不定域イデアルの理論と多変数代数関数論への道
評伝「岡潔」のための数学ノートⅠ
（未定稿）

高瀬正仁

1．第7報の初出テキスト

昭和11年（1936年）に始まる岡潔の連作「多変数解析関数について」の第7報「二、三のアリトメティカ的概念について」の仏文原稿が書かれたのは、先の大戦の終了後三年目にあたる昭和23年（1948年）7月のことと言われている。論文ができあがってまもないころのことであろう、岡潔は「ボロ服に，風呂敷包を肩に振り分けた」姿で故郷紀見村（現在、和歌山県橋本市）を発ち、原稿を手に京都岡崎天王町に住む友人秋月康夫を訪問した。20年後、秋月康夫はこのときの情景を感銘の深い筆致で書き留めている。

> 敗戦直後の食糧困難に悩んでいる頃だった．ボロ服に，風呂敷包を肩に振り分けた，岡潔君の久し振りの訪問をうけた．第一印象は“彼もずい分と齢をとったものだ．まるで百姓のようだ”ということであった．当時，無職であった同君は，家や田を売り，芋を栽培して糊口を養いつつ，多変数函数論の開拓に励まれてきていたのである．戦中芋畑から，層の概念の芽が，不定域イデアルの形で生み出されたのである．この論文は手記のまま，1948年渡米する湯川君に託されたが，角谷[1]・Weil[2]の手を経てH.Cartan[3]に手渡され，パリで印刷されるにいたったものである．プリンストン高級研究所へ招待されたわが国科学者は，この1948年の湯川・角谷両君が戦後最初であった．そして翌年に，朝永[4]・小平君[5]と続いた．
>
> （「輓近代数学の展望（続）」の「序」より。秋月康夫『輓近代数学の展望』所収。「輓近代数学の展望（続）」は初め、「数理科学」誌に連載された。）
>
> 1）角谷静夫（かくたに・しずお）。数学者。角谷静夫は戦前すでにプリンストン高級研究所に滞在したが、1942年（昭和17年）、帰国した。『日本の数学100年史』（昭和59年（1984年）、上下二巻、岩波書店）によれば、再渡米の時期は1947年（昭和22年）である。同書、下巻、195頁参照。
>
> 2）アンドレ・ヴェイユ。フランスの数学者。1906- 年。
>
> 3）アンリ・カルタン。フランスの数学者。1904- 年。
>
> 4）朝永振一郎。物理学者。1906- 年。
>
> 5）小平邦彦。数学者。1915-1997年。

秋月康夫は岡潔が大正8年（1919年）9月、第三高等学校に入学したとき以来の親しい友人であった。京都帝国大学で岡潔とともに数学を学び（ただ

し、三高卒業、京大入学が一年遅れたため、京大時代は岡、秋月は同学年というわけではない）、京大の副手、講師を経て昭和４年（1929年）から三高教授を長く勤めたが（昭和４年４月10日就任）、昭和22年（1947年）11月15日付で新制京都大学助教授に就任した。岡潔の訪問を受ける直前、すなわち昭和23年６月２日付で教授に昇進したばかりであった。所属は理学部で、専攻は代数学である。

21年前の大正15年・昭和元年（1926年）、京都帝国大学理学部に入学した湯川秀樹が「微分、積分、微分方程式演習」に出席したとき、この演習を受け持って湯川に大きな感銘を与えたと言われているのは、京大講師二年目を迎えたころの若い日の岡潔であった。また、渡米を直前に控えたころ、湯川は岡潔のもうひとりの親友、「雪博士」こと中谷宇吉郎の訪問を受けている。確かな痕跡が残されているわけではないが、中谷からも、岡潔のために懇切な口添えがなされたであろうと思われる場面である（中谷と湯川もまた親しい友人であった）。

９月１日、湯川はプリンストン高等学術研究所客員教授に就任するためにアメリカに向けて出発し、９月３日、サンフランシスコに到着した。

おりしもプリンストン高等学術研究所には角谷静夫とアンドレ・ヴェイユが滞在中であった。ヴェイユは不定解析研究に代数幾何学を応用するという斬新なアイデアを提出して強力に押し進めたことで名高いが、1935年、まだ二十代だったころ、論文

「コーシーの積分と多変数関数」（数学年報111、1935年、178〜182頁）

を書き、岡潔の研究に深い影響を及ぼした経歴をもつ数学者である。

湯川はおそらく角谷を通じて岡潔の第７報をヴェイユに委託したのであろう。ヴェイユはそれをフランスのアンリ・カルタンのもとに届けた（秋月は「手渡された」と書いているが、ヴェイユが自分でパリにもっていって文字どおり手渡したのか、あるいは郵送したのか等々、さまざまな状況が考えられる。詳細は不明である）。アンリ・カルタンは長い年月に渡って岡潔と同じ多変数解析関数論の研究に携わっていた数学者であり、第１報「有理関数に関して凸状の領域」（1936年）第２報「正則領域」（1937年）が公表されたころからすでに、岡潔の研究の真価を理解した人である。この当時、フランス数学会の会長であった。後年、岡潔もまたアンリ・カルタンを懐かしく回想し、

この数学者は、多変数解析関数の、当時まだまったく開拓されていなかった分野を、私と手を携えて開拓していた人であって、いわば三十年来の同僚である。

（岡潔『紫の火花』所収「春の水音」より。同書314～315頁参照。）

という言葉を遺している。

第７報がフランス数学会雑誌に受理された日付は「1948年10月15日」と記録された。この論文は書き上げられた直後に湯川秀樹の手を経てアメリカに持ち込まれたが、この幸いな出来事も決して偶然とは思われない。確証はないが、これはおそらく秋月康夫や中谷宇吉郎などの企画であり、友人や後輩の支援に支えられながら、湯川の渡米に間に合うよう執筆が急がれたと見るのが妥当であろう。

世界大戦終了直後の荒廃した世相を背景にして、いくつもの美しい愛情（師弟愛、友情、学問を通じて成立した心の通い合い）に囲まれながら、日本の山村で書かれた一篇の論文が世に出ようとする情景は、半世紀後の今日のぼくらの目にも真にめざましい。ここまでは事態は順調に推移したと見てよいのではないかと思う。だが、実際に公表されるまでにはなお日にちを要し、翌翌年、すなわち1950年に刊行されたフランス数学会雑誌78を待たなければならなかった。この雑誌の巻頭論文が、岡潔の連作「多変数解析関数について」の第７報、すなわち

「多変数解析関数について　VII. 二、三のアリトメティカ的概念について」

（フランス数学会雑誌78、1950年、1～27頁）

の初出テキストである（末尾に、「このマニュスクリプトは1948年10月15日に受理された」という記載がある）。

第７報の仏文標題は

“Sur quelques notions arithmétiques”

となっている。ぼくはこれを機会のあるたびに「二、三のアリトメティカ的概念について」と訳出するのを常としてきたが、岡潔の晩年の遺稿『春雨の曲』（未定稿。ひとまず完成した第七稿と未完の第八稿が各々50部づつ刊行された）を見ると、「三、四の算術的概念について」（第七稿、318頁参照）という日本語標題が与えられている。「三、四」というのはやや珍しい言い方だが、「二、三」とするよりもよりよく実態を反映しているのはまちがいない。以後、この岡潔自身による日本語表記も適宜使用したいと思う。

２．第７報の速報「多変数解析関数ノート」

第７報がフランス数学会雑誌に受理されてから公表に至るまでには、少なくとも一年以上、足掛け二年という歳月が流れている。受理された年の翌年、すなわち昭和24年（1949年）10月25日、岡潔は京都大学で開催された日本数学会で特別講演を行なった。講演題目は

「n個の複素変数の解析関数のイデアルについて」

というものであった。わりあいに高い関心を引いたようで、学会終了後、「解析関数のイデアル」、すなわち岡潔が創案した不定域イデアルの理論をテーマにして連続講演が企画されたほどである（ただし、トラブルが起こって、頓挫したと伝えられている）。

続いて12月19日には、第７報の速報

「多変数解析関数ノート」

が「工大数学セミナー速報」（東京工業大学編集兼発行）に受理された。末尾に「第一ノート終わり」とあり、「1949年12月１日」という日付が附されている。工大数学セミナー速報は速報集だけあって処置も迅速で、早くも

第一巻第五、六号、15〜18頁。（工大数学セミナー速報。昭和24年９月30日。第一巻第五、第六号（合併号）。昭和24年12月31日発行）、15〜18頁。受理されたのは12月19日。

に掲載された。また、この速報を「第一ノート」と見て、これに続くべきノート、すなわち「第二ノート」を予告する言葉も具体的に語られているが、実際に世に現われたのは「第一ノート」のみであった。第二ノートでは、不定域イデアルの局所（有限）擬基底が存在するための必要十分条件の適切な形状について語られる予定であると言われている（工大数学セミナー速報、第一巻第五、六号、18頁参照）。第二ノートは書かれなかったが、第一ノートで言及された必要十分条件は昭和26年の第８報「基本的な補助的命題」（日本数学会雑誌３、204〜214頁および259〜278頁）、第IV章「補遺」において与えられた。

第７報の速報「多変数解析関数ノート」は全部で４頁の短篇にすぎないが、不定域イデアルの理論の契機と意義が明記されているという意味において（それに、「数学的発見はいかにして生い立つか」という「ポアンカレの問題」が取り上げられているという意味において）、端倪すべからざる内容が

盛られている。だが、半世紀後の今日、この魅力的な論攷がぼくらの目に触れる機会はきわめてとぼしい。しかもこの間には惜しむべき逸機があった。

昭和36年（1961年）2月25日、この日の日付で、岩波書店から岡潔の数学論文集

“Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables”（多変数解析関数について）

が刊行された。収録されたのは連作「多変数解析関数について」の第1報から第9報までの九論文である。それから22年後（岡潔の没後5年目）の昭和58年（1983年）6月17日、昭和37年（1962年）に書かれた第10報「擬凸状領域を創り出す新しい方法について」を加えて、論文集の増補版が刊行された。翌昭和59年（1984年）、西ドイツの出版社シュプリンガー社から、増補版論文集の英訳書が刊行された。この英訳書には、十篇の論文（I～X）のほかに、連作以前の研究のノート

「多価関数の族などに関するノート」（広島大学理科紀要4、93～98頁。昭和9年1月20日受理。昭和9年刊行。フランス文。）

や、第6報の速報

「擬凸状領域について」（昭和16年1月13日受理。帝国学士院記事17、7～10頁。昭和16年刊行。フランス文。）

も英文に訳出されて収録された。訳者はナラシムハンである。巻頭にレンメルトの「緒言」（ドイツ文）、アンリ・カルタンの一文「岡潔作品集について」（フランス文）が置かれ、各論文ごとにカルタンによる解説（フランス文）がついている。加えて岡潔の写真一葉と略歴も附されているというふうであるから、岩波書店の論文集に比して、はるかに完備した形を備えていると言えるのではないかと思う。

おそらくこの英訳書の刊行の時期が、第7報の速報が広く世に紹介されるべき唯一のチャンスだったであろう。しかしなぜかこのノートの英訳は行なわれなかった。理由は不明であり、不可解な、企画者の真意をはかりかねる事態と言わなければならないと思う。

3．初出テキストに対する岡潔の感想

秋月康夫の証言

第7報がフランス数学会雑誌に掲載される日を待ちながら、岡潔は第7報

の概要を伝えるノートを書き、続いて第８報の準備を進めていた（第８報が日本数学会雑誌に受理されたのは昭和26年３月15日である）。ところが「フランス数学会雑誌」第78巻の巻頭を飾った第７報は、岡潔が書いた原稿と同じものではなく、アンリ・カルタンの手になる多くの改変が施されていた。これは岡潔にとって意想外の出来事だったようで、後年、岩波書店から刊行された岡潔の数学論文集には、公表された第７報ではなくて、オリジナルの原稿がそのまま収録されている。岡潔がカルタンによる改変に不満を抱いたことを、明白に物語る事実である。こうして状勢はいくぶん錯綜し、第７報にはふたつのテキスト、すなわち原テキストと初出テキストが存在するという異様な事態が立ち現われたのである。原テキストの末尾には「1948年７月。日本、和歌山県、紀見村において」と記されているが、初出テキストではこれも削除されている。

ぼくらはこの事件に関する岡潔の肉声を聞きたいと思う。秋月康夫は『岡潔先生遺稿集　第一集』に寄せた「序」の中で次のような証言を書き留めている。（岡潔は昭和53年３月１日に亡くなったが、翌昭和54年、岡家に遺された軍用大型トランクの中から原稿、研究メモ、講義録などが大量に発見された。それらの一部分が岡潔の数学上のお弟子さんたちの手で整理され、『岡潔先生遺稿集』第１～７集が編纂された。軍用トランクというのは、日露戦争に従軍した岡潔の父、岡寛治の遺品であろう。）

> 岡君は論文を仕上げ、書き上げた後も、急がずそのまま時間を置いて見直していられるのが常であった。しかし発表には一言一句も忽せにせず、その表現に強い自信をもっていられた。その証拠に次のようなことがあった。戦後、H．カルタンの世話で、フランス誌上に発表した論文において、親切にもカルタンがフランス文に手を入れ、分かりにくい表現の箇所を少し書き換えられたことがあった。それに対して、岡君は感謝どころか、非常に不満で、私に強く憤激をぶちまかれたものであった。
>
> （秋月康夫の序文には日付が入っていないが、『岡潔先生遺稿集　第一集』の刊行は「1980年12月」とされているから、序文も昭和55年に書かれたと推定してよいと思う。）

この証言によれば、カルタンが行なった書き換えを見て、岡潔が大きな不満を感じたことに疑いをはさむ余地はない。解明すべき論点は不満の理由で

ある。秋月康夫の見るところでは、カルタンは岡潔のフランス文のわかりにくいところに少々手を入れただけであり、親切でしたことなのであるから、感謝されこそすれ、激怒されるべき筋合いではないことになる。しかしそれでは岡潔が強い憤懣を顕わにした本当のわけがわからなくなってしまうであろう。

梶原壌二のエッセイ「岡潔先生のお仕事」（岩波講座「基礎数学」月報10。1978年8月）には、昭和40年（1965年）の時点での岡潔の発言が紹介されている。簡単だが興味深い発言であり、層の理論への嫌悪感が表明されているという点において、きわめて貴重な証言と思う。

> 岡は筆者に“faisceau analytique cohérent（解析的連接層）という用語は嫌いであるが、今は我慢できるようになった。いくら抽象化しても、こえらん（cohérentの発音通りであるが、岡を越えないという意味）だよ。・・・”と語った（1965年）。

岡潔の第7報はフランス数学会雑誌78の冒頭に掲載されたが、この巻頭論文にすぐ続いて、一頁の白紙（28頁目）をはさんで、カルタン自身の論文

「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」

（フランス数学会雑誌78、29～64頁）

が掲載されている。末尾に「このマニュスクリプトは1949年9月15日に受理された」という記載が見られるが、岡潔の第7報が受理された日付は「1948年10月15日」であるから、きっかり11箇月後の出来事である。この間、カルタンは岡潔の第7報を研究し、適宜書き直しを行ない、しかも同時に一篇の論文を執筆して、二つの論文を同時に公表したのである。

カルタンの論文のテーマは、岡潔の第7報を層の理論の視点から見て解明することで、第7報の書き換えも同じ視点から行なわれている。このような形で紹介された結果、第7報のテーマである不定域イデアルの理論は層の理論の萌芽として理解されるようになり、有限擬基底をもつ不定域イデアルは、解析的連接層として諒解されるようになった。すなわち、不定域イデアルの理論は、「三十年来の同僚である」カルタンによって高い評価を受け、現代数学の流れに受容されたとき、まさしくその瞬間にすでに歴史的遺産へと変容しなければならない運命に置かれたのである。上記の梶原壌二の証言には、このような趨勢を甘受しようとする岡潔の感慨がよく表われていると思う。

岡潔の言葉（１）不定域イデアル

不定域イデアルと層の理論の関係の考察は岡潔の理論を理解するうえで重要なテーマである。「多変数解析関数について」という標題の講演（この講演が行なわれた日時と場所は不明だが、昭和38〜40年ころ、京都大学での講演と推定される。講演記録が残されている）を見ると、岡潔自身によるいっそう立ち入った言及がなされている。しばらく岡潔の言葉を観察したいと思う。

初めに語られるのは、解析関数論にイデアルの理論が導入されるまでの歴史的経緯である。

イデアルといいますとクンマー[1]に始まります。それからそれをデデキント[2]がアクシオマチック[3]にいいなおしました。それのエレメント[4]を数からポリノーム[5]に拡げたのがヒルベルト[6]、さらにポリノームをアナリチック・ファンクション[7]に変えようと最初にしたのは、後で知ったのですが、リュッケルト[4]です。そしてこの後、これをさらに詳しく見ようとして、1940年にアンリ・カルタンがマトリス・ホロモルフ[9]という論文[10]を書いています。これは前の正則凸状の論文[11]とともに非常に重要な論文です。これだけで後は戦争になって、知らなかったのです。ところで エレメントを アナリチック・ファンクションにしますと、どうなるかといいますと、ポリノームの場合は数の代わりに個々のエレメントを f と書けばよいのですが、アナリチック・ファンクションですと、リーマン[12]がしました通り、この f がどこで正則かという領域 δ を添えて、(f, δ) としなければならない。そのように ペアにして初めて意味をもつんです。だから私は、領域が変わりますから、不定域イデアルとしたんです。

（下線による強調はぼくが行なった。）

１）エルンスト・エトワルト・クンマー。ドイツの数学者。1810-1893年。

２）ユーリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デデキント。ドイツの数学者。1831-1916年。

３）公理的に（英語）。

４）要素（英語）。

５）多項式（仏語）。

６）ダヴィド・ヒルベルト。ドイツの数学者。1862-1943年。

7）解析関数（英語）。

8）ヴァルター・リュッケルト。ドイツの数学者。リュッケルトの論文は「冪級数イデアルの消去問題」、数学年報107、1933年、259〜281頁。ドイツ文。

9）仏語。多複素変数の正則関数を要素とする正方行列のこと。「正則行列」という用語が使えればよいが、これはすでに別の意味で使われている。ほかに適切な訳語が見あたらないが、岡潔は「正則母式」としている。『春雨の曲』第七稿、322頁参照。珍しい訳語だが、おもしろいと思う。

10）「n個の複素変数の正則母式について」。純粋数学と応用数学のための雑誌19、1940年、1〜26頁。

11）カルタンとトゥルレンの共著の論文「多複素変数関数の特異性の理論　正則領域と収束領域」。数学年報106、1932年、617〜647頁。

12）ゲオルク・フリードリッヒ・ベルンハルト・リーマン。ドイツの数学者。1826-1866年。リーマン面の概念を土台にして一変数解析関数論を建設した。

イデアルの理論は数のイデアル（クンマー、デデキント）に始まり、多項式のイデアル（ヒルベルト）へと移り、さらに解析関数のイデアル（リュッケルト、カルタン）へと変遷した。解析関数のイデアルの場合には、漠然と解析関数の集まりを考えるのは無意味であり、岡潔が言うように（岡潔はそれをリーマンにならったと言っている）、解析関数を考えることのできる場所をつねに念頭に置かなければならない。それが、数のイデアルや多項式のイデアルの場合との本質的な相違点である。

カルタンの論文「n個の複素変数の正則母式について」では、あらかじめある領域$\varDelta$を固定した上で、$\varDelta$において正則な解析関数の作るイデアルが考えられている。それ故、カルタンのイデアルは「定域イデアル」と呼ぶのが相応しいであろう。実際、岡潔は第７報の原テキストにおいて、これを「定領域Dの正則イデアル」（論文集『多変数解析関数について』、97頁参照。第２節「不定域イデアル」に見られる言葉。原テキストでは領域を表示するのに文字「D」が使われている）と呼んでいる。

呼称はこれが最善と思われるが、初出テキストでは、「定領域」から「定」が削除されて、単に「領域$\mathfrak{D}$の正則イデアル」と書き改められている（フランス数学会雑誌78、５頁参照。カルタンは文字「$\mathfrak{D}$」を使用した）。これでは、定領域から不定領域に移行しようとした岡潔の思索の流れは途切れてしまい、読者に伝わらないであろう。しかしカルタンがしたことは、あ

らかじめ領域を固定したうえで、その領域においてイデアルを考えるというだけのことであり、別段、それを「定域イデアル」と呼んでいるわけではない。「不定域イデアル」という言葉は岡潔の立場から見れば自然でも、それはカルタンの用語法ではないのである。

カルタンは岡潔とは別の道を選択し、「領域 $\mathfrak{D}$ の正則イデアル」から層の概念へと進んだのであるから、カルタンの目から見るかぎり、定域イデアルという用語はたしかに適切さを欠いているように思う。カルタンは何かしら本質的な理由に基づいて、岡潔が歩んだ道、すなわち不定域イデアルへの道を慎重に拒否したのであろう。「定」の一時の削除も意図的に行なわれ、そのために、岡潔の第7報の用語体系にいくぶん整合性が欠如するという結果を招来したのである。

さて、ある固定された領域 Δ 上の定域イデアルを考えるという段階に留まるのであれば、状勢は多項式イデアルの場合とほぼ同一である。だが、ふたつの異なる領域 Δ' と Δ'' を設定し、しかもそれらは交差するとするならば、Δ' 上の定域イデアル $\mathscr{J}'$ と Δ'' 上の定域イデアル $\mathscr{J}''$ の関係をめぐってまったく新しいタイプの問題が発生するであろう。たとえば、カルタンは次のような問題を取り上げている。

イデアル $\mathscr{J}'$ と $\mathscr{J}''$ はいずれも有限基底をもつとするとき、これらのふたつのイデアルはいかなる条件のもとで、合併 $\Delta' \cup \Delta''$ において同一の正則基底をもつであろうか。

カルタンは交わり $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$ が単連結という前提条件のもとでこの問題を考察し、求められている条件は

イデアル $\mathscr{J}'$ と $\mathscr{J}''$ が交わり Δ において同一のイデアルを生成することである。（上記の論文の「定理II」。純粋数学と応用数学のための雑誌19、15頁参照。イデアルを表記するために印刷の都合上、文字「$\mathscr{J}$」を用いたが、カルタンは別の文字を使っている。）

と答えている。

これに対して岡潔は解析関数 f に、それが存在する場所 δ を添えて、(f, δ) という順序のついた組の集まり (I) （組 (f, δ) が集まり (I) に所属することを、「f は δ に対して $f \in (\mathrm{I})$ となる」というふうに言い表わす）を考察し、それがイデアルとして満たすべき二条件を記述することによって、新しいタイプのイデアルを導入した。「多変数解析関数ノート」によれば、二条件というのは下記のようである。

1° $(f,\delta)\in(\mathrm{I})$ とし、(α,δ') は任意とすると、そのとき $\delta\cap\delta'$ に対して $\alpha f\in(\mathrm{I})$ となる。

2° $(f,\delta)\in(\mathrm{I})$ かつ $(f',\delta')\in(\mathrm{I})$ なら、そのとき $\delta\cap\delta'$ に対して $f+f'\in(\mathrm{I})$ となる。

（東工大セミナー報告１、第５、６号、16頁参照。）

この「多変数解析関数ノート」には、不定域イデアルの概念の導入に先立って、「Ｃヴァイエルシュトラスの解析要素に自由を与え、しかも同時にB.リーマンの解析要素を、もはや物理的直感さえ痕跡をとどめないような一般的な場に延長して、・・・」（東工大セミナー報告１、第５、６号、16頁参照）という魅力的な言葉も書き添えられている（しかし、意味はよくわからない）。また、このノートでは、不定域イデアルという言葉は使われず、単に「正則イデアル」と呼ばれている。これに先立って書かれた原テキストでは、「不確定領域の正則イデアル」、略して「不定域イデアル」、あるいはもっと簡単に「イデアル」と呼ぶと言われている（原テキストの第２節「不定域イデアル」より。論文集『多変数解析関数について』、97頁参照）。この用語法は初出テキストでも変更はない。

講演「多変数解析関数について」に立ち返ると、岡潔自身、不定域イデアルという言葉の妥当性を主張して、こんなふうに語を継いでいる。

これができたちょうどそのころ、戦争後二年[1]くらいですが、湯川君がノーベル賞をもらうので飛行機でアメリカへ行くというとき、この論文[2]をもっていってもらったんです。それだいぶひまがかかって出たんです。ところで、この辺、別にfaisceau（層）とか何とか知らなくてもできます。それにこんなところ、あまり問題もありません。少数だけれど、ぜひ解きたい問題、それを解くと解かんとではたいへん差が出る問題がありますが、それを解いてしまえば一応それでしまいになります。もちろんfaisceau（層）が直接代数的に意味があれば、それは別ですが。また、名前も、その前後関係からいっても、その名前の妥当さからいっても、当然、不定域イデアルというべきです。それはともかく、こんなふうにして、ヴェイユとかカルタンとか、そういった人たちと手をつないで、これらの問題をやったわけです。

（丸括弧内の言葉はぼくが補った。下線による強調もぼくが行なった。）

1）正しくは「三年」。

2）第７報。

これに対して、カルタンは論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」の第II節「モジュールの層」の冒頭（第４小節から始まる）で、層の概念を導入する理由を語っている。

岡潔とともに、**モジュールの層**の概念を導入しよう。我々は代数的位相幾何学での「層」という言葉を借用したいと思う。それは、代数的位相幾何学で、J.ルレイ[1]によってホモロジー論において導入されたものである。我々がここで同じ言葉を使用するのは、ある類似の概念を記述するためである。また、ここでは代数的位相幾何学におけるのと同様に、「局所的に」与えられたものから出発して、「大域的な」諸性質の研究へと移行することが問題になる。層の概念が導入されるのは、そのような理由があるからである。

（フランス数学会雑誌78、33頁参照。ゴシック体の一語「モジュールの層」は、原文ではイタリック体で書かれて強調されている。）

1）ジャン・ルレイ。フランスの数学者。1906-　年。ルレイに関しては、文献として数学週報222、1946年、1366～1368頁が指示されている。1946年という年数は注目に値すると思う。なぜならこれによって、代数的位相幾何学でのルレイによる層の理論の研究は、多変数解析関数論での岡潔による不定域イデアルの研究とほぼ同時期に進行したことが諒解されるからである。

書き出しの一文には脚註が附されていて、層の概念と不定域イデアルの概念は根本的に同一であると明記されている。

岡潔はこの概念[1]を彼の論文[2]の第２節において、「不確定領域の正則イデアル」という名前で導入した。我々はここでは異なる用語と異なる表記法を採用するが、この概念の根底にあるものは同一である。

（フランス数学会雑誌78、33頁参照。）

1）「モジュールの層」の概念。

2）岡潔の第７報。

層の概念と不定域イデアルの概念は根本的に同一である、とカルタンは主張しているが、少なくとも論理的な視点から見るかぎり、カルタンの言うことは正しいとぼくも思う（様相を異にするふたつの理論が「論理的に同等」というのは、形式論理上の同値性を保持しつつ、相互に翻案可能であるという意味である）。だが、本質的に相容れない点もまた確かに存在する。ぼくらはその相違点を、多変数解析関数論が展開されるべき場所の概念を規定しようとする局面において、目の当たりにすることができるであろう。

岡潔の言葉（２）数学の客観的形式と主観的内容

昭和28年（1953年）６月30日、岡潔は「数学に於ける主観的内容と客観的形式とについて（草案）」という標題で一文を執筆した。カルタンによる第７報の改稿問題への言及も認められるという意味において、注目に値する手稿である。

初めに「数学とは何か」という問いが問われ、「数学とは数学的自然を研究する学問である」という美しい数学観が表明される。

・・・自然科学者が自然を研究すると同じように、数学者は数学的自然を研究するのです。ではその数学的自然は何処にあるかと云へば、勿論主観的存在です。研究対象が既にそうですから、他は一切そうであって、従って世の人々が数学の論文と呼んでいるものは、その主観的存在の文章の空間への客観的投影に外ならないのであります。所で文章の空間はたとへば「てにをは」の操り方によって随分その次元を高めることも出来ますが、主観的空間の次元はそれと比較を絶して高いのです。それで客観的描写は結局もとのものを彷彿させる以上のことは出来ないのです。それ故、セザンヌの所謂「生命の線」を逸すればそれまでです。

（以上の引用において、丸括弧内の文章は原文の通りである。下線による強調はぼくが行なった。以下の引用においても同様である。）

続いて数学の論文を構成するふたつの要素、すなわち「主観的内容」と「客観的形式」が語られる。

かように数学的論文は「主観的内容」と「客観的形式」との二部分から成り立っていると私は考へます。万人の検討に耐えたり、其の一部分を他の場所に持ち運びしたり出来るのは後者のみであって、前者は原論文に求める外ないのであります。（それで後に出来るだけ原論文や原著書を使ふのがよいと云ふ数学の教育及び研究指導の原理が出て来ます。）

にも拘わらず、前者は非常に重要であると私には思へます。二、三の例を申しますと、時を隔ててすぐれた数学者と語り合ひ其の真精神を受け継ぐことが出来るのは、主として前者によるのです。一般に一つのすぐれた論文の主観的内容が分りますと、これは云はば其の人が分ったのですから、他は大体分ります。これは大体の見当をつけるのに非常に便利です。また真精神を学んで真似をしても少しも真似をしたことにならないのです。時間的に前後を遠望したければ主観的最高峰に登ればよいのです。それを間違へて客観的最高峰に登りますと、芥川氏[1)]の言葉を借りて申しますと、まるで窓の無い室に入ったようで、外の景色は少しも見えません。また登るのに恐ろしく手間が掛ります。数学の応用については、数学を其の客観的形式の面を通して使ふよりも、（真の意味の）数学者をぢかに使ふのが、最も簡単で、最も尖鋭で、しかも適用範囲が比較にならぬ程広いのです。その外こうしてお話しして居ります中にも次々といくらでも思ひ浮んで来て、それが皆非常に重要です。一口に云へば、主観的内容を欠けば生きた数学の論文ではないのです。

・・・・・

1）「芥川氏」は芥川龍之介。

このような長い前置きの後に、岡潔の言葉はようやく第７報の改変問題に及んでいく。

所で、私のそのことについて、ここに実に困った問題が一つあるのです。私1948年にⅦ－Sur quelques notions arithmétiques を書いて仏蘭西へ発表することを頼んだのですが、1950年に数学の雑誌、Bulletin de la Société mathématiques de France (pages 1-27)[1)] に発表せられたものを見ますと、私の原論文と客観的内容は全く同一ですが、どうした訳か、主観的内容の方はもとの面影が残らない程、要所要所を書き換へてしまってあるのです。

これは全く世の習慣に反することであって処置に迷ったのですが、原論

文を発表しなければならないことだけは、上に色々説明しましたことによって明らかと思ひます[2)]。とり分け私の論文中でも始めのⅠとこのⅦとは主観的内容の方の勝ったものでして、かような論文は長い時間の研究の後にでなければ出来ないのが普通かと思ひます。実さい私の場合は共に7年[3)]掛っているのです。

1）フランス数学会雑誌78、1950年、1～27頁。

2）ここで表明されている考えに基づいて、昭和36年（1961年）2月25日に岩波書店から刊行された論文集には、原テキストが収録された。

3）第7報については、札幌で不定域イデアルの研究を始めた昭和17年ころから、第7報のフランス文原稿が執筆された昭和23年までの時期が念頭にあるのであろう。

第1報についてはやや明瞭さを欠くが、イテレーションの研究を離れた多変数解析関数研究に向かう決意を固めた昭和5年秋ころから、第1報が公表された昭和11年までの足掛け7年間を意味するのであろうか。

岡潔の多変数解析関数論研究はフランスに留学中の昭和5年秋、パリ郊外のサン・ジェルマン・アン・レ・に滞在したころに始まると推定される。はじめに読んだのはジュリアの論文「多変数解析関数の族について」（数学輯報47、1926年、53～115頁）であった。この研究は帰国後も続き、昭和9年（1934年）1月20日には、論文「多価関数の族などに関するノート」が広島大学理科紀要に受理されている。これは学位取得論文として企画された論文「解析的に創り出される4次元点集合について」の要約であり、この年の広島大学理科紀要4、93～98頁、に掲載された。これが、多変数解析関数論における岡潔の第一期の研究である。しかしこの研究は中断された。学位論文は150頁ほど書き進めたが、抛棄され、完成しなかった。

岡潔がベンケとトゥルレンの著作を入手したのは1934年暮れと言われている。この書物に手がかりを求めて新たに構想を建て、具体的に研究に着手したのは、新年があけて間もない昭和10年（1935年）正月のことであった（「1月2日」と明記した文献もある）。これが、多変数解析関数論における岡潔の第二期の研究である。

岡潔の回想

多変数函数論を専攻することに決めてから間もない一九三四年だったが、この分野での世界中の文献をあげた目録がドイツで出版された。これで自分の開拓すべき土地の現状が箱庭式に展望できることになったので、翌三五年正月からこれに取り組んだ。（「春宵十話」（六）「発見の鋭い喜び」より。昭和37年4月20日付毎日新聞）

その後、札幌に滞在中、中谷家の応接室で上空移行の原理の発見を経験し（その日付を「９月２日」と明記している文献もある）、それを受けて第１報が書かれ、昭和11年５月１日、広島大学理科紀要に受理された。昭和10年正月から数えると、ここまでに一年四箇月かかっていることになる。

数学の論文は「主観的内容」と「客観的形式」とのふたつの部分から構成され、しかも「主観的内容を欠けば生きた数学の論文ではない」とまで言われている。ところが第７報の初出テキストを原テキストと比べると、客観的内容は全く同一であるにもかかわらず、「主観的内容の方はもとの面影が残らない程、要所要所を書き換へてしまってある」というのであるから、初出テキストはさながら原テキストの亡骸（なきがら）であるかのように見られていることになると思う。秋月康夫は、「岡君は感謝どころか、非常に不満で、私に強く憤激をぶちまかれた」というふうに当時の情景をぼくらに伝えているが、この憤激は皮相な感情的な性格のものではなく、背景には、岡潔の独自の数学観が広がっていたのである。

それと同時に、カルタンにもカルタンの立脚点（それはブルバキの数学観であろう）があったと見るのが至当であろう。カルタンによる書き換えは、秋月康夫が言うように、「分かりにくい表現の箇所を少し書き換えられた」というだけの親切な行為の範疇にとどまる作業なのではなく、この書き換えの場には、ふたつの異質の数学観の相剋がかえってはっきりと露呈しているように思う。後にカルタンは二年間のセミナー（1951～52年度と1952～53年度のカルタン・セミナー）を通じて、岡潔の理論の大がかりな書き換えを遂行し、後の多変数解析関数論の理論的基準を提示した（引き続いて行なわれる研究に出発点を与えた、というほどの意味である）。第７報の書き換えはその先駆（さきがけ）をなす作業である。

今日、数学の世界に受け入れられている岡潔の理論は、岡潔の数学論文集に描かれた世界そのものなのではなく、カルタンの手を経て書き直された理論である（一般に流布しているのは「岡の理論」ではなくて、「岡－カルタンの理論」である。このような言葉にも、この間の事情がよく反映していると思う）。たとえば、岡潔自身の主張にもかかわらず、今日ではもう不定域イデアルという言葉の使用例は見られない。岡潔の他の諸論文と同様に、第７報もまたカルタン・セミナーの立場から理解されるのが普通であり、岡潔

は解析的連接層の理論の建設者と見られているのである。

岡潔の理論はカルタンの手を経て、比類のないほどに高い評価を受けたことはまちがいない。だが、「岡の理論」と「岡－カルタンの理論」は客観的形式は同一であるとしても、主観的内容はやはり異なっているのではないかとぼくは思う。「岡－カルタンの理論」と見るのは論理的には可能だが、それでは「岡の理論」を理解したことにはならない。「岡の理論」には備わっていて、「岡－カルタンの理論」には欠けている何ものかが存在する。岡潔はそのように主張しているとぼくは思う。その「何ものか」の正体の究明こそ、岡潔の理論の解明（これは、「理論形成の契機の解明」という意味である）における根幹をなす作業であり、本稿のふたつの主目標のうちのひとつである（もうひとつの目標は、岡潔の理論の展望を描くことである）。

4．第二期の多変数解析関数論

ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』に見られる三つの問題

さて、「多変数解析関数ノート」は、

序文

I．分岐点をもたない有限領域

II．正則イデアル

という三部構成になっている。「序文」は六個の小節に分かたれているが、「ポアンカレの問題」や「第二ノート」への言及はひとまず措いて、不定域イデアルに関係のある事柄に限定して観察すると、ぼくらの目を引くのは第一小節の記述である。初めに語られるのは多変数解析関数の研究の動機である。

> 任意個数の変数の解析関数の場は、アリトメティカ（算術）、代数、解析、幾何および精密科学の場へと拡がっている。それは非常に簡明な、しかしごく基本的な事実である。この事実に伴って現われる新たな諸問題が夢想されるであろう。これが、我々が多変数解析関数の理論の研究を始めたいくつかの理由のうちのひとつである。
>
> 我々の論文I［5］[1]の序文に返ろう。そこには、相互に親密に結ばれているきわめて基本的な一群の問題がある。
>
> 本質的に言うならば、これらの問題をその存在理由とともに設定したの

はH.ベンケ[2)] とP.トゥルレン[3)] ［2］[4)] である。それらの存在理由のうちのひとつは歴史的である。また、これは完全に具体的なやり方で、正確に言うと、適切な大きさの著作を著すことによって行なわれた。（『多複素変数関数の理論』、1934年。特に54頁、68頁、79頁参照。）

論文Ｉ－VI［５］を通じて、我々は道を知るためのひとつの実験を行なった[5)]。

（工大数学セミナー速報第一巻第五、第六号（合併号）、15頁参照。）

1）文献［５］として指示されているのは、第１報から第６報までの６論文と、第６報の概要「擬凸状領域について」である。

2）ハインリッヒ・ベンケ。ドイツの数学者。1898- 年。

3）ペーター・トゥルレン。ドイツの数学者。1907- 年。

4）『多複素変数関数の理論』。1934年、シュプリンガー社の叢書「数学とその境界領域の成果」の第三巻として刊行された。

ベンケとトゥルレンの所在地はミュンスターで、序文の日付は「1933年10月」。

5）第１報から第６報までの六篇の論文を通じて、二複素変数の空間においてハルトークスの逆問題が解決され、研究が一段落した。当初の研究目標はほぼ思惑通りに達成されたのである。それが、ここでは「道を知るためのひとつの実験」と言われている。新たな歩みを歩み始めようとする気構えが表明されたと見るのが至当であろう。

「論文Ｉ」として指示されている文献は、連作「多変数解析関数について」の第１報、

「多変数解析関数について　Ｉ 有理関数に関して凸状の領域」

（広島大学理科紀要６、245～255頁。昭和11年（1936年）７月30日発行。受理されたのはこの年の５月１日。）

である。この論文の序文を読む前に、ベンケとトゥルレンの著作『多複素変数関数の理論』において岡潔が参照するよう指示している箇所、すなわち54頁、68頁、79頁を観察したいと思う。

「54頁」に見られるのは、多複素変数の空間において、二回連続微分可能な超曲面 $\varphi=0$ で囲まれた領域 $\{\varphi<0\}$ が正則領域であるために、レビの条件 $L(\varphi)\geqq 0$ （$L(\varphi)$ は関数 φ のレビ形式）は必要条件を与えているというレビの定理（定理21の帰結１。同書、54頁参照）と、この条件において等号つき不等号から等号を除去して得られる条件 $L(\varphi)>0$ は、局所的に見れば、

領域$\{\varphi<0\}$が正則領域であるための十分条件を与えているという、もうひとつのレビの定理（定理22。同書、54頁参照）である。そうしてこれらの定理を紹介したうえで、

では、レビの条件$L(\varphi)>0$は大域的に見てもやはり十分であろうか。

という問題が提出されている（やはり54頁に出ている）。これが、後年のいわゆる「レビの問題」の初出形である。ただしこの段階では「レビの問題」という名称が成立しているわけではなく、あるのはただ問題のみにすぎない。レビの定理から一歩を進めて、レビの条件は大域的にもなお十分条件でありうるだろうか、と問う問いの形状には独創性が感じられるように思う。ベンケ、トゥルレンの本では、この問題の重要性を指摘したのはブルメンタールであるとして、次のように言われている。

この問題の重要性はまず初めにブルメンタール[1)]によって洞察され、それ以来、特異性の理論の主要な未解決問題になった。これまでのところ、この問題が解決された様子を目にすることができるのは、若干の個別的な場合[2)]に対してのみにすぎない。

（ベンケ、トウルレン『多複素変数関数の理論』、54頁参照。）

1）オットー・ブルメンタール。ドイツの数学者。1876-1944年。ヒルベルトの影響のもとで多変数解析関数論を研究した。参照するよう指示されている論文は、「多変数解析関数の特異性に関する注意事項」、ウェーバー記念論文集、1912年。

2）以下、ラインハルト領域、円領域、ハルトークスの領域が次々と取り上げられている。

後に岡潔がハルトークスの逆問題を解決したとき（第６報）、問題を解決した当の本人の主張にもかかわらず、その解決の意味合いはもっぱら「レビの問題の解決」という観点から認識されたように思う。ぼくはかつてこれを不思議に思い、長い年月に渡って大きな謎であり続けたが、遠因は問題の初出形それ自体の中にすでに芽生えていたと見るべきであろう。

ハルトークスの逆問題はレビの問題と同じ性格の問題ではあるが、別個の問題であることもまた疑いをはさむ余地はない。岡潔はレビよりもいっそう深く問題を掘り下げて、レビがそうしたように、ハルトークスから出発して

「ハルトークスの逆問題」を提示し、そのうえでその解決に成功したのである。だが、他方、レビが手を染めて、ブルメンタールが重要性を認識したのは「レビの問題」なのであり、ベンケとトウルレンが報告したのはこの一連の経緯なのであった。小さな数学史ではあるが、歴史が形成されている以上、諒解の様式もまた準備されたと見なければならないであろう。岡潔の言う「ハルトークスの逆問題」の解決には、「レビの問題」の解決が内包されている。もっぱらその点に着目したために（すなわち、そのような理解の様式が成立していたために）、ヨーロッパの数学者たちの目には、岡潔の理論は「レビの問題」の解決と映じたのではあるまいか。

これを岡潔の側から観察すれば、ハルトークスの逆問題の提出とその解決という出来事により、新しい数学史が叙述されたと考えらなければならないであろう。だが、この数学史は誕生してすぐに認識されることもなく忘れられ、以来、すでに半世紀という歳月が閲している。数学の世界に定着したのは「レビの問題」のみであり、「ハルトークスの逆問題」という言葉は地を払って、跡形も見られない。このような事態の中に、現代数学の流れとは異質の、小さなひとつの数学史の誕生と消滅の物語のいっさいが凝縮されているように、ぼくには思われる。

さて、ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』の「68頁」に出ているのは、「クザンの問題」である。それに先立って、64頁に見られる「定理32」の内容は、「多複素変数の空間の全域において、または柱状領域においてクザンの第一問題はつねに解ける」というクザンの定理である。続く65頁の「定理33」では、「多複素変数の空間の全域において、または単連結な柱状領域においてクザンの第二問題は解ける」ことが紹介されている。これもクザンの定理である。68頁に移ると「定理34」が出ている。その内容は、「多複素変数の空間の全域において、または単連結な柱状領域において、の問題、すなわち、与えれた有理型関数をふたつの大域的な商表示の問題は解ける」というものである。定理33の証明は定理32（ただし、定理32では、柱状領域に対して単連結という条件が課される）の助けを借りて遂行され、定理34は定理33の帰結である。

このような状勢を受けて、68頁には、

> 定理33、従って定理34は少なくとも単連結な正則領域に移されないかどうかということは完全に未解決である。

という言い方で、ひとつの問題が出ている。すなわち、「単連結な正則領域においてクザンの第二問題は解けるだろうか」という問題である。クザンの第一問題については語られていないが、上述のように、第二問題の解決のためには第一問題の考察が不可欠なのであるから、第一問題もまた同時に問われていると考えなければならない。

最後に、ベンケ、トゥルレン『多複素変数関数の理論』の「79頁」に先立って、一変数関数論のルンゲの定理、すなわち、

> z − 平面（zは一個の複素変数を表わす）の単葉で単連結な有限領域 $\mathfrak{B}^{(z)}$ において正則な任意の関数 $f(z)$ は、この領域においていたるところで一様に収束する多項式級数に展開される。

という定理が78頁に記されている。続いて、「この定理は一般に R_{2n}（＝ n 個の複素変数の空間）の領域には移されない」（78頁）と言明され、その後に、「ルンゲの定理の言明が成立するような R_{2n} 上の領域をルンゲの領域と名づける」（78頁）という定義が記述される。従って、ルンゲ領域というのは、「そこでの正則関数が、その内部の全域において一様収束する多項式級数で表わされるような領域」（79頁）のことである。

このような状勢のもとで、79頁に提示されているのは、

> ルンゲ領域であるための必要十分条件はどのようなものであろうか。

という問いである。これが「展開の問題」である。関数の展開は近似を意味するから、「近似の問題」と呼んでも実体は同じことになる。

こうしてベンケ、トゥルレンの小さな著作には、岡潔が指示する箇所に確かに未解決の三問題が登場する。だが、それらはひとつひとつ別個に記述されているだけであり、相互に関連して、全体として一個の有機体を形成するという認識は見られない。

岡潔の理論の形成過程それ自体が明らかにしたように、クザンの二問題と展開の問題は協力しあって、（レビの問題ではなくて）ハルトークスの逆問題の解決への道を開いている。ベンケ、トゥルレンの本を見る岡潔の目には、当初からそのような特異な情景が映じたのであろう、とぼくは思う。平方剰

余相互法則の中に高次の冪剰余相互法則の萌芽を見たガウス（類体論を導いた）や、ヤコビの逆問題を提出したヤコビ（一変数代数関数論を導いた）のように、数学では、問題の発見がそのまま偉大な数学的創造であるという局面がしばしば現われるように思う。フェルマの大定理やリーマン予想などもこの系列に加えられるであろう。

ハルトークスの逆問題もまた偉大な一例である。そうして現代数学の視点から見れば、その解決を通じて複素解析幾何学が建設されたと言明しなければならず、カルタンによる岡潔の理論の解釈も、そのような視点から理解されなければならないであろう。しかし岡潔は（「主観的内容」がまったく異なっているという理由で）カルタンの解釈を受け入れなかったのであるから、岡潔自身には、何かしら別の理論形成の動機があったと考えなければならない。後期の岡潔（第７報以降というほどの意味である）がめざした究極の理論というものがある、とぼくは思う。それは、複素解析幾何学と似ているが（すなわち「客観的形式」は完全に同一だが）、同時に明快に非でもあるもうひとつの理論、すなわち多変数の代数関数論であろう。

上空移行の原理

初めに第１報「有理関数に関して凸状の領域」の序文を読みたいと思う。短い序文だが、多変数解析関数論における岡潔の構想がよく描かれていると思う。以下の引用文は第１報の序文の全体である。

> 序.　多複素変数の解析関数の理論の近年の進展にもかかわらず、いくつもの重要な事柄が多かれ少なかれあいまいなままに残されている。わけても、ルンゲの定理[1)]やP.クザン[2)]氏の諸定理[3)]が成立する領域の型。F.ハルトークス[4)]氏の凸性[5)]と、H.カルタン氏とP.トゥルレン氏の凸性[6)]との関係。これらの間には親密な関係が存在する。本論文と引き続く諸論文では、これらの問題を論じる予定である。
>
> 　ところで、これらの問題の困難は、身を置いている空間を適切な次元に高めることにより、しばしば緩和される[7)]様子が私の目には映じている。この論文では、この一般理念をある特別の場合に対して実現に移すことにより、私は（この論文の）標題の領域を、言わばいっそう高い次元の柱状領域に帰着させる原理を示したいと思う。（具体的な形については、第１節参照。）

この原理がひとたび確立されたなら、そのときその原理から、与えられた極に関するP.クザン氏の定理[8]は、この論文の標題の領域においてもそのまま成立するという論証[9]を進めることが可能になる。（正確な形状については、第5節の定理I参照。）この逆の事柄もまた正しい。実際、私は循環の手順に基づいて、これらの定理を同時に証明するであろう。また、上記の原理の助けを借りて、（この論文の）標題の領域に対して、A.ヴェイユ氏の手で表明されたルンゲの定理がただちに、再度みいだされるであろう。

このような次第であるから、私はこの論文では、有理関数に関して凸状な領域[9]の内側に身を置く。それは同時に、私にとって不可欠な補助的諸命題の研究を、課される制限がよりいっそう少なくてすむ状態で実らせるためでもある。

（広島大学理科紀要6、245～246頁参照。）

1）カール・ダヴィド・トルメ・ルンゲ。ドイツの数学者。1856-1927年。ルンゲの定理については既出。

2）ピエール・クザン。フランスの数学者。生没年不詳。

3）柱状領域においてクザンの第一問題とクザンの第二問題に解決を与える定理。クザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1895年、1～61頁）において表明された。この論文が受理された日付は「1893年10月28日」。

この論文に記されているクザンの所在地はカンとなっている。カンはフランス西部ノルマンディーの中心都市である。

4）フリードリッヒ・ハルトークス。ドイツの数学者。1874-1943年。

5）ハルトークスの連続性定理から抽出される凸性で、疑凸性と呼ばれる。これは岡潔が提出した疑凸性であり、ベンケ、トゥルレンの『多複素変数関数の理論』には出ていない。

6）正則凸性と言われる凸性。

7）上空移行の原理がこうして表明された。高次元の空間に移ることによって、困難を緩和するという着想で、第1報の眼目である。「上空移行の原理」という用語がそのまま使われているわけではないが、すぐ次の段落に「この原理がひとたび確立されたなら、・・・」という言葉が出ていることから見て、簡潔に「上空移行の原理」と呼ぶのが相応しいであろう。

講談社文庫『日本のこころ』（昭和46年刊行）には、

・・・私は「上空移行」と名づけたのですが、いわばヘリコプターで登ったので

す。（同書、28頁参照）

という註記（『日本のこころ』に収録された「春宵十話」に附された註記）が見られる。

8）柱状領域ではクザンの第一問題は解けることを主張する定理。

9）第1報には一箇所だけ議論に難点がある。第4報の末尾に訂正が出された（日本數學輯報17、521頁参照）。第1報の議論を救済するには、「有理関数」を「多項式」に置き換えればよい。したがって第1報の主定理は「多項式凸状領域」において成立することになる。

上空移行の原理は第1報を根底から支える技術上の基本原理だが、ここでは冒頭の数行に着目したいと思う。岡潔は、ルンゲの定理が成立する領域（ルンゲ領域）、クザンの二定理が成立する領域（クザンの第一領域、クザンの第二領域）、ハルトークスの凸性、カルタン、トゥルレンの凸性に次々と言及し、そのうえで「これらの間には親密な関係が存在する」と語っている。岡潔自身が指摘しているように、ルンゲの定理とクザンのふたつの定理に関する問題、すなわち展開の問題とクザンの問題はベンケ、トゥルレンの『多複素変数関数の理論』にも書かれている。しかしそれらは個別に提示されただけであり、親密な相互依存関係で結ばれているという認識はこの書物には見られない。この教科書にはレビの問題も書かれているが、岡潔が語っているのは「レビの凸性」ではなくて、ハルトークスの凸性であることも、真に瞠目に値する。なぜなら、ベンケ、トゥルレンの本にあるのはハルトークスの連続性定理のみであり、しかもそこに内包されている凸性への着眼はなされていないからである。

岡潔の目には、展開の問題とクザンの問題、それにレビの凸性が淵源するいっそう深い場所にある凸性の問題が相互に有機的に繋ぎ合わされて、さながら「一つの山脈」（「春宵十話」（六）「発見の鋭い喜び」の中の言葉。昭和37年4月20日付毎日新聞参照）を作っているように映じたのであろう。この山脈のもっとも高い峯にあるのは（レビの問題ではなくて）ハルトークスの逆問題であり、登攀路の在処（ありか）を具体的に教えてくれる指針こそ、上空移行の原理だったのである。

ハルトークスの逆問題

ハルトークスの逆問題は初め二個の複素変数の空間内の単葉領域において

解決され（第６報）、次に内分岐しない有限多様領域において解決された（第９報）。まず第６報の序文を読もう。

序.　1906年、F.ハルトークスは、正則領域に課されているある非常に奇妙な制限[1]を発見した。この発見により、多変数解析関数論の近年の発展が始まった、と私は思う[2]。

この理論のさまざまな部門の土地で、E.E.レビ[3]、G.ジュリア[4]、W.ザクセル[5]、それに著者[6]によって、これと同じ制限が次々と発見された。我々はこのような様相の制限が課されている領域を、擬凸状[7]と呼びたいと思う。

この種の凸性は局所的な様式での議論を許容する。ところで、1932年、H.カルタンとP.トゥルレンは、正則領域はある意味で大域的に凸状[8]であることを発見した。そうしてこの性質のおかげで、我々はこれまでに正則領域に関するいくつかの大域的な定理を確立してきたのである。

このような次第で我々はいくつかの種類の擬凸状領域を手にしているが、正則領域についてはさておき、それらの擬凸状領域について我々はほとんど何も知らない。そこで我々はF.ハルトークスに立ち返り、逆に、擬凸状領域はどれも正則領域であるのかないのかという問いを問いたいと思う。そうして、もしこれらの二通りのタイプの領域が一致するなら、我々は正則領域の局所的な判定基準を手に入れたことになるであろう。ところで、いろいろな種類の擬凸状領域のうち、G.ジュリアの擬凸状領域は、有限のとき、正則領域であることがH.カルタン、P.トゥルレン、H.ベンケ、それにK.スタイン[9]の手で確かめられた。しかし、この場合以外には、上記の問題は今日に至るまで依然としてほとんど解明されないままにとどまっている。

この論文で、我々はこの問題を取り扱いたいと思う。記述を簡易化するため、２個の複素変数の空間に限定するが、結論は任意個数の複素変数の空間に適用されるであろうと私は思う。我々は、単葉な有限領域に対して、**擬凸状領域は正則領域である**[10]ことを見るであろう。

我々がこれから解明する予定の問題は、現在の研究のテーマを成す諸問題のうち、最後の問題[11]である。

（東北數學雑誌49、15～16頁参照。ゴシック体の語句は、原文ではイタリック体で書かれて強調されている。）

1）「奇妙な制限」という言葉はジュリアに由来する。

ヴァイエルシュトラスからF.ハルトークスやE.E.レビにいたる数々の幾何学者の研究により、たとえば、極点は孤立しえず、解析的連続体を作ること、本質的特異点は決して孤立しないが、そのうえなお奇妙な制限を受けることが示された。

（数学輯報47、1926年、53～54頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

ジュリアが「奇妙な制限を受ける」と言っているのは特異点の作る集合についてであり、そのような集合は連続性定理を満たさなければならないのであった。これはハルトークスの定理とレビの定理だが、岡潔は補集合に移行して、これを正則領域（有理型領域としても同じことになる）が受ける制限と見たのである。

2）岡潔の研究はハルトークスに端を発することが、ここでもまた明記されている。

3）エウジェニオ・エリア・レビ。イタリアの数学者。1883-1917年。ここでは、レビの問題の端緒を開いた下記の二論文が想起されている。

「二個またはもっと多くの複素変数の解析関数の本質的特異点に関する研究」（イタリア文。純粋応用数学年報（3）17、1910年。）

「二個の複素変数の解析関数の存在領域の境界でありうる4次元空間の超局面について」（イタリア文。純粋応用数学年報（3）18、1911年。）

4）ガストン・ジュリア。フランスの数学者。1893-1978年。岡潔がフランスに留学したときの先生。岡潔は留学前、ジュリアの影響を受けてイテレーションの研究を始めた。留学中、再度ジュリアの影響のもとに多変数解析関数論の研究を始めた。ジュリアの論文

「多変数解析関数の族について」（フランス文。数学輯報47、1926年、53～115頁）

を「繰り返し繰り返し、論文がすり切れてしまふまで」（日本文の遺稿「春の思い出」より。標題のみフランス語で書かれている。『岡潔先生遺稿集　第四集』、33頁参照）読んだと言われている。

5）ヴァルター・ザクセル。スイスの数学者。1896-？。言及されている論文は、

「多変数有理型関数の正規族について」（フランス文。パリ科学学士院の数学週報193、1931年、479～480頁）

「多変数有理型関数の正規族について」（ドイツ文。スイス数学評論4、1932年、256～267頁）。

後者の論文に附されているザクセルの所在地はチューリッヒ。

6）岡潔自身のノート「多価関数の族などに関するノート」（フランス文。広島大学理科紀要4、93～98頁、1934年）が挙げられている。このノートは、学位論文として企画された論文の要約である。

7）上に言われている「奇妙な制限」の幾何学的形状を描写すると、擬凸性の概念がさまざまに抽出される。ベンケ、トゥルレンの著作にも一例が出ている（同書、27～28頁参照）。岡潔はハルトークスの連続性定理それ自体から出発して、もっとも根源的な擬凸概念を取り出した。

8）正則凸性。カルタンとトゥルレンが1932年の論文「多複素変数関数の特異性の理論　正則領域と収束領域」で、正則領域の正則凸性を明らかにした。

9）カール・スタイン。ドイツの数学者。1913-？年。

10）ハルトークスの逆問題の解決が表明された。

11）ハルトークスの逆問題の解決により、当初の研究計画は達成されるという状勢認識が表明されている。

「ハルトークスに立ち返り、逆に、擬凸状領域はどれも正則領域であるのかないのかという問いを問いたい」という言葉は見られるが、この段階ではまだ、この問いに対して「ハルトークスの逆問題」という名称が与えられたわけではない。しかし岡潔が立ち返ったのはレビではなく、1906年のハルトークスの発見であることは明らかにされている。この年、ハルトークスは論文

「多変数関数におけるコーシーの積分公式からの二、三の帰結」（バイエルン科学学士院数学自然科学部門議事報告[1] 36、第1分冊。）

1）ベンケ、トゥルレンの本では「ミュンヘン報告集」として出ている。ミュンヘンはバイエルン州の首都。

を公表したが、この論文において、ハルトークスはコーシーの積分公式から連続性定理を導いたのである。それは多変数解析関数の特異点（ハルトークスの段階では、「解析関数の正則性が破れる点」の意である。後にレビがハルトークスの連続性定理を拡張して、特異点を「解析関数の解析性が破れる点、すなわち解析関数がそこでは正則でもなく有理型でもないような点、すなわち本質的特異点」と解しても連続性定理はそのまま成立することを明らかにした）は孤立しないことを言明する定理であり、注目に値するのは、その「孤立しない」という事実の特異な表現様式である。そこで特異点集合の補集合、すなわち正則領域に身を置けば、正則領域の形状は任意ではないという際立った事実認識が許されるであろう。

ハルトークスの連続性定理の表現様式から関数という言葉を除去して、幾何学的状勢をそのまま描写していけば、正則領域のもつべきある種の凸性が浮上する。岡潔はこのような手順を踏んで疑凸性の概念を抽出して、正則領

域は疑凸状であるという認識を獲得し、しかもその逆問題を設定して解決をめざしたのである。

「ハルトークスの逆問題」という言葉の初出について

これまでの検証から明らかなように、岡潔は第1報以来、一貫して「ハルトークスの逆問題」の認識を持ち続けたが、この言葉が実際に使われたのは意外に遅く、ようやく

第9報「内分岐点をもたない有限領域」（日本数学輯報23、1953年、97〜155頁）

至ってからのことであった。第9報の構成は次のようである。

序文
第Ｉ章　補助的命題の補足
第II章　擬凸状領域、第二補助的命題
　A.　擬凸状領域
　B.　擬凸関数
　C.　境界問題
第III章　主要な諸問題
　A.　正則関数の展開、クザンの第一問題
　B.　ハルトークスの逆問題ー出発点
　C.　他の諸問題

第Ｉ章「補助的命題の補足」の第1節には「問題」という小見出しが附されていて、

我々はヴェイユの積分[1)]に助けを求めずに、**ハルトークスの逆問題**を解きたいと思う。（日本數學集報23、98頁参照）

（ゴシック体の「ハルトークスの逆問題」は、原文ではイタリック体で記されて強調されている。）

1）岡潔は第5報においてヴェイユの積分を改良し、第6報でそれを使用して、二個の複素変数の空間においてハルトークスの逆問題を解決した。第9報の段階では解析的多面体に対して上空移行の原理が確立されているので、ヴェイユの積分（を改良したもの）は必要ではなく、コーシーの積分で事足りる。

という明快な宣言とともに書き出されている。第III章「主要な諸問題」では、

空間 (x) 上の（内分岐点をもたず、有限な[1]）擬凸状領域はどれも正則凸状[2]であろうか。（日本數學集報23、134頁参照）

1）領域が「有限」というのは、無限遠点を包摂しないという意味である。

2）簡単にわかるように、正則凸状域は正則領域である。

という形に問題が設定され、「今後、これをハルトークスの逆問題と呼びたいと思う」（同上）と記されている。これが「ハルトークスの逆問題」の初出である。また、他の主要問題として挙げられているのは、クザンの問題と展開の問題である。

第二期の多変数解析関数論

第６報の序文の末尾で、ハルトークスの逆問題は一連の研究の「最後の問題」であると言われている。第６報の段階では二個の複素変数の空間内の領域に限定されていて、変数の個数がもっと多い場合や、領域が単葉ではない場合の考察が残されていたが、本質的な困難はもうない考えられたのであろう。すなわち、岡潔の当初の企画はこれで完成したのである。

この推定を裏付けるに足る明確な証言も残されている。それは昭和15年８月13日付（消印は８月14日）の中谷宇吉郎宛書簡（和歌山県伊都郡紀見村から札幌へ）における言葉であり、こんなふうに語られている。

僕の多変数函数論に一つだけ問題が残つて居たのです[1]。大変な問題の様に思はれましたから、御説の通り一つ腰を据えて三年程かゝる積りで始めてみようかと思つて色々計画を立てて居る内に簡単に解決されて了ひました。一九〇六年頃始まつた多変数函数論の deuxième époque[2] は之で完全に point[3] です。僕の此の研究も之を以て大成功裏に幕と云ふことにする積りです。

1）ハルトークスの逆問題のこと。

2）「第二期」の意。

3）ピリオドが打たれた、の意。

岡潔は多変数解析関数論の第二期の幕開けを1906年ころと見ているが、この年はハルトークスの論文「多変数関数におけるコーシーの積分公式からの二、三の帰結」が公表されて、連続性定理の発見が報じられた年である。この発見からハルトークスの逆問題が生まれ、その解決とともに第二期は終幕を迎えたというのである。ベンケ、トゥルレンの著作にも、カルタンの諸論文にも見られない岡潔に固有の数学史観であり、おそらく岡潔はベンケ、トゥルレンの小さな書物を素材として、このような数学史の可能性を紡ぎ出したのであろう。

講演「多変数解析関数について」では、第二期の数学史が岡潔の手で日に日に実現していく様相が生き生きと語られている。

そこに[1]ある問題は、だいたい申しますと、関数を漸近的に展開する問題（ある領域で正則な関数をより広い領域で正則な関数の級数に展開する問題）、クザンの問題、これはIとIIとありまして、Iといいますと、極を与えて有理型関数を求める問題、IIといいますと零点を与えて正則関数を求める問題、それからハルトークスの逆の問題、すなわち有限で内分岐しない擬凸状域は正則域かという問題、なぜ正則域が大事かといいますと、トゥルレンの結果がありますから、それは正則凸状、それで正則域であるというのが大きいのです。まあ、こういった問題があります。さて、これらの問題を扱う領域ですが、一番一般的な領域が擬凸状領域で、ハルトークスの逆の問題はここでだけ問題になります。その次が正則凸状域で、これはだいたい正則域と同じこと、その次がポリノーム[2]またはラショナル・ファンクション[3]に関してコンヴェックスな[4]領域、さらに一番簡単なのが筒状域[5]、筒状域といいますと、各変数平面上の領域のプロダクト[6]としての領域です。筒状域でこれらの問題が解けるというのは、（第二問題で多少まちがっていますが）クザン自身が解きました。1895年[7]です。そこでポリノームまたはラショナル・ファンクションに関してコンヴェックスな領域においてはどうかというのが次の問題になります。ここでの漸近の問題はアンドレ・ヴェイユが解きました。1932年に予報[8]を出して、1935年[9]に出しました。それでその後が残っていました。これを私がみなだいたい解決しました。正則域においてクザンーIは解ける[10]。クザンーIIは、与えた零面が当然要る必要十分条件、バラヤーブル[11]という条件さえ満たすなら

ば解ける[12]。それからハルトークスの逆は成り立つ[13]。これ二変数については1942年[14] ですから、出たのは戦争中ですが、やったのは戦争前[15]。それからn変数については、ユニバラントな[16] 領域の場合、戦争中に高木先生[17] のところへ日本文で書いて送っておきました[18]。これついに発表していませんけれど、それで、これだけでいろいろな研究をやろうと思えばやれるんです。しかしさらに分岐点を入れて考えたりしようとしますと、ここで解いた解き方だけでは不十分です。それで、ここではあまり言うことないのですが、ちょっと言っておきますと、イデアルに関する問題が出てきます。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）ベンケ、トゥルレンの本『多複素変数関数の理論』を指す。

2）多項式（仏語）。

3）有理関数（英語）。

4）凸状な（英語）。

5）柱状領域と同義。

6）積（英語）。

7）ここで言及されているのは、1895年のクザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1～61頁）である。

8）パリの科学学士院週報194、1304～1305頁。予報の標題は「二複素変数の多項式級数について」。

9）数学年報111、178～182頁。論文の標題は「コーシーの積分と多変数関数」。

10）第1報、第2報。

11）掃き出し可能（仏語）。バラヤーブルは、日本文で書かれた学位論文「多変数解析函数ノ研究」の「III　Cousinノ第二問題」では、「可掃型」と言われている。『岡潔先生遺稿集　第五集』、70頁参照。遺稿「多変数解析函数ニ就イテ　XII　固有集合体の表現」には「掃清可能」という訳語も見られる。『岡潔先生遺稿集　第二集』、20頁参照。

12）第3報。

13）第6報、第9報。

14）昭和16年（1941年）10月25日、第6報が東北数学雑誌に受理され、東北數學雑誌49、15-52頁、に掲載された。

東北數學雑誌49には「昭和18年2月」という表示が見られるが、第6報は昭和17年4月に刊行された第一分冊に掲載された。また、収録されている最後の論文が

「1943年3月5日受理」となっているところから見て、東北數學雑誌49の最終分冊が実際に刊行された時期は、昭和18年の3月から4月ころにずれこんだと思われる。
15）昭和15年（1940年）の蛍のころ、関数の第二種融合法が発見されて、第6報の核心が作られた。翌昭和16年（1941年）1月13日、第6報の概要「擬凸状領域について」が帝国学士院記事に受理され、この年、公表された（帝国学士院記事17、7～17頁）。
16）単葉な（英語）。
17）高木貞治。1875-1960年。高木貞治は岩波茂雄（岩波書店主）が設立した奨学金補助組織、風樹会（財団法人。対象は哲学、数学、物理学など、基礎的学問の研究者で、昭和15年11月2日、設立が許可された）の理事であった。岡潔は昭和17年11月ころ、すなわち北海道帝大理学部の嘱託を辞めたころから風樹会の奨学金を受け始めた。中谷宇吉郎の斡旋によると推定される。風樹会の奨学金は昭和24年（1949年）まで続いた。

第7報の脚註に、

著者はここで、第6報の時期以来の援助に対して、風樹会に心からの感謝の気持ちを表明したいと思う。（原テキスト。数学論文集『多変数解析関数について』、92頁参照）

という言葉が見られる。

18）岡潔は第6報以後も日本文で続報を書き続けた。昭和18年（1943年）には、9月から12月にかけて下記のような五篇の論文が日本文で執筆され、高木貞治に送付された。風樹会の援助に対する研究報告だったと思われる。第8報の脚註に、

1943年、著者は高木貞治に宛てて、これを日本語で詳細に書き送った。（日本数学会雑誌3、204頁参照。）

という言葉が出ている。

9月4日、「多変数解析函数ニ就テ　VII正則函数ノ合同ニ関スル二ツノ補助問題」を執筆。末尾に附されている日付は「2603.9.4」（皇紀2603年9月4日）。

9月5日、「多変数解析函数ニ就テ　VIII　分岐点ヲ持タナイ有限領域ニ対スル第一基礎的補助定理」を執筆。末尾に附されている日付は「2603.9.5」（皇紀2603年9月5日）。

10月24日、「多変数解析函数ニ就テ　IX　擬凸状函数」を執筆。末尾に附されている日付は「3.10.24」（皇紀2603年10月24日）。

11月12日、「多変数解析函数ニ就テ　X　第二基礎的補助定理」を執筆。末尾に附されている日付は「3.11.12」（皇紀2603年11月12日）。

12月12日、「多変数解析函数ニ就テ　XI　擬凸状域ト有限正則域、有限正則域ニ於ケル諸定理」を執筆。末尾に附されている日付は「3.12.12」（皇紀2603年12月12日）。

先の大戦のさなかに高木貞治のもとに送付された五篇の論文により、「内分岐しない有限領域」を対象にしてハルトークスの逆問題が解決された。第６報は、

著者は、この結論[1)]は複素変数の個数に依存しないと思う。（東北數學雑誌49、52頁参照。）

1）複素２次元の場合におけるハルトークスの逆問題の解決。第６報が最後に到達した成果であり、

二個の複素変数の空間において、有限で単葉な擬凸状領域はどれも正則領域である。（東北數學雑誌49、51頁参照。）

と表明されている。

という言葉とともに終わっているが、岡潔自身、この推定を裏付ける作業を遂行したのである。

不定域イデアルの理論により、内分岐しない有限領域において上空移行の原理が確立され（論文Ⅷの「基礎的補助定理Ｉ」。『岡潔先生遺稿集　第一集』、69～70頁参照）、それを梃子としてハルトークスの逆問題が証明された（論文XIの定理Ｉ。同、148頁参照）。これで、昭和28年（1953年）の第９報の内容はできあがっている。ただし、この段階ではまだ「不定域幾何イデアルは有限擬基底をもつ」（カルタンのように層の言葉で言い表わせば、「ある開集合における解析的多様体の層は、その開集合の各点において連接的である」というふうになる。「解析的多様体」というのは、局所的に正則関数系の共通零点集合として与えられる図形のことである）ことの証明ができていなかったので、上空移行の原理はいくぶん中途半端な形になっている。

新しい手法が開発されて、ハルトークスの逆問題が解決される場は広がった。だが、おそらく理論展開の土台となる基本定理（すなわち、上空移行の原理。第８報の標題で言われている「基本的な補助的命題」）がなお完成していないことに不満があったのであろう。上記の五論文は日本文で書かれた段階にとどまって、フランス文に直されて公表されるには至らなかった。第

9報が公表されて、ここで獲得された成果が報告されたのは、第7報と第8報が書かれた後のことであった。

5．内分岐領域の理論

不定域イデアルの理論

上に引用した講演記録の末尾において、岡潔は、「しかしさらに分岐点を入れて考えたりしようとしますと、ここで解いた解き方だけでは不十分です。それで、ここではあまり言うことないのですが、ちょっと言っておきますと、イデアルに関する問題が出てきます」と語っている。岡潔の場合、多変数解析関数論にイデアルの理論を導入したのは、内分岐領域の理論形成のためであった。この直接的な動機が明示されているという点において、真に注目に値する言葉と思う（カルタンには別の動機があったと思う。それについては後述する）。

断片的ではあるが、内分岐領域の理論を語る岡潔の言葉は、ほかにもいくつか遺されている。昭和22年（1947年）4月18日付の高木貞治宛書簡（和歌山県伊都郡紀見村から東京都新宿区諏訪町182へ。草稿が遺されていて、『岡潔先生遺稿集　第二集』に収録されている。同書90～97頁）には、第二期の研究を越えてさらに内分岐領域の理論に分け入ろうとする際の心情が率直な筆致で描かれていて、見る者の感慨を呼び覚ます力が備わっている。

・・・私大学ヲ卒業シテ四年間ノ暗中模索[1]ノ後、巴里ニJulia[2]先生ノ所ニ三年[3]居リマシテ、多変数解析関数ノ分野ヲ、其ノ意義及ビ其ノ面白サカラ、研究ノ対象トシテ撰ビマシタ[4]。其ノ後十五年[5]掛ツテ、Behnke-Thullen[6]ノ文献目録[7]ニアル問題ハ略々解決シ了リマシタ。此ノコトハ一度先生ニ申シ上ゲマシタ[8]。（尚其ノ始メノ四年間[9]ハ行ケドモ行ケドモ陸地ノ見エナイ航海ノヤウナ苦シサデシタ。私ノ生涯デ一番苦シカツタ頃デゴザイマセウ）。所デ、先生ニ申シ上ゲタイノハ、其ノ本質的ナ部分ハ解イテ了ツタト思ツタ（今デモソウ信ジテ居マスガ）其ノ瞬間ニ、正確ニハ翌朝目ガ覚メマシタ時、何ダカ自分ノ一部分ガ死ンデ了ツタヤウナ気ガシテ、洞然トシテ秋ヲ感ジマシタ。ソレガ其ノ延長ノ重要部分ガ、上ニ申シマシタ様ニ、マダ解決サレテ居ズ容易ニハ解ケソウモナイ、ト云フコトガ分ツテ来マスト、何ダカ死ンダ児ガ生キ反ツテ呉レタ様ナ気ガシテ参

リマシタ。本当ニ情緒ノ世界ト云フモノハ分ケ入レバ分ケ入ル程不思議ナモノデアツテ、ポアンカレノ言葉ヲ借リテ申シマスト、理智ノ世界ヨリハ、或ハ遥カニ次元ガ高イノデハナイカトサヘ思ハレマス。
（『岡潔先生遺稿集　第二集』、93～94頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

1）岡潔が京都帝大を卒業したのは大正14年（1925年）3月で、同年4月1日、京大講師を嘱託された。昭和2年度と3年度の二年間は三高講師も兼任した。昭和4年（1929年）4月、文部省在外研究員としてフランスに留学したが、それまでの4年間は京都で教員生活をして日々をすごしたことになる。

この時期、特に後半の二年間は、河合十太郎先生（京大の数学の教授。岡潔が京大を卒業した年に定年退官した）の示唆を受け、ジュリアの論文などに手がかりを求めてイテレーションの研究に取り組んだ。

2）ガストン・ジュリア。

3）岡潔は昭和4年（1929年）5月末、パリに到着し、昭和7年（1932年）4月1日、マルセーユで日本郵船の箱崎丸に乗船して、帰国の途についた。この間、ほぼ3年である。

4）岡潔が多変数解析関数論に向かったのは、昭和5年（1930年）秋、パリ郊外のサン・ジェルマン・アン・レに滞在したころからと言われている。

5）「15年」というのは長すぎるように思う。ベンケ、トゥルレンの著作を読み始めたのは昭和10年（1935年）の正月、1月2日からであり、函数の第二種融合法が発見されてハルトークスの逆問題の解決に目鼻がついたのが昭和15年（1940年）である。この間、6年である。

イテレーションの研究に取り組み始めたのは大学卒業後三年目の昭和2年（1927年）からと言われている（この年4月3日付のノートに、イテレーションに関するジュリアの二論文「有理函数のイテレーションについて」と「有理函数の交換可能性について」の要約が書かれている）。第6報が東北數學雑誌に受理されたのが昭和16年（1941年）10月25日であるから、この期間を数えればきっかり15年になる。

6）ベンケとトゥルレン。

7）『多複素変数関数の理論』を指す。1934年刊行。

8）「昭和二十一年三月三日」の日付をもつ高木貞治宛書簡。草稿が残されている。『岡潔先生遺稿集　第二集』、80～89頁参照。

9）多変数解析関数論に心を向け始めた昭和5年（1930年）秋から、ベンケ、トゥルレンの著作を入手した昭和9年暮（1934年）までの4年間のことであろう。

こうして内分岐領域の理論は第二期の多変数解析関数論の「延長ノ重要部分」として認識されたのである。『春雨の曲』第七稿では、多変数代数関数論への言及がなされている。

若し論文Ⅰにあらわれたわたしの素志を貫く積りならば此の図に関する論文Ⅰの定理Ⅰ[1)]を一般の場合に拡張しなければならぬ。また、これまでは領域は絶えず単葉に限定して研究して来たが、この制限を取り去る積りならばΣ[2)]が代数的分岐点[3)]を持ってもよいとしなければ徹底しない。そうでなければ、たとえばこれからの研究の成果を多変数代数函数の分野に適用することさえ出来ない。これで腹が決った。この拡張に全力を挙げよう。
（『春雨の曲』第七稿、320～321頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

1）「定理Ⅰ」は「定理Ⅱ」の誤記。有理多面体に対する上空移行の原理である。

2）ΣはΔの誤記であろう。これまでの制限を除去するというのであるから、内分岐する領域において解析的多面体Δを考える。それを高次元の単葉領域内に移して（すなわち、上空に移して）得られる解析的多様体がΣである。

3）代数的分岐点というのは代数関数に付随して現われるタイプの分岐点である。

内分岐領域の理論がなければ多変数代数関数論を建設することさえできず、重要性の根拠もその点に求められている。研究の具体的な手がかりとして、第1報以来の「基本的な補助的命題」（これは第8報の標題でもある）、すなわち上空移行の原理を内分岐領域に移すことがめざされた。そのためには、不定域イデアルの理論が不可欠であった。

岡潔が不定域イデアルの研究に着手したのは昭和17年（1942年）ころと言われている。次に挙げるのも『春雨の曲』第七稿からの引用である。

この頃[1)]はもう夏休みになっていた。札幌の夏は本当に美しい。わたしは研究の場所を北大の数学教室[2)]から札幌市の植物園[3)]に移した。ここには開拓時代以前からの大樹が沢山残っていて、札幌の夏の中でも特に夏は美しい所である。わたしは毎日植物園へ行って、土へ木の枝でシェーマ（象徴図）や記号を書きながら思索を楽しんだ。わたしの不定域イデアル

の端緒は此の頃なのである。

（『春雨の曲』第七稿、328頁参照。）

1）昭和17年（1942年）。

2）岡潔は前年、すなわち昭和16年（1941年）秋から研究補助員として北海道帝大に赴任した。辞令は「理学部研究補助を嘱託す」。発令の日付は10月31日。理学部の功力金二郎（くぬぎ・きんじろう。1903-1975年）の研究室に所属して、「純粋解析学に関する研究」の研究補助を行なうという趣旨であった。中谷宇吉郎の斡旋であった。功力金二郎は留学中、パリで知り合った友人である。

2）北海道帝大の附属植物園。

第三の発見（第一の発見は「上空移行の原理」、第二の発見は「関数の第二種融合法」）が生起して、第７報の骨格ができあがったのは、先の大戦の終戦の翌年、すなわち昭和21年（1946年）の夏と言われている。それは、第７報で「問題(μ)」と呼ばれている問題、すなわち「一次方程式の形式解の局地的存在を言う問題」（岡潔『昭和への遺書　敗るるもまたよき国へ』；月刊ペン社、昭和43年刊行、の言葉。ただし、この本では、発見の時期は「終戦後第三年目」となっていて、他の文献と一致しない）の解決のことである。

第７報の初出テキストの序文

第７報の目次は下記の通りである。

1．合同と同等。H.カルタンの定理
2．不定域イデアル
3．同次線形関数方程式とその形式解
4．局所的問題(K)への諸問題の還元
5．割り算の定理
6．局所的問題(K)の解決
7．結論

目次についてはふたつのテキストの間に食い違いは見られないが、本文の移動は著しい。初めに初出テキストの序文を読みたいと思う。

序.　この論文は一連の論文のうちの第七番目の報告である。先行する諸論文は、

Ｉ．有理関数に関して凸状の領域。1936年（広島大学理科紀要）。

II．正則領域。1937年（広島大学理科紀要）。

III．クザンの第二問題。1939年（広島大学理科紀要）。

IV．正則領域と有理凸状領域。1941年（日本数学輯報）。

Ｖ．コーシーの積分。1941年（日本数学輯報）。

VI．擬凸状領域。1942年（東北数学雑誌）。

である[1)]。

すでに第１報の定理II（基本的な補助的命題）、第２報の定理Ｉおよび第５報の条件(β)（アンドレ・ヴェイユの条件）において、いくつかの算術的概念に出会っている。後に、我々は分岐点の研究においてもうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。それがなければ、代数関数を取り扱うことができなくなってしまう。

ここではこれらのアリトメティカ的概念の意味を深く掘り下げることから始めたいと思う。たとえば合同の概念とイデアルの概念は多項式の場から解析関数の場へと移される。関数というものは一般に全空間に延長されることはありえないから、新たにいくつかの問題に出会う。アンリ・カルタンはそのような性質を備えたひとつの現象を発見した。この論文のいくつかの定理と、ひとつの相当に複雑な問題は、カルタンが発見した現象に関連がある（第７節参照）。それらの定理は、第１報以来の諸問題を分岐領域の場合に拡張したいとき、私にとって不可欠である。それらはまた、複雑さの度合いの少ない領域に対しても有用である。

（フランス数学会雑誌78、１～２頁参照。「合同」と「イデアル」の二語は、原文ではイタリック体で記されて、強調されている。下線による強調部分が二箇所あるが、これはぼくが行なった。）

1）原テキストでは、これらの論文名の紹介は脚注に回されている。

これに対して、原テキストの序文は次の通りである。

序.　我々は今、これまでの道すがらに出会ったさまざまな困難の性格を再確認し、この道筋の延長線上で出会うであろう諸困難の形状に目を向

けたり、そのほかにもなおいろいろなことをしながら、深く省察を加えつつあるところである。ここではさまざまな成果のひとつを説明したいと思う。

第1報の定理II（基本的な補助的命題）、第2報の定理I、それに第5報の条件(β)（A.ヴェイユの条件）において、ある種のアリトメティカ的概念が目に留まるであろう。そうしてもし分岐点を受け入れるなら、もうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。分岐点を許容しなければ、代数関数さえ取り扱うことができなくなってしまう。我々はこのような事情に促されて、このような概念の研究を始めたのである[1]。

多項式の場から解析関数の場に移された三、四のアリトメティカ的概念、たとえば合同とイデアルのような概念を想定してみよう。解析関数は一般に全有限空間に延長されないという状勢に起因して、いくつかの新しい問題が見られる。そのような性質を備えているひとつの現象を発見したのはH.カルタン[2]である。この論文の中で、結論として、同じ性質をもついくつかの定理と、ひとつの十分によく濾過された問題がみいだされるであろう（第7節参照）。それらの定理は第1報以来の諸問題を、分岐点を含む領域において取り扱ううえで、私にとって不可欠である。また、それらは、複雑さの度合いの少ない領域に対しても有用[3]である。

ところで、我々は一系の美しい問題をF.ハルトークスとハルトークスの継承者たちに負っている[4]が、我々に続く人たちに、美しい諸問題を遺したいと思う。幸いにも多変数解析関数の分野は数学のさまざまな部門の上に広がっているから、それらの部門で準備が整えられているさまざまなタイプの美しい諸問題を夢みることが許されるであろう。

（論文集『多変数解析関数について』、92頁参照。下線による強調はぼくが行なった。）

1）多変数解析関数論においてアリトメティカ的諸概念の研究へと向かう動機が語られているが、この明快な宣言は初出テキストでは削除された。

2）ここで言及されているのは、1940年のカルタンの論文「n個の複素変数の正則母式について」である。

3）第9報では、内分岐しない有限領域という、「複雑さの度合いの少ない領域」においてハルトークスの逆問題が解決されたが、不定域イデアルの理論はそこでも有効に活用された。

4）岡潔の研究はハルトークスから出発することが、ここでもまた繰り返して語ら

れている。しかしこの一文と、それに続く最後の一文は、初出テキストでは削除された。

第７報の本文に移ると、問題(C_1)、問題(C_2)、問題(E)という基本的な三問題が次々と導入されていく。しかもそれらは第１報以来の歩みと無縁ではなく、第１報の定理II、第２報の定理I、第５報の条件(β)はそれぞれ第７報の問題(C_2)、問題(E)、問題(C_1)に対応することが特に注意されている（数学論文集『多変数解析関数について』、97頁参照）。新たな地平を開こうとするための礎石が過去の経験の中から採取され、措定されたのである。岡潔の数学の歴史的性格をはっきりと示す出来事であり、真に目の覚めるような情景である。

これらの問題を解決するために、次々と問題(I)、問題(J)、問題(K)、問題(λ)、問題(L)、問題(μ)、問題(M)が導入されていく。核心となるのは問題(K)であり、この問題はつねに解けることを示すのが第７報の骨子である。そこから、閉多重円板の近傍において問題(C_1)、問題(C_2)、問題(E)が解けることが明らかになる。

原テキストの序文に比して初出テキストの序文は非常に簡単なものになっていて、言い回しが大きく異なっている文章も目立っている。原テキストには、「もし分岐点を受け入れるなら、もうひとつのアリトメティカ的概念に出会うであろう。分岐点を許容しなければ、代数関数さえ取り扱うことができなくなってしまう。そこで我々はこのような概念の研究を始めたのである」というふうに、研究の動機が明記されている。また、原テキストの末尾では、第１報以来の一連の研究の淵源がハルトークスにあることが語られたうえで、「我々に続く人たちに、美しい諸問題を遺したいと思う」と、未来を開こうとする言葉が美しく語られている。このような岡潔の数学における意志的発言がすべて削除された点に、初出テキストの序文の大きな特徴が認められるように思う。そのために、初出テキストでは、多変数解析関数論の第三期（「第三期」というのは「第二期」に続いて開かれるべき時代というほどの意味だが、岡潔がこの言葉を使っているわけではない）において岡潔がめざしたものの所在が不明瞭になってしまうのである。

第８報の序文より

第７報の続篇である第８報も、岡潔の不定域イデアルの研究の本質を理解

するうえで不可欠である。ここでもまた初めに序文を読みたいと思う。

第1報以来の主要な諸問題は、クザンの問題、展開の問題、それに凸性の問題である。第1～6報において、我々は、ひとことで言えば、これらの問題は有限単葉領域に対して肯定的に解けることを見た。そうして著者は、説明はしないけれども、これらの結果は少なくとも分岐点をもたない有限領域まではそのまま成立することを確認した[1)]。

そこで、適切な無限遠点を採り入れることや、分岐点を受け入れることが問題になる。ところが、内分岐領域についてはほとんどなにも知らないという事態に気づくであろう。たとえば、局所的展開に関する状勢はどんなふうになるのであろうか。そこで、まず初めに第二の問題に取り組みたいと思う。

さて、ここで直面している研究のための基本理念は、第1報の定理II[2)]によって象徴的に表明されている。我々はこの定理を第2報の定理Iの形で使ったが、そのようにしたのは、問題(E)が解けなかったためである。内分岐領域を対象にする場合には、元の形状が不可欠である。それが、標題の基本的な補助的命題[3)]である。我々が第8報を準備したのは、これを確立するためなのである。

分岐点をもたない（有限）領域において基本的な補助的命題を確立するためには、問題(C_2)と問題(E)を解決して、不確定領域の幾何イデアルの局所擬基底を見つければ明らかに十分である。これらの問題のうち、我々は第7報において問題(C_2)と問題(E)を解決した。また、ごく最近、H.カルタンは、問題(K)はつねに解けるという第7報の定理4に基づいて、最後の問題を解決した[4)]。だが、分岐点を受け入れると、固有多様体上の正則関数は必ずしも周域空間における正則関数の跡ではないという新しい困難に出会う。その結果、問題(J)のような種類の諸問題が生まれる。それらの中には、ある意味での幾何イデアルの問題、しかもはるかに広い問題も入っている。

この論文では、我々は再び第7報の定理4から出発してこの問題を解決し（定理2）、基本的な補助的命題を確立し、それをどのようにして主要な諸問題に適用するのかを簡潔に示したいと思う。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）ここに、

1943年、著者は高木貞治に宛てて、これを日本語で詳細に書き送った。

という脚註が附されている。

2）上空移行の原理。第1報では、有理多面体を対象にしてこの原理が語られた。

3）第8報の標題で言われている「基本的な補助的命題」の実体は、上空移行の原理であることが明らかにされた。

4）カルタンは論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」において、岡潔の言う「不確定領域の幾何イデアルの局所擬基底を見つける」問題を解決した。同論文の定理2、フランス数学会雑誌78、42頁、参照。定理2の言明は、

開集合 A における解析的多様体の層は、A のすべての点において連接層である。

というもので、層の言葉が使われている。

カルタンは第二次大戦中に書かれた前論文「n 個の複素変数の解析関数のイデアル」において、この問題を「第二問題」（ふたつの問題が未解決問題として提出された）として提示した。第二問題の表明は次の通り。

V は点 a の近傍における解析的多様体とし、$\mathfrak{I}_a$ は点 a におけるこの多様体のイデアル（すなわち、点 a において正則で、a のある近傍において V 上で恒等的に消えるような関数のイデアル）としよう。$\mathfrak{I}_a$ の有限基底は、a に十分近い V のどの点 x においても、点 x における多様体 V のイデアル $\mathfrak{I}_x$ を生成するだろうか。（高等師範学校科学輯報61、187頁参照。）

ここではまだ表明の様式は素朴だが、終戦をはさみ、次の論文に至って解決されたときには層の言葉が全面的に採用されて、上記の定理2のような簡潔な形を獲得した。

岡潔は第7報でカルタンの第一問題に解決を与え（問題 (K) の解決。ただし、岡潔は第一問題が出されたカルタンの論文「n 個の複素変数の解析関数のイデアル」は知らなかった）、カルタンはそれを踏まえて第二問題を解決した。

第一問題は、

正則関数の作る任意の有限系の（点的な）導来モジュールは連接系を作るだろうか。（高等師範学校科学輯報61、187頁参照。）

というふうに表明される。これを解決するには、次の問題を解けば十分である。

$\mathfrak{I}$ は有限基底をもつイデアルを表わすとし、f は（複素数値を取る）正則関数を表わすとしよう。各点 x において、$\mathfrak{I}_x$ に所属して、しかも f で割り切れる関数の作るイデアル $\mathfrak{F}_x$ を考えよう。このようなイデアルは連接系を作るだろうか。（同上）

これを言い換えると、

aはある特定の点を表わすとするとき、$\mathcal{F}_a$の有限基底はaに十分近いすべての点xにおいて$\mathcal{F}_x$を生成するだろうか。（同上）

というふうになり、これなら「連接的」という言葉の意味合いがよく表われている。

第一問題は論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」の定理1で解決されたが、その言明は層の言葉を用いてなされていて、

開集合Aにおいて正則な関数$f_i(1 \le i \le p)$の間の関係の層はAのどの点においても連接的な層である。（フランス数学会雑誌78、37頁、参照。）

というふうに変容した。

第8報が書かれて、内分岐領域において上空移行の原理が確立された（状勢の複雑さを反映して、「基本的な補助的命題」の表明の様式もまた相当に込み入っている。日本数学会雑誌3、275頁に出ている）。そこでこれを補助的命題として用いて、内分岐域の世界に分け入っていこうとするのが、ぼくらの歩むべき本来の道筋であろう。だが、グラウエルトとレンメルトによってふたつの特異な例が示されて、この構想は頓挫した恰好になったまま、今日に至っている。

グラウエルトの例とグラウエルト－レンメルトの例

分岐点の問題は岡潔の講演「多変数解析関数について」でも語られている。初めにその言葉に耳を傾けたいと思う。

それから分岐点を入れたらどうかという問題はひどく残っています。私、これをだいぶ長くやったのですが、全然無条件でないと出さないと意地を張ってるんですだって、せっかくここまで無条件にやってきたのに、それ惜しいでしょう。だからこんなもの、いっさい人に言わないと思っている。言ったらそれだけ問題、減りますからね。まあ、これだいぶ長くやってみたんですが、非常にだんだんだんだんむつかしくなっていきます。この辺では、この問題それ自体を取り扱っているのではないでしょうが、分岐した代数面上におけるいろんな領域について、「正則域で擬凸状ではない」とかいったふうな論文をH.グラウエルト[1]が書いています。

1）ハンス・グラウエルト。ドイツの数学者。1930-　年。ここで言及されている論文は、

「注目に値する擬凸状多様体」（数学雑誌81、1963年、377～391頁。）
である。

ここで言及されている論文「注目に値する擬凸状多様体」において、グラウエルトは次のような性格を備えた内分岐領域を例示した。

ある意味で擬凸状である非有限な内分岐領域であって、（定数以外の）正則関数が存在しないもの。従ってこの内分岐領域は正則凸状ではなく、正則領域でもない。しかし有理型領域（すなわち、ある有理型関数の存在領域）である。

岡潔が解決したハルトークスの逆問題が対象にしていたのは、有限で、しかも分岐点を内包しない領域であった。そのような領域では、
正則領域であること、
正則凸状であること、
擬凸状であること
はみな同義である。ところが非有限な内分岐領域に移ると状勢は一変し、ハルトークスの逆問題はもう解けないというのである。
このグラウエルトの例に先立って、グラウエルトとレンメルトは論文
「特異な複素多様体とリーマン領域」（数学雑誌67、1957年、103～128頁）
において、もうひとつのめざましい性質を備えた内分岐領域の例を報告した。それは、

有限で内分岐する正則領域（ただし、複素3次元以上）で、正則凸状ではなく、擬凸状でもないもの。

というのである。正則領域は擬凸状であるというハルトークスの連続性定理の発見が端緒になって、岡潔の言う第二期の多変数解析関数論が開かれた。正則領域は正則凸状であるという、カルタン－トゥルレンの定理もあった。ところが内分岐域ではこれらの定理はいずれも成立しないのであるから、ハルトークスの逆問題は存在理由を失い、正則凸状の概念は宙に浮いてしまうのである。
真に混沌とした状勢と言わなければならないが、それでもなお上空移行の

原理は成立する。理論形成の可能性は依然として残されているように思われる。

6．カルタンの二論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」と「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」

1944年の論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」

1944年のカルタンの論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」（高等師範学校科学輯報 61、149～197頁）には、多変数解析関数論へのイデアルの概念の導入におけるカルタンの意図が明示されている。全体の構成は下記の通りである。

I．序
II．正則関数のイデアル。q次元空間に値をもつ正則関数のモジュール。
III．クザンの補助的命題の一般化
IV．点モジュールの連接系に関する基本的諸問題
V．純粋モジュール、完全モジュール
VI．p個の関数から成る基底をもち、しかもその多様体が$n-p$次元になるイデアル
VII．関数系の導来モジュール
VIII．与えられたモジュールの導来モジュール
IX．基本定理
X．基本定理の応用
XI．未解決の主問題
XII．柱状領域に対して証明された諸結果の、正則領域への拡張
付録I．点イデアルと点モジュール
付録II．既約な解析的多様体

4頁に及ぶ長い序文が附されているが、ここではそれを概観したいと思う。序文は四節に分かたれているが、第1節は、「ポアンカレの有名な定理を想起しよう」という言葉とともに始まっている。

1．ポアンカレの有名な定理を想起しよう。有限距離の範囲のいたると

ころで有理型である二個の複素変数の関数 f は、ふたつの互いに素な（すなわち、孤立点は別にして、同時に零になることのない）整関数の商である。これを証明するためには、関数 f の極を、同一の重複度の零点にもつ整関数の存在を示すのである。周知のように、それらの極は実二次元[1]の多様体を形成する。

クザン[2]はこの問題を n 個の複素変数の場合に取り上げて、**ある与えられた領域において与えられた零点をもつ正則関数を構成する**という問題を組織的に研究した。もちろん、「与えられた零点」という言葉で諒解されるものを正確に表現しておかなければならない。我々がある領域 D における**クザンの所与**と呼ぶのは、D の各点 x において、x で正則な関数 f_x の所与のことであり、しかもこれらの関数は次の条件を満たすものとする。すなわち、D のどの点 a もある近傍 V をもち、V において f_a は正則であり、V のすべての点 x において商 $\dfrac{f_x}{f_a}$ は正則かつ $\neq 0$ となる。この後者の条件は、点 x における正則関数環において、関数 f_x と f_a は同一の**イデアル**を生成するということを言い表わしている。このようにするとき、クザンによって設定された問題は次のようになる。領域 D におけるどの**クザン所与**に対しても、D **において正則な**関数 f で、D のすべての点 x に対して商 $\dfrac{f}{f_x}$ が正則になり、しかも点 x において $\neq 0$ となるものは存在するだろうか。

クザンはこの問題の研究を、今日では**柱状領域**という名で呼ばれる特殊な範疇の領域に限定した。柱状領域と呼ばれるのは、

$$x_1 \in \delta_1, \ \cdots\cdots \ x_n \in \delta_n$$

というタイプの点集合のことである。ここで $\delta_1, \cdots, \delta_n$ はそれぞれ n 個の複素変数 $x_1, \cdots, x_n$ の平面において与えられた集合を表わす。これらの n 個の集合は柱状領域の**成分**と呼ばれる。クザンは**開柱状領域**、従ってその成分が n 個の複素変数の平面内の開集合であるものに考察を限定した。そうしてクザンは、上記のように設定された問題は、**その成分が、高々ひとつを除いてすべて単連結**であるようなどの柱状領域においても解けることを証明した。我々がここで**クザンの定理**と呼ぶのはこの成果のことである。［実際には、クザンはすべての開柱状領域に対して彼の定理を証明したと信じた。成分の単連結性に関連して必要になる制限に注意を促したのはグロンウォール[3]である（アメリカ数学会報告18、1917年）。］

クザン以来、この定理をいっそう一般的な領域に拡張しようとする努力

が重ねられた。今日では、この定理はどんな領域に領域に対しても成立するわけではないことが知られている。しかしクザンの定理が成立する領域の組織的究明は困難な問題であり、これはわきにのけておくことにしたいと思う。他方、正則関数のイデアルに関して我々がこの論文において獲得する諸成果により、問題の言明をいくぶん修正したうえで、非常に一般的な領域に対して、この問題を解くことが可能になるであろう（§XII参照）。（高等師範学校科学輯報61、149～150頁参照。）

（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。）

1）従って、複素一次元。

2）1895年のクザンの論文「n個の複素変数の関数について」（数学輯報19、1～61頁）。

3）グロンウォールの論文は「多複素変数の一価関数の、二つの整関数の商としての表示の可能性について」。

ここまでが序文の第1節である。イデアルをめぐるカルタンの考察はクザンの定理に始まることが語られて、クザンの定理が成立する領域のタイプの究明は困難であることが記されているが、特に問題はないと思う。続いて第2節に移ると、クザンの定理の幾何学的解釈が登場する。

2．ここにクザンの定理からのよく知られたひとつの帰結がある。領域Dにおいて、Dの各点aの近傍で、方程式$f_a\left(x_1,\cdots,x_n\right)=0$によって規定される点の集合$E$のことを、$n-1$次元[1]の**複素解析的多様体**と呼ぼう。ここでf_aはaの近傍で正則な関数で、しかも恒等的に零にならないものである（aにおいて$f_a\neq 0$の場合も除外されない）。関数f_aを適切に選択して、aの近傍で正則で、しかも（aの近傍で）E上で恒等的に零になる関数はどれも、基底f_aのイデアルに所属する、すなわち、φは点aで正則として、φf_aという形になるようにできることが知られている。f_aをこのように選んでおくとき、aに十分近い点xで正則で、xの近傍においてE上で恒等的に零になる関数はどれも、φは点xで正則として、φf_aという形をもつ。それ故、Dのさまざまな点aにこのように付随するf_aの集合は一つの「クザン所与」を構成する。従って、Dはその成分が（高々ひとつを除いて）すべて**単連結**であるような柱状領域とすると、**Dにおいて正**

則で、E のすべての点において、しかも E の点においてのみ零になる関数 f であって、次のような簡明な性質を備えたものが存在する。すなわち、D において正則で、E 上で恒等的に零になる関数はどれも f で**割り切れる。** 言い換えると、φ は D において正則として、φf という形をもつ。

クザンの定理からの、あまり知られていないもうひとつの帰結は次のようなものである。E は（その成分が、高々ひとつを除いて、すべて単連結な柱状領域 D における）$n-1$ 次元の複素解析的多様体を表わすとしよう。そのとき、D **において正則な**関数の値が E 上で任意に与えられる。ただし、それらの値は E **の近傍における**ある正則関数の E 上へのトレースを構成しているものとする。もっと正確に、またもっと一般的に言うと、こんなふうになる。E の各点 x に対して、x の近傍で正則な関数 f_x が付随している。しかも、E のどの点 a もある近傍 V をもち、V 内に位置する E のすべての点 x に対して、f_x と f_a は x に十分近い E のどの点においても等しいというふうになっているとする。そのとき、ある D **において正則な**関数 f が存在して、E のどの点 x に対しても、f と f_x は x に十分近い E のすべての点において等しい。この定理は後に証明される定理の特別の場合にすぎない（§Ⅴ．定理Ⅰ）。（高等師範学校科学輯報 61、150～151頁参照。）

（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。）

1）これは複素次元。

この第2節では、クザンの定理は余次元1の解析的多様体について、さまざまな情報を与えてくれることが語られている。クザンの定理は零点や極の分布を与えて解析関数を構成しようとする問題に応える定理であり、一変数解析関数論のミッタク・レフラーの定理の延長線上において理解するのが本来の姿と思う。だが、カルタンは幾何学的な角度から解釈し、新たな知見を導いた。取り上げる解析的多様体の余次元をもっと高めて、同様の知見の獲得をめざすならば、イデアルの理論の全面的な導入が必然的に要請されるであろう。解析関数論から解析幾何学への道がこうして開かれて、同じ客観的形式をもちながら、しかも同時に、異なる主観的内容を内包するふたつの理論がこうして形成されていったのである。

第3節は技術的な注釈なので省略して、第4節を一瞥したいと思う。

4．我々が想起したクザンの諸成果により、n 次元空間の $n-1$ 次元[1]の複素解析的多様体の**大域的**研究と、そのような多様体上の正則関数の大域的研究が可能になる[2]。だが、**任意次元の複素解析的多様体の大域的研究**[3]のためには、何事も試みられてこなかったように思われる。我々はこの論文において、この空隙を部分的にでも埋めたいと思う。この問題をもっと細かく分析しよう。ある領域 D において、ある集合 E が複素解析的多様体（あるいは、もっと簡単に、解析的多様体）であると言われるのは、D の各点 a がある近傍をもち、その近傍において集合 E は有限個の正則関数に共通の零点集合として規定される場合である。このような多様体を、D **において正則な**有限個もしくは無限個の関数に共通の零点の集合として、大域的に規定することは可能であろうか。我々はこの問いに対してひとつの部分的な回答を与える予定である（§IX、§Xおよび§XII）。さてここにもうひとつの問題がある。D において解析的多様体 E が与えられたとしよう。また、E の各点 x において、その点において正則な関数 f_x が与えられていて、E のどの点 a もある近傍 V をもち、交わり $E \cap V$ のすべての点 x に対して f_x と f_a は x に十分近い E のすべての点において等しいというふうになっているとしよう。このとき、D において正則な関数 f で、E のすべての点 x の近傍において、この点に関する関数 f_x と E 上で一致するものが存在するだろうか。［略］

岡潔のアイデア[4]により、ある任意の領域における正則関数の研究は、（その領域が全存在領域であるという条件のもとで）結局のところ、（十分に大きな次元の空間内に位置する）コンパクトで、しかも単連結な柱状領域の解析的多様体上の正則関数の研究に帰着される。ところでこのような多様体の場合はこの論文の方法で精密に取り扱うことができる（§X）。これまでに研究がなされた唯一の場合は、ただひとつの関数で作られる基底をもつイデアルという、非常に特別な場合（クザンの場合）のみだったが、それをおして、この数年間、私が**正則関数のイデアルの大域的な研究**を組織的に企画したいという気持ちに誘われたのは、そのためなのである[5]。（高等師範学校科学輯報61、152頁参照。）

（ゴシック体の箇所は、本文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。）

1）これは複素次元。

2）カルタンの立場が明快に打ち出されている。今日の複素解析幾何学の淵源であ

る。

3）カルタンの立場に立ってクザンの定理から出発すれば、進行方向は必然的に一般次元の複素解析的多様体の大域的研究になるであろう。

4）上空移行の原理。

最後の段落ではっきりと語られているように、関数論を解析的多様体上に移すというカルタンのアイデアに鍵を与えたのは上空移行の原理である。この原理により、領域は多様体に移されて、領域上の関数論を多様体上の関数論と同一視するという視点が確立される。少なくとも客観的形式に関する限り、これらのふたつの関数論は同等である。そこで関数論を領域、特に分岐点を内包する領域上で考察する（それは困難で、しかも方法がない）代わりに、解析的多様体に身を移して、イデアルの理論という武器を駆使して理論展開の路を探ろうというのがカルタンのアイデアの骨子であろう。

カルタンの立場から見れば、岡潔を不定域イデアルの理論へと導いた多変数の代数関数論は、代数幾何学の一般理論に包摂されてしまうであろう。実際に数学史はこのように推移して、今日（それは、現代数学が存分に展開され尽くして、終焉に達しつつある時代である）、ぼくらの手中にあるのは解析幾何学と代数幾何学である。だが、多変数の代数関数論の可能性は立ち消えてしまったわけではない。なぜなら、客観的形式の同一性とは裏腹に、代数幾何学と代数関数論の主観的内容は根本的に異なっているからである。

1949年の論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」

1949年のカルタンの論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」（フランス数学会雑誌78、29～64頁）の構成を見るために、まず初めに目次を挙げたいと思う。

VII. 多面体領域おけるイデアルとモジュール
VIII. 正則領域におけるイデアルとモジュール

この論文にも長い序文が附されているが、書き出しの部分に、岡潔の第7報への言及が見られる。岡潔は、1944年のカルタンの論文「n個の複素変数の解析関数のイデアル」を知らないままに、そこに書き留められた未解決の第一問題を解決したというのである。

序. ——「n個の複素変数の解析関数のイデアル」（高等師範学校科学輯報、第3シリーズ、61、1944年、pp.149-197。この論文は、目下の研究の全体に渡って、頭文字I. F. A.を用いて表記されるであろう）という標題の論文の中で、私は複素変数解析関数の理論のいくつかの問題においてイデアルが果たす役割を説明しようと試みた。私は、設定される主要な諸問題を指摘して、それらを解決するべく努力を重ねたが、不完全な仕方でしか解決には達せず、鍵を握る二問題（I. F. A.の187頁の「第一問題」と「第二問題」）を、解答のないままにしておかなければならなかった。同じ諸問題が日本で岡潔によって独立に究明された。それに先行する岡の美しい作品の数々は、イデアルに関する研究へと私を導いてくれたのである。私の作品I. F. A.を知ることもできない状態で、1948年、岡はひとつの論文[1]を執筆した。岡はそこで同じ問題を研究している。ただし用語は少々異なっている[2]。この、フランス数学会雑誌の同じ巻に掲載される論文において、岡は、上述の鍵となる二問題のうち、第一問題を解決している。それ故、私の1944年の論文の果実よりもずっと完全な果実を獲得していることになるのである。岡の新しい作品を原稿の段階で知るという特権を利用して、私は、この理論の全容を見据えて、新しい作品を作ろうという気持ちに誘われた[3]。一方では、私はここで、岡の手で解決された「第一問題」[4]（I. F. A.の187頁）の簡易化された解決を与える（下記の定理1）。他方、私は「第二問題」も解決する（下記の定理2）。その結果、私は解析的多様体の大域的研究に自由闊達に取り組むことができるようになる。

［以下、略。］

（ここまでで序文全体の三分の一ほどである。ゴシック体の「大域的」の一語は、原文ではイタリック体で記されて強調されている。下線による強調はぼくが行なった。）

1）第７報。

2）異なっているのは用語のみではなく、到達目標もまた異なっている。

3）論文「複素変数の解析関数のイデアルとモジュール」は1949年９月15日の日付で受理されている。岡潔の第７報が受理されてから11箇月後である。

4）岡潔の第７報では、問題(K)の解決を意味する。

「私の作品I. F. A.を知ることもできない状態で、1948年、岡はひとつの論文を執筆した。岡はそこで同じ問題を研究している」とカルタンは記し、続いて「岡は、上述の鍵となる二問題のうち、第一問題を解決している」と述べている。研究の動機は異なっても（すなわち、主観的内容は異なるとしても）、岡潔とカルタンは同一の問題に逢着し、しかも岡潔はカルタンに先立って解決に成功したのである。ぼくらはこのようなところに、岡潔とカルタンのふたつのイデアル理論の客観的同一性を感じることができるように思う。また、カルタンが岡潔を高く評価した理由とともに、第７報に改訂を加えたわけもまた容易に諒解することができるように思う。

カルタンは岡潔の論文の論理的構造に着目するばかりであり、岡潔の数学的意図には無頓着である。カルタンはハルトークスの逆問題やレビの問題の解決はめざさなかったし、問題そのものに関心を示した様子も見られないが、カルタンにはカルタンの数学上の意図があったであろう。それは、代数幾何学との融和、すなわち代数幾何学と同じ論理的基盤（イデアル論などの抽象代数学）の上に、複素解析幾何学を構成することである。だが、到達目標の設定はむずかしい。代数幾何学に範を求めてアナロジーをたどりつつ歩みを進めていくのも有力な方針であり、実際に強力に推進されたが、それだけでは明らかに不十分である。クザンの定理が余次元１の複素解析的多様体の情報を伝える定理と見なされたように、複素解析幾何学に固有の問題群が確保されて、理論形成の可能性が具体的に開かれていくためには、原型となる理論、すなわち岡の理論が前もって成立していなければならなかったのである。

岡の理論により、有限で不分岐な領域では、

正則領域であること、

正則凸状であること、

擬凸状であること

という三通りの概念は論理的に見てみな同義だが、これらのうち複素多様体に移せるのは「正則凸状」の概念のみである。そこでその点に着目して「正

則凸状な複素多様体」、すなわちスタイン多様体（正確な概念規定のためには、もう少し条件を書き並べなければならない）というものが考えられて、正則領域の一般化とみなされた。一変数解析関数論におけるリーマンのリーマン面の概念が抽象化されて一次元複素多様体（今日では、単にリーマン面と言えば、つねに一次元複素多様体のことである）の概念が得られたのと軌を一にして、多変数解析関数論ではスタイン多様体が選定された。さらに「特異点つきの複素多様体」、すなわち解析空間の概念が導入され、スタイン多様体に対応してスタイン空間の概念が設定された。複素解析幾何学の根幹をなす概念がこうして定まったが、これは岡の理論があって初めて可能になる出来事なのであった。

ハルトークスの逆問題の解決へと至る具体的な手順は、スタイン空間の理論のふたつの基礎定理（カルタンの名を冠する二定理。すなわち定理 A と定理 B）として集大成された。第 7 報の不定域イデアルの理論が解析的連接層の理論として翻案された。第 8 報の「基本的な補助的命題」は「解析空間の正規化」の理論として解釈された。また、本稿では詳述するゆとりがなかったが、クザンの第二問題を扱う第 3 報に現われた基本思想は、「岡の原理」と呼ばれて定着した。岡潔の理論が幾何学的に解釈されて複素解析幾何学の実質が成立したのである。

岡潔と複素多様体

複素解析幾何学を明確に拒絶しようとする岡潔の言葉も記録されている。以下の一文は講演「多変数解析函数について」からの引用である。

> さて次は複素多様体[1)]ですが、関数論をあそこへ初めてもっていったのはたぶんワイル[2)]です。そしてワイルは一変数関数だけについて考え、何もこの解析平面においてのみ考えなくても、それと同じだけの性質をもっていたらやれると予想して、あゝいうものを定義したんだと思います。ところが一変数のときは、特にそれがコンパクトだったりしますと、複素空間で考えるのとだいたい同じことになると思いますが、二変数以後は決してそうではない。関数論の方からいいますと、ここでは微分することができない。それから積分することができない。その上、格子わけすることができない[3)]。それではいったい何ができるのかとききたい。代数の観点からいきますと、そうとは違います。あるものはできるでしょう。そしてま

た不定域イデアルというふうまでいけば、多様体の方へ移せる[4]のですが、よほどそんなものが出てくるんでない限り、関数論の方との連携はつかないのではあるまいかと思われます。しかも連携がついたら、その後は、適当にコンパクトにした複素数空間で考えればよいので、そこへ移せた後、さらに詳しく多様体のところで調べねばならない問題はありそうもない。数学のことだから、なんだそんな問題があったのかということになるかもしれませんが、ちょっと観念的に考えますと、それなら数空間の方へ移して考えたらよいではないかということになるのです。それでプロジェクティブ・スペース[5]とプロダクト・スペース[6]と、それからそのふたつの組み合わさった空間、まあそういうような所で多変数解析関数を調べよう。一応、そういうことになるのです。

（下線による強調はぼくが行なった。）

1）この「複素多様体」はリーマンによるリーマン面の概念を抽象化して得られた概念であり、カルタンの論文での「複素解析的多様体」とは別の概念である。後者は、局所的に正則関数系の共通零点集合として認識されるような、単葉領域内の集合である。

2）クラオス・フーゴー・ヘルマン・ワイル。ドイツの数学者。1885-1955。ここで言及されているのは、1913年に刊行されたワイルの著作『リーマン面の理念』（トイブナー社）である。この書物は多様体概念の初出として名高いが、ヒルベルトと言われている。

3）高次元の複素多様体の上では、微分すること、積分すること、それに格子分けすることの三つができないと言われている。この言葉の意味はよくわからないが、微分と積分に関しては、高次元複素多様体に対しては、リーマン面の場合と違って、一意化定理が成立しないという事実が示唆されているようにも思う。

「格子分けができない」という言葉はいっそう謎めいている。ともあれ想起されるのは、一変数関数論における楕円関数の等分理論である。これをモデルにして、アーベル多様体の等分理論が構成されている。しかしそれは岡潔の言葉とは無関係であろう。

4）不定域イデアルの理論を複素多様体に移そうとすれば、層の理論の形に変換しなければならないであろう。それはカルタンが実行した道である。

5）射影空間（英語）。

6）積空間（英語）。リーマン球面の積。

岡潔はクザンの問題と展開の問題を梃子（てこ）にして、ハルトークスの逆問題とその解決という雄大な構想を描いたが、これは岡潔に固有の構想であること、すなわち構想それ自体が純粋な独創であることにくれぐれも注意したいと思う。そうして岡潔はこの難路が踏破可能であることを確信し、したのであるから、岡潔は歴史の創造に成功したと言えるのである。他方、カルタンはクザンの研究を幾何学的に解釈して、複素解析幾何学へと進んでいったが、この路線自体はカルタンの独創ではなく、カルタンに先立って二本の有力なレールが敷かれていた。それは、リーマンのアーベル関数論を共通の泉とする二本の道、すなわちイタリア学派の代数曲面論（その雛形になったのは、リーマンの理論を翻案して成立した代数曲線論である）とワイルの一次元複素多様体論（これもリーマンの理論の翻案であり、同一の客観的形式を備えている）である。カルタンの前には歴史が存在し、カルタンはその歴史の流れを大きく延長することに成功したのである。等しく第一期の多変数解析関数論（岡潔の言う第二期に先行する多変数解析関数論の状勢というほどの意味である）を踏まえて出発したにもかかわらず、ここにおいて岡潔とカルタンの歩んだ道は截然と二分されたと言えるのではあるまいか。

本稿は、第７報に加えられたカルタンによる改変の理由と、それに対する岡潔の激怒の理由の解明を主題にして書き進められてきたが、ここまで書き継いでようやく結論を述べうる段階に達したように思う。カルタンの関心はすでに存在する数学史を延長することにあり、新しい歴史創造の契機を包摂する岡潔の理論の主観的内容には、共感することができなかったのであろう。そこでカルタンは岡潔の主観的意図が吐露されている箇所を、おそらく不要と見て、削除したり書き換えたりしてしまったのであろうとぼくは思う。これが本稿の結論である。

７．多変数代数関数論への道

最後に、内分岐領域の理論をめぐって多少、附言しておきたいと思う。
前世紀半ば、リーマンはリーマン面の概念を根底に据えて一複素変数の解析関数の一般理論を展開し、それに基づいてヤコビの逆問題を解決するという構想を描き、しかもそれを遂行した。こうして形成されたのが一変数の代数関数論である。

多変数解析関数論の領域において、リーマンと同じ道を歩もうとすれば

（「真精神を学んで真似をしても少しも真似をしたことにならない」という岡潔の言葉を、ここで想起するべきであろう。岡潔「数学に於ける主観的内容と客観的形式とについて（草案）」参照）、まず初めに多変数解析関数論の一般理論を建設し、その土台の上に多変数の代数関数論の構築をめざすという順序になるであろう。一般理論の核心は存在領域の幾何学的形状を描写することにあるが、不分岐で、しかも有限な領域の場合には、今では「それは擬凸状の領域である」と簡明に答えることが可能である。ぼくらはそこに、ハルトークスの逆問題の解決の数学的意味を見ることができるであろう。だが内分岐領域に移ると状勢は混濁し、グラウエルトの例とグラウエルトーレンメルトの例が明示しているように、明らかに言えることはもう何もない。

代数関数論では、一変数の場合、ヤコビの逆問題という問題が存在し、理論全体の方向を照らす羅針盤のような役割を果たし続けた。多変数の場合にはヤコビの逆問題のように明確な形に提示された問題は見あたらないが、「ヤコビ関数」という多変数の代数関数が存在する。それは、ヤコビの逆問題の解決を通じて認識される新しい関数であり、すでにヤコビとエルミートにより、ヤコビ関数の等分と変換の理論に先鞭がつけられている。理論形成の鍵はヤコビ関数論の手に握られているであろう。

［平成10年（1998年）8月12日］

追記

本稿は平成9年（1997年）10月26日、津田塾大学で開催された第8回数学史シンポジウム（10月25～26日）における講演

「岡潔の第7論文に加えられたH.カルタンによる
改訂の様式に関する一考察」

の記録である。

本稿は下記の三点においてなお未定稿の域にとどまっている。

1．多変数解析関数論の第一期（岡潔の言う「第二期」以前というほどの意味である）の研究の叙述が不十分である。

2．岡潔の講演「多変数解析函数について」が行なわれた日時と場所、および講演記録の掲載誌が不明である。

3．第1報の定理II、第2報の定理I、第5報の条件(β)はそれぞれ第7報の問題(C_2)、問題(E)、問題(C_1)に対応するが、この点の説明が

なされていない。