstrassの標準形"と呼ばれているが, 1848にすでに F.W.Newmann (Whittaker-Watson[1], p.236, 脚注)が得ている. γ は Euler の定数.

Euler の第二種積分の系統である Hankel representation(1864)

$$\Gamma(s)=\frac{1}{e^{2\pi i s}-1}\int_{I(\varepsilon,\infty)}e^{-t}\,t^{s-1}\,dt$$

は, contour integral がすべての s にたいして存在するから, 扱いやすく, 有用である.

$\Gamma(s)$ の多重ガンマ関数への拡張は, Lerch の定理(1893)

$$\log\frac{\Gamma(w)}{(2\pi)^{1/2}}=\zeta'(0,w)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{I(\varepsilon,\infty)}\frac{e^{-wt}}{1-e^{-t}}\,\frac{\log t}{t}\,dt+(\gamma-\pi i)\zeta(0,w)$$

に基づく. ($w>0$. ζ' は s に関する微分.) この定理については, 黒川信重氏が"正規積の100年"(1994, 津田塾大学数学史シンポジウム)にLerchの原証明を紹介しておられる. そこではまたLerchの結果およびその周辺について詳しく述べられている. Lerchの定理はBohr-Mollerup によるガンマ関数のcharacterization を用いて証明することもできる.

Barnes は modulus $\omega>0$ つきのΓ関数を定義した([1], 1899):

$$\log\frac{\Gamma_1(w,\omega)}{(2\pi/\omega)^{1/2}}=\zeta'(0,w,\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{I(\varepsilon,\infty)}\frac{e^{-wt}}{1-e^{-\omega t}}\,\frac{\log t}{t}\,dt+(\gamma-\pi i)\zeta(0,w,\omega)$$

($\zeta(s,w,\omega)$は $\sum_{n=0}(w+n\omega)^{-s}$ を解析接続したもの.)

しかし結局 $\Gamma_1(w,\omega)=\omega^{(w/\omega)-1}\Gamma(w/\omega)$ である.

3. 多重ガンマ関数

前節の $\Gamma_1(w, \omega)$ は difference equation

$$f(w+\omega)-f(w)=w^s \qquad (s \in \mathbb{C})$$

を満たす関数である．Barnes はそれを拡張して difference equation

$$G(z+1)=\Gamma(z)G(z)$$

を満たす G-関数(点 $z=-n\omega$, $n=1,2,\cdots\cdots$, においてそれぞれ n 位の0点をもつ最簡超越整関数を求めることから出発した)を考え([2], 1899) その解として二重無限積

$$G(z)=e^{Q(z)}\, z\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m+n}\right)e^{-z/(m+n)+z^2/2(m+n)^2}\right\}$$

を与えた． ここで，$Q(z)$ は z の二次式である．さらに [3], 1900, において二つのdifference equations

$$f(z+1)=\Gamma(z/\omega)f(z),$$
$$f(z+\omega)=\Gamma(z)(2\pi)^{(\omega-1)/2}\,\omega^{-z+(1/2)}f(z)$$

を満たす関数 $f(z)$ を導入し($\tau=1$ のとき，G－関数となる)，その解である二重積

$$G(z, \omega)=A\, e^{Q(z/\omega)}(z/\omega)\cdot$$

$$\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m\omega+n}\right)e^{-z/(m\omega+n)+z^2/2(m\omega+n)^2}\right\}$$

を与え，二重ガンマ関数とよんだ．さらに，(雑に言えば)

"四つの二重ガンマ関数の積＝テータ関数"

を証明した．Barnes[4], 1901, においても二重ガンマ関数 $\Gamma_2(w;\omega_1, \omega_2)$ を，まず二重無限積により導入し，contour integral による表示を与えている．[5], 1903, でははじめから contour integral を用いて r －重ガンマ関数 $\Gamma_r(w;\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_r)$, を定義している．それはガンマ関数についてのLerch の定理の拡張である：

$$\lim_{w\to 0}\left(\zeta_r{}'(0;w, \tilde{\omega})+\log w\right)=-\rho_r(\tilde{\omega}),$$

$$\log\frac{\Gamma_r(w;\tilde{\omega})}{\rho_r(\tilde{\omega})}=\zeta_r{}'(0;w, \tilde{\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{I(\varepsilon,\infty)} \frac{e^{-wt}}{\prod_{i=1}^{r}(1-e^{-\omega_i t})} \frac{\log t}{t}\, dt$$

$$+(\gamma - \pi i)\zeta_r(0; w, \tilde{\omega}).$$

ここで $w>0$, $\omega_i>0$ である．この条件の採用は Shintani による．これで多重ガンマ関数の理論はすっきりした．

Shintani[6] では，二重ガンマ関数の場合にこの定義から出発し，その無限積表示(Barnes の無限積とは異なる)を与え，(雑に言えば)複素変数 w に解析接続した．(r 一重ガンマ関数の解析接続についてはKatayama-Ohtsuki[1]を参照)

Barnes の論文は，w, $\tilde{\omega}$ を一般の複素数にしているので，それが 積分域 および log の枝の取り方に影響し，極めて複雑である．

なお Barnes 以前に，Kinkelin(1856) は

$$G(z+1)=z^z G(z)$$

を満たす関数を考えた．これは

$$\exp\left\{ z \log \Gamma(z) - \log G_{Barnes}(z+1) \right\}$$

で与えられる．

Hölder は関数

$$\exp\left\{ \int_0^z \pi v \cot(\pi v)\, dv \right\}$$

を考えた(1886)．これは

$$(2\pi)^z \frac{G_{Barnes}(1-z)}{G_{Barnes}(1+z)}$$

と表される．

Whittaker and Watson,[1],p.264 に，無限積

$$G(z+1)=(2\pi)^{z/2} e^{-z(z+1)/2-\gamma z^2/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+z^2/(2n)} \right\}$$

が

$$G(z+1)=\Gamma(z)G(z), \quad G(1)=1,$$

$$(n!)^n/G(n+1)=1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots\cdots n^n$$

を満たすことを証明せよ，という問題が出ている．これは Alexeiewsky (1889) からの引用であるが，Alexeiewsky 自身の考察は $\log\Gamma(x)$ をあ

らわす定積分の被積分関数にdifference formulaを応用したものらしい，原文はロシヤ語で，また入手しにくい，Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik と Leipzig Berichte の紹介文から読み取るだけだ，と Barnes がこぼしている(Barnes[2]).

Selberg zeta-function の関数等式に

$$\exp\left\{-\nu A(\mathfrak{D})\int_0^{s-\frac{1}{2}} v\tan(\pi v)\,d v\right\}$$

なる量が現れている．ここで

$$\int_0^z \pi v\tan(\pi v)\,d v$$

$$=-z\log 2\pi+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-z)}+\log\frac{\Gamma_2(\frac{1}{2}-z;1,1)}{\Gamma_2(\frac{1}{2}+z;1,1)}$$

であり，Kinkelin の関係式

$$\log\frac{\Gamma_2(1-z)}{\Gamma_2(1+z)}=z\log 2\pi-\int_0^z \pi z\cot\pi z\,d z$$

から導かれる(Vignéras[1]).

また関数等式に$\Gamma_2(w,1,1)$が現れる"modified Selberg zetafunction"を，Vignéras がEuler 積により構成している([1],1979).

4. Shintani L－関数

Shintani は Siegel 80歳 に捧げた論文[1],1976,において

$$\zeta_{Shin}(1-m,A,\tilde{x},\tilde{\chi}),\qquad m：正の整数$$

を計算した($A,\tilde{x},\tilde{\chi}$ をふくむ一般化された Bernoulli 数による表現).それは，ζ_{Shin} を表す多重無限積分を contour integral に変換するものである．そして総実な代数体のゼータとζ_{Shin}とを結び付けて，その代数体の ゼータ の,負の整数値における値を求めた．(その系として代数体のゼータの，0または負の整数点における値は有理数であるというSiegel-Klingen(1962) の定理が導かれる.)この両者を結び付ける計算のためにShintaniは，実n次元数空間の第一象限を，open simplicial cones の，単数群の作用に関する有限直和に分解した．それは上記contour integralへの変換とともに，すばらしいideaである．この論文には 多重ガンマ関数は explicit には現れていないが，Proposition 1′, p.408，はまさにその直前の姿である．

二重ガンマ関数はまず，Shintani[2]に現れる．そこで彼は実二次体のHecke$L$関数で,Hecke が予告した[4]が果たされず，Siegelが Tataの講義録[2]でし残した場合の $s=1$ における値を，関数等式を用いて$L'(0,\cdot\cdot)$

の計算に置き換え，それを 二重ガンマ関数の特殊値で表した．

1980年の論文[6]においてShintaniは $\Gamma_2(w;1,z)$，$\rho_2(1,z)$ の無限積表示を与え，それらを負の実軸と0 を除く複素平面に解析接続し，それをもとに，$\mathrm{Im}\,z>0$ にたいして

$$\frac{\Gamma_2(w;1,z)\Gamma_2(1-w;1,-z)\Gamma_2(1+z-w;1,z)\Gamma_2(w-z;1,-z)}{\rho_2(1,z)\rho_2(1,-z)\rho_2(1,z)\rho_2(1,-z)}$$

$$=\frac{\eta(z)}{\vartheta_1(w,z)}\exp\left\{\pi i\left(-\frac{1}{6z}+\frac{w-w^2}{z}\right)\right\},$$

および

$$\rho_2(1,-z)\rho_2(1,z)=(2\pi)^{3/2}z^{-1/2}\eta(z)\exp\left\{\pi i\left(\tfrac{1}{4}+\frac{1}{12z}\right)\right\}$$

を導いた．ここで

$$\eta(z)=e^{\pi iz/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi iz}),$$

$$\vartheta_1(w,z)$$
$$=2e^{\pi iz/8}\sin(\pi w)\eta(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i(w+nz)})(1-e^{2\pi i(w+nz)})$$

である．

そして Shintani はこの関係を用いて，古典的な non-holomorphic Eisenstein 級数

$$E(z,s)=\sum_{m,n}{}'|mz+n|^{-2s}$$

にたいする Kronecker limit formulas の新証明を与えた[6]． その根拠は和因子が二つの一次式の積

$$|mz+n|^{-2}=(mz+n)^{-1}(m\bar{z}+n)^{-1}$$

であることである．$E(z,s)$ は，"一次式の積"型 ともEpstein zeta とも見られる唯一の関数(?)である．

上述の ρ_2 と η との関係式は

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

を思わせる．この類似を追求することはおもしろいと思う．

5．ゼータ関数等のKronecker limit formula が多重ガンマ関数を用いて計算可能な例は，そのゼータ関数の関数等式の，いわゆるガンマ因子として$\Gamma(cs)$が一乗で現れる場合である．たとえば実二次体のHilbert 型のEisenstein series には$\Gamma(s)^2$ が現れるからKronecker limit formula

を計算するためには多重ガンマ関数だけではなく，$\zeta_r''(0, w, \tilde{\omega})$ あるいはそれから多重ガンマのように構成される"超多重ガンマ関数"が必要である．また，$\zeta_r^{(k)}(0, w, \tilde{\omega})$ も必要となるであろう．これらについてはまだほとんど手がつけられていない．ただDeninger が "Chowla-Selberg formula"の実二次体版を構成するために $\zeta''(0, x)$（$\zeta(s, x)$はフルヴィッツ・ゼータ)を用いていること，またRamanujan がその研究に手を染めていること(Berndt[1])がわずかに目に付く．

多重ガンマ関数の代数体の数論への応用については，Shintani[3],[4],[5]を見られたい．

多重ガンマ関数の p －進理論については，Cassou-Nogues[1]がある．

文献

Alexeiwsky,W.P.[1]; Über eine Classe von Functionen die der Gamma Function analog sind,Leipzig Berichte,vol.XLⅦ, 268-275,1894

Barnes,E.W.[1]; The theory of the gamma function, Messenger of Math. vol.29,64-128,1899

———— [2]; The theory of G-function, Quarterly Journal of Math.,vol.31,264-314,1899

———— [3]; The genesis of the double gamma function, Proc.of the London Math.Soc.,vol.31,358-381,1900

———— [4]; The theory of the double gamma function,Philos. Transact.of the Royal Soc.(A)196,265-388,1901

———— [5]; On the theory of the multiple gamma function, Transact.Cambridge Philos.Soc.19,374-425,1904

Berndt,B.C.[1]; Ramanujan's Note Books,Part 1,Springer,1989

Cassou-Noguès,P.[1];Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples Journées arithmétiques de Marseille,1978

Deninger,C.[1]; On the analogue of the formula of Chowla and Selberg for real quadratic fielda, J.für reine und angew.Math.351,171-191,1984

Epstein, P. [1]; Zur Theorie der allgemeiner Zetafunktionen, I, II
Math. Ann. 56, 615-644, 1903; 63, 205-216, 1907

Hecke, E. [1]; Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper, Göttingen Nachr. 77-89, 1917=Werke 7

——— [2]; Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher Körper, Verhandlung. Naturforsch. Gesell. in Basel Bd. 28, 363-372, 1917=Werke 10

——— [3]; Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern, Göttingen Nachr. 265-278, 1919=Werke 13

——— [4]; Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen, Abh. Hamburg 211-223, 1925

Iida, H. [1]; Elementary theory of L-functions and Eisenstein series, London Math. Soc. Student Texts 26, Cambridge Univ. Press, 1993

Hölder, O. [1]; Über eine transcendente Function, Göttingen Nachrichten, 514-522, 1886

Kinkelin, [1]; Über eine mit der Gamma function verwandte Transcendente und deren anwendung auf die Integralrechnung, J. für die reine und angew Math., LVI, 122-158, 1856

Klingen, H. [1]; Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktionen, Math. Ann., 145, 145-272, 1962

Lerch, M. [1]; Zakladové Theorie Malmstenovskych rad, Rozpravy ceske akademie Cisare Frantiska Josefa. Bd. 1, no. 27, , 525-592, 1892

Ohtsuki, M. and Katayama, K. [1]; On the multiple gamma functions, Tokyo J. of Math. 21, 159-182, 1998

Shintani, T. [1]; On evaluation of zetafunctions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. of Fac of Sci. Univ. of Tokyo 23, 393-417, 1976

——— [2]; On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24, 167-199, 1977

———— [3]; On values at s=1 of certain L functions of tottaly real number fields, Algebraic Number Theory, Proc. Internat. Symp. Kyoto, 201-212 1977

———— [4]; On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, 139-167, 1978

———— [5]; On special values of zeta functions of totally real algebraic number fields, Proc. Interna. Congr. of Math., Helsinki, 591-597, 1978

———— [6]; A proof of the classical Kronecker limit formula, Tokyo J of Math. vol. 3, 191-199, 1980

Siegel, C. L. [1]; Lectures on advanced analytic number theory, Tata Bombay, 1961

———— [2]; Analytische Zahlentheorie, I, II, Göttingen

Vignéras, M.-F. [1]; L'equation fonctionelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire PSL(2, Z), Astèrisque 61, 235-249, 1979

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. [1]; A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1965(4th ed)

ガンマ関数			ゼータ関数
Euler の無限積	1729		
		1737	Euler
Eulerの第二種積分	1772		
Newmanの無限積*	1848		
(*=Weierstrassの標準形) Kinkelin のG-関数	1856		
		1859	Riemannの論文(関数等式の証明,contour integralによる表示, Riemann予想)
Hankelの表示	1864		
		1882	Hurwitz zeta
Hölder のG-関数	1886		
Lerch の定理	1893		
Alexeiewsky のG-関数	1894		
Barnes のG-関数	1899		
Barnes の二重ガンマ	1900		
		1901	多重リーマン·ゼータ(Barnes)
		1903	Epstein zeta
Barnes の多重ガンマ	1904		
		1976	Shintani L
実二次体のクロネッカー極限公式への，二重ガンマの応用(Shintani)	1977		
古典的クロネッカー極限公式の二重ガンマによる証明,二重ガンマの新無限積表示(Shintani)	1980		