Hamilton-Jacobi 理論の新展開
Poincaré による「Jacobi の定理」の解釈

中根美知代

1. はじめに

19 世紀の天体力学の頂点をなす，Poincaré の『天体力学の新しい方法』は，「一般論と Jacobi の方法」と題する章から始まっている．Poincaré はそこで，Hamilton の正準形でかかれた運動方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad (i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

から，Hamilton-Jacobi の偏微分方程式を導き，その完全解を利用して，もとの運動方程式を天体の軌道要素を変数とする正準形の運動方程式（後述（P7）式）を導いている[(1)]．ここで，(x_i,y_i) は位置と運動量を意味する正準座標，F は全エネルギーである．1860 年に Delaunay によって導かれた軌道要素を変数とする正準方程式は，彼自身による月の運動の研究に大きな役割を果たし，それ以降の天体力学研究に大きな影響を与えていた．Delaunay 自身によるこの方程式を導く手続きは大変複雑なものであった．しかし Poincaré は「Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が正準方程式の形を保つような変数変換を与える」との性質を用いて，きわめて容易に Delaunay の方程式を導いている．

Poincaré が，「Jacobi の定理」と称する定理を 2 つ紹介した後，直ちに上の議論に入ったため，正準形を保つ変換と Hamilton-Jacobi 方程式の完全解の関係は Jacobi によって確立されたものと考えられがちである．実際いくつかの力学系の教科書は，この関係を紹介する時点で，Jacobi の名前を出している．しかし，Jacobi は実際この定理に到達したのだろうか．

力学史，あるいは偏微分方程式の歴史の研究において，Jacobi が正準方程式の解を Hamilton-Jacobi 方程式と名づけられている非線形 1 階偏微分方程式に帰着して解く方法を提示したことは指摘されている．F. Klein は『19 世紀の数学』のなかで，この事実とともに Jacobi が母関数を用いて正準形を保つ変換の概念に達していることを指摘している．しかし，Jacobi が，Hamilton-Jacobi 方程式の解と正準形を保つ変換の関係に気がついたとの指摘はどこにもない．

本報告の目的は，Poincaré が用いた Hamilton-Jacobi の方法の原点がどこにあ

るかを探ることである．見通しよく議論を進めるために，まず，今日 Hamilton-Jacobi 理論と呼ばれている2つの種類の理論を確認しておこう．そのうえで，Jacobi の原典にあたり，彼が実際に何をやったか見ていこう．そして,『新しい方法』を再検討し，Hamilton-Jacobi の偏微分方程式と正準形を保つ変数変換を結びつけたのは Poincaré であることを示していきたい．さらに， Charlier が Poincaré の成果をふまえて，変数変換に伴う Hamilton-Jacobi の方法を確立したことを示してまとめとする．

2．数学的準備：Hamilton-Jacobi 理論とは何か

正準方程式と関連づけられた Hamilton-Jacobi 方程式の理論とは，何を指すのだろうか．大きく分けて2つあるだろう．

ひとつは，偏微分方程式論におけるものである．そこでは（たとえば Courant=Hilbert），

Hamilton-Jacobi の偏微分方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}+F\left(t,x_1,\cdots,x_n,\frac{\partial W}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (HJ1)$$

に対し，その完全積分 $W=W(t,x_1,\cdots,x_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)+\alpha$（ここで，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha$ は任意定数）がわかれば，方程式

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}=y_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}=\beta_i \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (HJ2)$$

から正準方程式(1)の解が得られる．ここで，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ は新たに導入した任意定数である．

との定理が提示されている．本報告では，これを **Hamilton-Jacobi 理論の第1定理**と呼ぶことにする．

一方,「解析力学」や「力学系の理論」と称する教科書（たとえば Whittaker）においては，

正準方程式(1)で定義される系の変数に，方程式

$$P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \qquad y_i=\frac{\partial W}{\partial x_i}, \qquad (i=1,\cdots,n)$$

で定義される変換を行なうと,

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{HJ3}$$

となる. ここで $W = W(x_1, \cdots, x_n, Q_1, \cdots, Q_n)$, $K = F + \dfrac{\partial W}{\partial t}$ である. もし, W が

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{HJ1}$$

をみたせば, $K = 0$ となり, 方程式(1)は直ちに積分できる.

との定理があげられている. 本報告ではこの定理を **Hamilton-Jacobi 理論の第2定理**と呼ぶことにする.

いずれの定理も, 正準方程式 (1) を直接解くかわりに Hamilton-Jacobi 方程式と呼ばれる非線形1階偏微分方程式 (HJ1) を解いている. したがって両者は「常微分方程式を偏微分方程式に帰着して解く方法」とまとめることができるだろう. しかも, 実際に正準方程式 (1) を解くとき, どちらの定理を用いても, 解を導く手続きは同じである.「第1定理」によれば, 正準方程式 (1) に対応する Hamilton-Jacobi 方程式の完全解 W に対して, (HJ2) 式により正準方程式の解が得られる. 一方「第2定理」によれば, Hamilton-Jacobi の完全解 W を用いることにより, $K = 0$ となるから, $P_i = const., Q_i = const.$ が得られる. したがって, (HJ3) 式は変数 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ を t と $2n$ 個の任意定数 $(P_1, \cdots, P_n, Q_1, \cdots, Q_n)$ の関数として表すから, これらは正準方程式 (1) の解を与える. すなわち, Hamilton-Jacobi 方程式を解いて, 完全解を求め, それを変数と任意定数について微分することにより, 正準方程式の解を導くという手続きは「第1定理」「第2定理」ともにかわらない.

しかしながら, この2つの定理の意味はまったく異なっている.「第1定理」は, Cauchy らが導いた偏微分方程式を常微分方程式に帰着して解く方法の逆を与え, 常微分方程式と偏微分方程式の解の間の関係を表している. これに対し「第2定理」が意味しているのは, 正準方程式の形を保ち, かつ K を簡単な関数にするような変数変換を施し, 正準方程式そのものを容易に積分できるような形に帰着させることである. Hamilton-Jacobi 方程式の解は, そのような座標変換に伴うものとして捉えられている.

Poincaré は，位置と運動量を変数としていた正準方程式から天体軌道の要素とする正準形の方程式を導いたのであるから，「第２定理」に相当するものを用いていたことは疑いないだろう．

3. Jacobi の成果

すでに指摘されているように（たとえば Dugas），Jacobi は W. R. Hamilton の力学研究での成果を修正することにより，「第１定理」を導いた．この結果は 1842-43 年の『力学講義』で発表されている．ただし Jacobi の場合，正準座標は (q_i, p_i)，全エネルギーは H で表現している．正準方程式のような常微分方程式を偏微分方程式に帰着して解くことは，一見して問題を複雑なものにするように思える．しかし，Jacobi は，問題によっては偏微分方程式が変数分離形になるような適当な座標を選ぶことが出来，この場合は偏微分方程式を解く方が常微分方程式を直接積分するより容易であることを示した．２つの固定中心による引力の問題が，その一例である．

なお，常微分方程式を偏微分方程式に帰着する発想自体は，すでに 1837 年に提示されている (Jacobi [1837a])．ただし，そこではデカルト座標が導入されており，運動方程式はニュートン形，すなわち２階常微分方程式でかかれていた．

一方で Jacobi は，1837 年，“Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique ”(Jacobi [1837b]) と題する論文において，正準方程式に関する新しい定理を発表した．

正準方程式系

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a_i} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{J1}$$

を考える．ここで，$H = H(t, a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n)$ とする．変数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n)$ と新しい変数 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ が，方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial a_i} = -b_i \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{J2}$$

によって関連づけられたとする．ここで ψ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ の関数である．このとき，新しい変数は，

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{J3}$$

をみたす.

Jacobi はこの論文で，(J1) 式のような対称性を持つ方程式を "Canonique"，すなわち正準と名づけた．今日では，力学の正準方程式がもっともよく使われている．そのとき正準方程式を構成する座標，(J1) 式の (a_i, b_i) に対応するもの，は質点の位置と運動量を表すという物理的な意味を持っており，両者は相互に関係づけることができる．それゆえ，正準方程式を構成する座標にはつねに特別な意味があると考えられがちである．しかし，Jacobi が単に正準方程式といったとき，そのような関係は仮定されていない．なお，(J1) の 2 つの式に共通に現れる関数 H をハミルトン関数と呼ぶ．力学の方程式においては，これは全エネルギーとなるが，正準方程式一般においては，必ずしもそうではない．

この定理で Jacobi が示そうとしたのは，もとの変数と新しい変数の間に一定の関係があれば，新しい変数 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ と (J1) に含まれる関数 H を新しい変数でかき換えたものの間に，正準方程式 (J2) が成り立つことであった．微分方程式一般ではあまりみられない，正準方程式に固有の特徴を Jacobi は指摘したのである．この定理こそ，正準方程式の形を保ったままなされる変数変換の条件を与えた最初の定理である．ただし，この定理の意味するのは，こうした条件をみたす関数 ψ が存在すれば，正準形を保つ変換が得られるというだけである．

Klein は，Jacobi のこの結果を指して，正準変換の「母関数」の概念があることを指摘するとともに，正準変換の例を挙げている[(2)]．この記述から，Jacobi が実際に正準変換の母関数を用いて問題を解いたと判断する Klein の読者もいることだろう．しかし，これは Jacobi 自身の手続きを正確に捉えたものではない．確かに Jacobi の関数 ψ を母関数の萌芽とみることはできる．しかし，Jacobi 自身は関数 ψ を実際に構成しているわけではないし，こうした関数をどのように導くかといった議論をしているわけでもない．しかも，Jacobi 自身，この変換を用いて正準方程式を変換し，実際に解いたという例も挙げていない．もちろん，Hamilton-Jacobi 方程式の解と関数 ψ との関連にもまったく触れていない．

この時点で定理の証明は付されていない．しかし，1890 年に出版された遺稿で，この定理と同等の定理が証明とともに示されており，1837 年の定理の証明も同様になされたと察せられる．そこで Jacobi が用いた手法は，ψ が $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, a_1, a_2, \cdots, a_n$，について 2 回微分可能なことを仮定し，微分する

ことだけであった．1890 年論文においても，上に述べたような事情は変わっていない．

Jacobi の 1837 年の仕事は，正準形の形を保つ変換を考えるという視点を与えたという意味で,「第 2 定理」の契機となるものではあった．しかし，その変換と Hamilton-Jacobi 方程式を結びつけていたと考えられる証拠は，今のところ，ない．

4. Poincaré の構成

4-1. 第 2 定理の成立

上に見たような Jacobi の成果を押さえた上で,『天体力学の新しい方法』を検討し，Poincaré 自身の行なった拡張を明確にしよう．

Poincaré は,「Jacobi の第 1 定理」として，本論文の「第 1 定理」を,「Jacobi の第 2 定理」として，1837 年の定理を，いずれも証明をつけずに紹介している．「Jacobi の第 1 定理」は，Jacobi が『力学講義』で発表したものからほとんど変更されていない(3)．しかし，1837 年の定理については，H に対応する F は，t を陽に含んでいないものとし，$(J2)$ を

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = x_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial h_i} = h'_i$$

とかき換えている．Poincaré の場合，(J1) 式に相当する式は (1) で，Jacobi の ψ は S でかいているので，(J2) 式第 2 式に相当する式をマイナスの符号をつけない形で用いているのが，Jacobi との本質的な違いである．

Poincaré が，Jacobi の 1837 年の定理をとり上げるにあたって，マイナスの符号をつけなかった理由ははっきりしていない．不注意なミスであったとも，本質的な修正を含むとも考えられる．Jacobi の 1890 年の証明は，ここに負の符号がないとなりたたない．ただし，後に Poincaré 自身が，別の方法で $(P1)$ 式をみたす変換は，正準方程式を保つことを示しているので，ここで提示している条件自体は誤りではない．

これら 2 つの定理を提示した後，第 7 節において Poincaré は，Jacobi の 1837 年の定理での a_i，b_i，H を q_i，p_i，$-F$ とおきかえることにより，以下の定理を得た．

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{P1}$$

に対して，ある関数 $S = S(q_1, \cdots, q_n, h_1, \cdots, h_n)$ があり，

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial h_i} = h'_i \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{P2}$$

となれば，

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h'_i}, \qquad \frac{dh'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial h_i} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{P3}$$

となる．

ここで (HJ2) 式と (P2) 式を比較してみると，(HJ2) の W が S の役割を果たしていることがわかるだろう．すなわち，正準方程式(1)に対応する Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が，(P2) をみたすことが示されるのである．Poincaré の修正は単純なものであったが，これによって Jacobi の 1837 年の定理と Hamilton-Jacobi 方程式が関連づけられたのであった．「Hamilton-Jacobi 理論の第 2 定理」の本質的な発想がここで得られたといえるだろう．

なお，(HJ2) 式第 2 式で，任意定数 β_i に変えて $-\beta_i$ とおいても，この定理は成り立つ．したがって，第 7 節の第 1 定理を修正をすれば，Jacobi の 1837 年の定理の形をとりながら，正準形を保つ変換と Hamilton-Jacobi 方程式の関係をつけることは可能である．このことは，後に Charlier の仕事を見る際，再度論じよう．

4-2 ケプラー運動への応用

Poincaré 自身は，「Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が正準方程式の形を保つ変換を与える」と明確に述べてはいない．しかし，彼がこのことをはっきり理解していたことは，Delaunay の軌道要素を持つ正準方程式を導く彼の手続きから，見てとることができる．

座標の原点に固定された質量 M の引力の影響のもとでの質量 1 の質点の運動を考える．この質点の座標を (x_1, x_2, x_3)，速度（＝運動量）の成分を (y_1, y_2, y_3)

とする．

$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} = \frac{2M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

とおくと，運動方程式は，

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{P4}$$

となる．極座標

$$x_1 = r \sin \omega \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \omega \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \omega$$

で表現したとき，(P4) に対応する Hamilton-Jacobi 方程式は，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \omega}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{2M}{r} + 2h$$

となる．ここで新しい任意定数 G，Θ を

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \Theta\sqrt{M}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2 M}{\sin^2 \omega} = G^2 M$$

として導入すると，Hamilton-Jacobi 方程式は，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{G^2 M}{r^2} = \frac{2M}{r} + 2h$$

となる．Poincaré はこの方程式の完全解を $S = S(x_1, x_2, x_3, G, \Theta, h)$ とした．「Jacobi の第 1 定理」から，正準方程式の解は，新しい変数 h', g, θ を導入することにより

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad h' + t = \frac{\partial S}{\partial h}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta}, \tag{P5}$$

となる．今，

$$L = \sqrt{\frac{-M}{2h}}, \quad l = n(t + h')$$

とおくと，$\dfrac{\partial S}{\partial L} = l$ となり，完全解は，$S = S(x_1, x_2, x_3, G, \Theta, L)$ に，(P5) 式は

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta}, \tag{P6}$$

と置き換えられる．ここで，n は平均角速度，h' は近日点（あるいは近地点などでもよい）の通過時刻である．g は，近点引数と呼ばれ，昇交点から近日点までの角度を与えるものである．Poincaré は，新しい任意定数には慣用的に用いられてきた意味があることを指摘した．すなわち，a を長軸半径，e を離心率，i を軌道面の傾斜とすると，

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad H = G\cos i$$

となる．Poincaré はこれらの変数をケプラー変数と呼んでいる．

これらが時間の関数として求まると，実用上有用である．1860 年，Delaunay は，これらの座標もまた正準方程式をみたすことを示していた．ただし，その過程は複雑で，Delaunay 自身，Binet の論文を参照せよと示しているだけである．しかし，Poincaré が導いた「Hamilton-Jacobi 理論の第 2 定理」を用いると，$l, g, \theta, L, G, \Theta$ が正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}, \quad \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}, \quad \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Theta}, \end{cases} \qquad (P7)$$

をみたすことが容易に示せる．Hamilton-Jacobi 方程式の完全解を，はじめの変数 x_1, x_2, x_3 から任意変数 L, G, Θ への，正準形を保つ変換を与える関数と見なせばよいからである．実際彼は，数行でこのことを示している．

この例が重要なのは，「Hamilton-Jacobi 理論の第 1 定理」＝「Jacobi の第 1 定理」と「Hamilton-Jacobi の第 2 定理」が同時に取り上げられているからである．このことはまた，Poincaré が Hamilton-Jacobi 方程式の解が 2 つの意味を持つこと，すなわち正準方程式の解と正準形を保つ変換を与えることを認識していたことを示している．正準形を保つ変換の理論と Hamilton-Jacobi 方程式の理論との関係は Poincaré によって確立されたのであった．

4-3 正準形を保つ変換：Poincaré の新しい特徴づけ

Poincaré は，「Jacobi の第 2 定理」を提示した直後に，正準形を保つ変数変換の例として，恒等変換と直交変換をあげている．ただしそこでは，正準形を保つ変換の理論は，Jacobi のあげた変数の間の関係以上には深められていなかっ

た．Poincaré 独自の理論発展がなされたのは,『天体力学の新しい方法』第3巻第29章である．

ここで Poincaré は，正準方程式(1)をみたす x_i, y_i に対し，新しい変数 α_i, β_i が

$$\sum \beta_i d\alpha_i - \sum y_i dx_i, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{P8}$$

を完全微分形にするように選ぶことができれば，α_i, β_i も同じハミルトン関数を持つ正準方程式をみたすことを変分法を用いて示したのであった．Jacobi とは別の，正準形を保つ変換に関する基準がここで示されたのであった．

では，Poincaré の新しい定理と Jacobi の定理との関係，すなわち Hamilton-Jacobi 方程式の完全解との関係を Poincaré はどう捉えているのだろうか.『天体力学の新しい方法』では，正準形を保つ変換に関して，これ以上の進展はない．そこで，後に行なわれたパリ・ソルボンヌ大学での『天体力学講義』を見ていこう．

Poincaré はここでもまた，Jacobi の仕事を紹介することから講義を始め，正準方程式を導入した後，正準形を保つ変数変換を (P8) 式によって特徴づけている．そして，Poincaré の修正した Jacobi の 1837 年の定理の条件をみたす変数の組が，(P8) 式をみたすことを示している．このことにより，Poincaré の正準形を保つ変数変換の条件は，Jacobi の提示した条件を含んでいることが示された．こうして，Poincaré は，自らの定義のなかに Jacobi の成果を取り込んだのであった．

Jacobi は，ハミルトン関数が時間を陽に含む場合まで含めて定理を与えてきたのに対し，Poincaré は，それが時間に陽に依存しない場合に制限して議論を進めてきた.『天体力学講義』において，Poincaré は，ハミルトン関数が時間を陽に含む場合を論じる．Poincaré は，このとき，もとの変数 x_i, y_i と新しい変数 α_i, β_i の間に $\sum \beta_i d\alpha_i - \sum y_i dx_i$ が完全微分形になるような関係があるならば，変数変換後の正準方程式は

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial(H-W)}{\partial\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial(H-W)}{\partial\alpha_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

となることを示した．すなわち，正準形式は保たれるものの，ハミルトン関数は変化するのである．ここで，$\sum \beta_i d\alpha_i - \sum y_i dx_i = dS + W dt$，$S$ と W は x_i, y_i, t の関数である．

Jacobi はハミルトン関数が変化するということは考えていない．Poincaré は

その点で，正準形を保つ変数変換をやや広く捉えているといえるだろう．ただ，この議論では，今日の定理で与えられているような，Hamilton-Jacobi 方程式の解と変換後のハミルトン関数との関係が捉えられていない．以上が Poincaré の成果の到達点であった．

5. Charlier の整理

Hamilton-Jacobi 方程式の解と変換後のハミルトン関数の関係が明確にかかれているのは，1907 年に出版された，Charlier の教科書『天体力学』第 2 巻第 11 章である．Tisserand の『天体力学概論』，Poincaré の『天体力学の新しい方法』とならぶ，1900 年前後に表された代表的な天体力学の教科書である．扱っている題材と彼自身の引用，そして書かれた年代から，Poincaré の『新しい方法』の少なくとも前半の部分は知っていたうえでなされた著作と推定される．

Charlier は，Jacobi の 1837 年の定理を拡張するという立場をとる．すなわち，もとの変数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ から新しい変数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ への変換に伴う関数 ψ が t を陽に含む場合にまで拡張したとき，どのような事情になるのか考察するのである．ψ が t に陽に依存するとの条件のもとで微分計算を施すことにより，Charlier は，変換後の正準方程式に含まれるハミルトン関数が，$H + \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ となることを示した．

つぎに，Charlier は変数変換前の正準方程式に伴う Hamilton-Jacobi 方程式の完全解が，Jacobi の ψ としての性質をみたすことを指摘する．Chalier の場合は，（HJ2）第 2 式の β_i にかえて $-\beta_i$ とおいている．Jacobi の『力学講義』の証明によれば，このようにおいた場合でも (HJ2) 式は正準方程式の解を与えることが示されている．Carlier はこのようにして，Hamilton-Jacobi 方程式の完全解と正準形を保つ変換を与える関数の関係を示した．

さらに Charlier はこの結果から，ψ として Hamilton-Jacobi 方程式の完全解をとれば，変換後の正準方程式のハミルトン関数は 0 となること，すなわち

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = 0 \qquad (n = 1, \cdots, n) \tag{C3}$$

となることを指摘した．すなわち，

$$\alpha_i = const. \qquad \beta_i = const.$$

となるのである．

Charlier 自身が例示しているのは，この関係を利用して，摂動論の基本的な関係式

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\beta_i},\qquad \frac{d\beta_i}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_i}\qquad (n=1,\cdots,n) \tag{C4}$$

を導くことである．ここで R は摂動関数である．摂動がある場合のハミルトン関数 H を $H=H_0+R$（H_0 は摂動がないときのハミルトン関数）とし，H_0 をハミルトン関数とする正準方程式に伴う Hamilton-Jacobi 方程式の完全解 W を変換の関数として用いることにより，$K=H_0+R+\dfrac{\partial W}{\partial t}=R$ となることから，(C4) 式を導くというやり方を Charlier はとっている．この方程式自体は，1837 年の同じ論文で Jacobi が示したものである．Jacobi は証明は与えていないが，第 2 節で検討した結果からすると，Charlier の方法をとったとは考えにくい．

ここで，Hamilton-Jacobi 方程式の完全解の使われ方が『天体力学の新しい方法』第 1 巻とは異なっていることに注意しよう．Poincaré の場合は，正準方程式を保つ変換を与える関数として完全解を利用していた．他の関数を使う可能性はその時点では考えていない．しかし Chariler の場合は，変換後の正準方程式を考えた上で，これを利用している．正準形を保つ変換は，Hamilton-Jacobi 方程式の完全解以外にもある．しかし，これを利用すれば，変換後の正準方程式が積分しやすくなる．そういう意味で Hamilton-Jacobi 方程式の完全解は有用であるというのが彼の立場であった．Charlier の理解がここまで達していたとすれば，本論文の「Hamilton-Jacobi の理論の第 2 定理」の定式化に相当することは，ほぼなしえたといえるだろう．

6. おわりに

『天体力学の新しい方法』の読者の多くは，Hamilton-Jacobi 理論と正準形を保つ変数変換の関係は Jacobi が提示したと思っていると察せられる．しかし，本報告で示したように，実はこの関係は，いってみれば，Jacobi と Poincaré がふたりがかりで作り上げたものなのである．Jacobi は確かに，正準方程式を解くことが Hamilton-Jacobi 方程式を解くことに帰着されることを示した．また，方程式の正準形を保つ変数変換に伴う関数の性質も特徴づけている．しか

し，Hamilton-Jacobi 方程式の解と正準形を保つ変数変換を結びつける発想はJacobi にはない．すなわち，Poincaré 自身の仕事なのである．Jacobi の仕事に基づく Poincaré の修正は，ごく小さなものであった．しかし,「Hamilton-Jacobi 理論の第 1 定理」から「第 2 定理」への重要な転換の契機となるものなのである．

Jacobi の ψ は，正準変換の母関数と呼ばれるものの原型である．母関数という言葉は Carathéodory が接触変換の理論を論じる際に導入したものである．このことからも察せられるように，正準変換の理論は単なる微分方程式の理論にとどまらず，Lie による変換の理論と密接に結びついて発展してきたものである．正準形を保つ変換が，接触変換の理論と結びついて，今日の「正準変換」と呼ばれる理論が形成されていく過程を追跡することをつぎの課題としたい．

注

(1) 今日では Jacobi 式に，正準座標を (q_i, p_i)，全エネルギーを H で表現し，正準方程式を

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

とかくことが多い．

(2) 今日，正準変換という言葉の定義はいくつかある．この報告では，正準変換というときは、「方程式の正準形を保つ変換」を意味することとする．

(3) ハミルトン関数が時間 t を陽に含まない場合，対応する Hamilton-Jacobi 方程式は

$$F(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial x_n}) = \alpha$$

となり，その完全解は，$V = V(x_1, \cdots, x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) + \alpha$ （$\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha$ は任意定数）の形をしている．この場合正準方程式の解は

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau$$

で与えられる．ここで $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau$ は新たに導入した任意定数である．『天体力学の新しい方法』で Poincaré が用いている「Jacobi の第 1 定理」は，この形をしたものである．

文献

Barrow-Green, J.,
[1997] *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1997.

Binet, J.,
[1841] "Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les formules générales de la dymanique", *Journal de l'École Polytechnique*, (28. cahier) 1841, pp.1-94.

Carathéodory, C.,
[1935] *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, (1935), Leipzig.

Charlier, C. V. L.,
[1902-1907] *Die Mechanik des Himmels*, vol.1 (1902), vol.2 (1907), Leipzig

Courant, R. and Hilbert, D., [1937] *Methoden der Mathematischen Physik*, Zweiter Band, 1937. 邦訳『数理物理学の方法 3』，斉藤監訳，1962 年，東京図書.

Delaunay, C. E.,
[1860] "Théorie du mouvement de la lune I", *Mémoire de l'Academie des Sciences*, vol.28, 1860, 1-883.
[1867] "Théorie du mouvement de la lune II", *Mémoire de l'Academie des Sci-*

ences, vol.29, 1867, 1-931.

Dugas,R.,
[1988] *A History of Mechanics*, (1988, First edition 1955) Dover.

Goroff, D.L.,
[1993] "Henri Poincaré and the Birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* " in *New Methods of Celestial Mechanics*, 1993, Harvard University, pp.1-107.

Jacobi, C. G. J.,
[1837a] "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen," *Journ. Reine Angew Math.*, **17**, (1837), pp.97-162.=in *Werke* **4**, pp.57-127.
[1837b] "Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, *Comptes rendus*, **t.5**, (1837) pp.61-67.=in *Werke* **4**, pp.129-136.
[1866] *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.
[1890] "Über diejenigen Probleme der Mechanik in welchem eine Kräftefunction existirt und über die Theorie der Störungen ," (遺稿), =in *Werke* **5**, pp.219-395.

Klein, F., [1926] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I*, 1926, Springer. 邦訳『19 世紀の数学』, 弥永監修, 1995 年, 共立出版.

Poincaré, H.,
[1892-1899] *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, **1** (1892), **2** (1893), **3** (1899), Republished by Blanchard, Paris, 1987.
[1905-1910] *Leçons de Mécanique Céleste*, vol.1 (1905), vol.2 (1907), vol.3 (1910), Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire.

Tisserand, F. F.,
[1889-1896] *Traitè de Mécanique Céleste*, vol.1 (1889), vol.2 (1891), vol.3 (1894), vol.4 (1896), Paris.

Whittaker, E. T.,
[1944] *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, First edition published 1904, 4th Edition, 1944, New York. 邦訳『解析力学 上・下』, 多田・藪下訳, 1977, 1979 年, 講談社.