ユークリッド以前の比例論
— 複数の比例論は本当に存在したのか

大阪府立大学　斎藤　憲

1. 『原論』の二種類の比例の定義（拙著『ユークリッド『原論』の成立』[4]p.88ff. 以下『成立』という）.

   - 第５巻：非共測量（通約不能量）にも適用可能
   - 第７巻：数（自然数）を対象．原理的には任意の共測量を扱える.

   歴史的には第７巻の定義が先行するとされ，第５巻の定義はエウドクソス (*ca.*390 – *ca.*337) に帰される．この定義は複雑で直観的理解が容易でないという代償はあるが，非共測量にも適用でき，ギリシアの幾何学において比と比例の扱いで必要な全ての議論を正当化しうる.

2. この両者の間に，非共測量の発見から，エウドクソスの比例論の間の時期に，非共測量を扱える別の比例論が存在したと考える主張がある.

   (a) その一つは「相互差引による比例の定義」と呼ばれる．これは1930年代のベッカーの論文 [1] に遡り，多くの影響を与えた (『成立』p.95ff.)．近年ではFolwerが相互差引という議論が利用された可能性を幅広く論じている.

   (b) またKnorrはかつて[3]において，アルキメデス（『平面の平衡について』第１巻命題6, 7），テオドシオス（『球面幾何学』第３巻命題9, 10），パッポス（『数学集成』第５巻命題12他）の証明（別紙参照）から，別の種類の比例論が存在したと主張し，これこそが「エウドクソスの比例論」であり,『原論』第５巻の比例論はユークリッド本人のものであると論じた

3. これらの「再構成された比例論」をめぐる議論において，常に暗黙の前提とされてきたことがある．それは比例論，あるいは比・比例の定義というものが存在したきて，当時の数学者たちが，現代の歴史家たちに劣らぬ関心をそこに寄せていたであろうということである．この前提を私は疑う.

4. 比と比例そのものへのギリシア人の関心を我々が確認できる資料は『原論』第５巻の精緻な比例論を除けばほとんどない．それすら比を対象

とした理論の展開としては完全ではなく，幾何学で用いられる定理の基礎付けの試みとしてよりよく理解できる．

5. ある意味で比と比例の厳密な定義は幾何学には不可欠ではない．幾何学に必要なのは有用な定理，証明技法である．実際，ギリシアの幾何学は「比」の実効的な定義を欠くが何の問題も生じていない．

   これは暴論に聞こえるが，実は幾何学で頻繁に用いられる比例論の定理は決して多くはない．

   (a) 平行四辺形，三角形の底辺と面積の比例 (6–1:『トピカ』の命題)
   (b) 等しい量と比例，比例の推移性 (5–7, 5–9, 5–11)
   (c) 比例と項の大小，倍数関係 (5–14a, 5–15)
   (d) 中項の交換 (5–16)
   (e) 比例の変形に関する諸定理 5–12, 5–17 以下

   もちろん『原論』ではこれらすべてが比例の定義によって厳密に証明されるが，(b), (c) は発展の初期段階では当然の性質とされていたであろう．(d) は等積長方形の逆比例 (6–16) から線分に対しては導かれるので当初は不要．(e) は初期の業績には見られない．すると (a) の『トピカ』の命題さえ認めれば幾何学での議論に不自由はない．

6. 『原論』には「与えられた分けられていない直線を，与えられた分けられている直線と同様に (*homoiōs*) 分けること」(6–10) という興味深い命題がある．ここでは「同様に」という語が「比例して」の意味で用いられている．相互差引の比例論の再構成の契機となったアリストテレスの『トピカ』にもこの語が比例の意味で現われ，この用法は不正確なものとして批判されているように見える (『成立』p.105ff 参照)．

   この語の形容詞形 *homoios* は図形に関して用いられるときは「相似な」という意味である．この事実は図形の相似とそれらの対応辺の比例が必ずしも明確に区別されていなかったことを示唆する．

7. 比例が最初は「同様の関係である」といった漠然とした概念であり，それは数ならば同じ多倍（倍数），部分，部分ども（約数，約数和）[第7巻定義 21] であること，幾何学量ならば相似図形の対応辺であること，として理解されていたと考えることは，根拠なき憶測であろうか．

8. 『原論』第５巻の比例論はつまるところ，比例を抽象的な量の間の関係として，相似図形や平行線で切り取られた線分のような幾何学的イメージから独立に定義して，そこから逆に幾何学的図形における対応辺の比例関係を証明するものである．

   幾何学的直観から独立した比例の定義は偉大な成果であるが，その必要性が歴史的に古い時代から意識されていたと想定する根拠はない．

9. 以上の議論を別の観点から見直してみよう．比や比例という数学上の対象はいつ成立したのであろうか．数や三角形といった，より基本的な対象の成立よりも後であったことは容易に想像できる．それでは比と比例という対象は突然考えつかれ，定義されたのか．

   新たな数学の対象が成立する過程として一般的なのは，ある証明・探求の技法が発明され，その技法が体現するアイデアが証明のコンテクストから抜け出して一つの実体として認識される，というものである．たとえば方程式の解法に関連して探求された置換が置換群となり，さらに一般的な群という対象が成立したのはその例である．なお，この議論はエンリーコ・ジュスティ『数学の対象の本性に関する仮説』（近刊，日本語訳も多分近刊）に負う．

10. 幾何学においても厳密な定義によって基礎付けられた数学的対象としての「比例」が定義される前に,「a が b に対するように c が d に対する」といった言葉遣いによる議論の有効性が認識され，「同様な量的関係」という概念が生じ，それが後に『原論』第５巻に見るような厳密な定義を与えられたと考えることは不自然ではない．

11. このようないわば漠然と定義された比例の利用の中で Becker の指摘した相互差引や，Knorr の指摘した共測量に帰着させる証明技法が有効な議論の手段として発展したと考えることは十分可能である．

12. それならば，エウドクソス以前に比と比例をきちんと定義しようとする試みがあったという仮説は根拠なき過去への投影かもしれない．何者でもない．

13. Knorr の指摘した共測と非共測の場合を分離して議論についていえば，これは証明技法としては十分な有効性を備えている．アルキメデスにおける例は spurious である可能性が高いが（[2] 参照），パッポスやテオドシオスの例もあり，非共測な比に対して，それに十分近い共測な

比を取れるという原理に基づいた証明技法が存在し，活用されてきたことは疑いない．

疑わしいのは，それを基礎とするが比例論が存在したという主張にある．たしかにこの証明技法から非共測量を含む比例論を構築する論理的可能性は存在する．この可能性が実際に追求されたという証拠はどこにもないのである．

14. 『原論』第５巻自体もまた，以上の議論から違った意義を与えられることになる．幾何学的直観から完全に独立な比例の定義を与え，比例を数学的対象として確立したことが第５巻の最大の意義であろう．

第５巻およびそれに続く諸巻は比例に関するあらゆる定理・性質を完全に網羅してはおらず，主に幾何学で利用される主要なものを証明し，残りのものも証明できることを示唆したにすぎない．その意味で第５巻はこの新たな立場（比例を幾何学の外から基礎付ける）のプログラムを示すものに留まる．

幾何学から独立した対象としての比例を確立したか，ということを仮に評価基準にするならば『原論』第５巻は必ずしも十分なものとはいえないのである（それでもこの比例論はあまりに時代に先行しすぎていたために中世から近世にかけて長く誤解されてきたことも思い出すべきである）．

15. もっと適切な見方は『原論』第５巻は抽象的な比例論を確立することを目標としていない，ということであろうが，それならばエウドクソス以前の「比例論」なるものがこの方向を目指していなかったことは尚更のことであろう．それらは比例に関する有効な探求のツール，あるいは証明の技法，あるいはもっと単純に説得の方法としてとらえるべきなのである．

16. ユークリッド以前の比例に関する多様な議論 — 相互差引等など — の意義を否定するのではないが，それらが比例の定義を与え，比例論を構成していたのでなければならないという根拠なき要請 — それはかえってこれらの技法を疑いの眼で眺めさせることになったと思う — からこれらの技法を自由にし，利用可能な資料から有効な問題解法，証明・説得の技法としてのこれらの試みの意義を正当に再評価することこそが望まれる．

文献

[1] Becker, O. "Eudoxos-Studien I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid." *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt.B, Bd. II: 311–330.

[2] Berggren, J. L. "Spurious Theorems in Archimedes' *Equilibrium of Planes*: Book I." *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1976): 87–103.

[3] Knorr, W. R. "Archimedes and the pre-Euclidean Proportion Theory." *Archives internationales d'histoire des sciences*, 28(1978): 183–244.

[4] 斎藤　憲『ユークリッド『原論』の成立』. 東京大学出版会, 1997.