第五問題研究史 II

杉浦 光夫

§0 はじめに

Iで述べたように、位相群の概念が1920年代に導入され、1933年にフォン・ノイマンによって、第五問題は位相群がリー群となるための（位相的な）条件を求める問題として新しく定式化され直した。詳しく言えば、「局所ユークリッド位相群（位相多様体であるような位相群）はリー群か？」という形の問題が、第五問題の現代的な形として認められて研究されるようになったのである。そしてこの形の問題は、フォン・ノイマン[52]によってコンパクト群に対し、またポントリャーギン[45]によってアーベル群に対し、肯定的に解決されたのであった。

この二つの結果が第五問題に関する30年代の基本的結果であった。このIIでは、これに続く40年代以降の研究について述べる。1940年代前半は第二次大戦と重なり、戦争による混乱や亡命、軍隊や戦時研究への動員等があり、純粋数学の研究はかなり低調であった。ただしこのような時勢下にあっても数学の研究を続けた人も存在し、それらの努力は戦後に花を咲かせたのであった。第五問題について言えば、41年に発表

されたシュヴァレー[7]では、「可解な連結局所ユークリッド群はリー群である」ことが証明されている。この結果は以後の発展に大きな影響を与えた。第二次大戦が終ると、数学の各方面で新しい研究が次次に現われるようになった。第五問題ではモンゴメリの活躍が著しい。彼は戦前からジピンと共に変換群の研究を続けていたが、戦後変換群についての重要な仕事(後述)をした後、1947年から51年にかけて第五問題について単独でまたは協力者ジピンとの共著で[28] [29] [32] [34] [40] [41] 等を発表した。

また新しく日本でも、岩澤健吉、倉西正武、後藤守邦、山辺英彦 等が第五問題の研究を開始し、この方面の研究が活発になった。またモンゴメリは、彼の勤務していたプリンストンの高等研究所にこの方面の研究者を招いたので、このことも研究の進歩に役立った。またアメリカでも若手の有力研究者として、グリースンが現われた。このような状勢の中で上述の意味の第五問題は、1952－53年に完全に解決したのであった。以下本稿では、この経過の中の主要な動きについて述べる。

最後で本稿では扱わない変換群についての第五問題に簡単に触れておこう。

1935年にH. カルタン[5]は、$\mathbb{C}^n$の有界領域の複素解析的自己同型群はリー群であることを示した。また1939年にマイヤース・ス

ティーンロッド[44]は、リーマン多様体の等距離変換全体の群はリー群となることを示した。これらの結果を一般化して 1946年にボホナー・モンゴメリ[1]は次の定理を証明した。

定理 局所コンパクト群 G が、C^2 級微分可能多様体 M に、効果的に(effectively)、位相変換群として作用し、かつ G の各元 g の引起す M の同相写像 $x \mapsto g \cdot x$ が C^2 級微分同相写像ならば、G はリー群である。

この定理で C^2 級とある所は C^1 級でよいことを 1950年に倉西[26]が証明した。このボホナー・モンゴメリ・倉西の定理が多様体の位相変換群がリー群となるための一般的定理としては現在でも最良のものである。ここでは各変換 $x \mapsto g \cdot x$ が C^1 級と仮定されているので、ヒルベルトの要求するように連続性だけでは話はすまない。この点で完全に位相的な仮定にした次の問題が考えられる:

問題 A 局所コンパクト群 G が、位相多様体 M に効果的な位相変換群として作用するとき G はリー群となるか?

この問題 A は現在でも未解決である。問題 A の肯定的な解答は次の問題 B の否定的な解答と同値であることが知られている:

問題 B p 進体の加法群 Q_p は、位相多様体 M に効果的に作用できるか?

問題 B が肯定的な答を持つと仮定するといろいろ不自然な現象が生ずることが知られている(ヤン[57]、ブレドン・レイモンド・ウィ

リィアムズ[47]）ので、問題Aは成立ちそうに思われるが、証明もできないし、反例も見つかって居ない状態である。このようにして現在でも変換群Gについては、変換の微分可能性を仮定しないとGがリー群であることが結論できないのである。

なお第五問題と直接関係はないが、リー群の部分群がGの連結リー部分群となるための必要十分条件が位相的な条件で与えられるという次の定理も日本の数学者によって証明された。

定理　リー群Gの部分群HがGの連結リー部分群となるための必要十分条件は、Hが弧状連結であることである。

必要性は明らかで十分性だけが問題である。$G=R^n$のときは多くの人によって種々の解が与えられた（後藤編[17]）。一般の場合は倉西と山辺[53]によって独立な証明が与えられた。[53]は極めて簡潔であるが、後藤[18]は詳細な証明を与えた。

§1　岩澤の研究

岩澤は、第五問題の研究について ポントリャーギンのコンパクト群に対する研究[46]から位相群をリー群の族の極限と考えるという視点と、（第二可算公理をみたす）有限次元のコンパクト群は、局所的には局所リー群とコンパクト完全不連結正規部分群の直積と同型となるという構造定理を受け継いだ。勿論任意の位相群がリー群の極限となるわけではないので、岩澤は局所コンパクト群でリー

群の族の極限となるような位相群のクラスを考え、それを考察の対象とし、このクラスの群を(L)-群と呼んだ。そして連結(L)-群に対して、上のポントリャーギンの構造定理に類似の構造定理(Theorem 11)を得るのに成功した。この構造定理から連結(L)-群が有限次元かつ局所連結(特に局所ユークリッド的)ならばリー群であることが導かれ、連結(L)-群に対し第五問題が解決されたのであった。

岩澤の研究に影響を及ぼしたもう一つの結果は次のシュヴァレー[7]の定理であった。

定理(シュヴァレー) 有限次元で局所連結の連続局所コンパクト群Gが可解群ならば、Gはリー群である。

可解群は、アーベル群から出発しアーベル群による拡大を有限回繰返して得られる群である。従ってアーベル群に対する第五問題が解けた後、その結果を可解群に拡張するためには、リー群であるという性質が群の拡大で保たれるかどうかを調べる必要がある。岩澤はこれについて、「局所コンパクト群Gの閉正規部分群Nと剰余群G/Nが共にリー群ならば、Gもリー群である」というリー群の拡大定理をTheorem 7として得た。この定理7は、岩澤論文で重要な役割を果している。(この拡大定理でN=アーベル群の場合は倉西[25]によっても独立に得られ グリーソン[14]で一般化されている。)

岩澤健吉は、戦後第五問題の研究を始め、その結果は1947年秋の日本数学会秋季総合分科会で、特別講演として発表され、翌年発行の『数学』(第1巻第3号)に論説「Hilbertの第五の問題 可解位相群の構造について」という論説[22]で印刷公刊された。英文の論文としては、"On some types of Topological groups"[23]という題で、Ann. Math. 50 (1949)に発表された。英語版の[23]は日本語版の[22]の単なる翻訳でなく、この二つの論文の間には内容の出入がある。日本語版[22]は、副題にもあるように、可解群の場合が詳しく述べられ、その構造定理(定理6, 7, 8)の後に、「可解な局所ユークリッド群はリー群である」という上述のシュヴァレーの定理が定理9として証明されている。これはこのシュヴァレーの定理の証明が、岩澤の最初の目標の一つであったことを示している。英語版[23]の方では、これらの定理は一般論に吸収されている。例えば上のシュヴァレーの定理は、[23]では「可解な連結局所コンパクト群は(L)-群である」という定理(Theorem 10)により「(L)群が局所連結かつ有限次元ならば(特に局所ユークリッド的ならば)、リー群である」(Theorem 12)という一般的定理に帰着されている。

英語版[23]にあって日本語版にない重要な部分は、リー群の位相的構造に関する一般論で、半単純リー群の岩澤分解(Lemma 3.11)やそれに基づく岩澤・マリツェフの定理「任意の連結リー

群Gは、その一つの極大コンパクト部分群Kとユークリッド空間R^rの直積に同相である（Theorem 6）は、[23]にしかない。岩澤分解は半単純リー群の大域的構造定理として基本的なもので、表現論では常用されている。また岩澤・マリツェフの定理は、リー群の位相に関する基本定理で、位相的な見地からは、コンパクト・リー群のみを考えればよいことになる。

またLemma 3.7は、「局所コンパクト群GをR^nと同型な閉正規部分群Nで割った剰余群G/Nがコンパクト・リー群ならばGは分裂する。すなわちコンパクト部分群Kで、G=KN, K∩N=eとなるものが存在する」という定理で、後にブルバキ[2]（第7章§3 命題3.4.5），[3]（第9章§1定理1）によって、ワイルの基本定理「Gが連結リー群で、そのリー環がコンパクト半単純ならば、Gはコンパクトで、その中心は有限群である」を、構造論に深入りすることなく証明するのに本質的な道具として用いられた。また岩澤は、上述のリー群の拡大定理をTheorem 7として証明している。

このように、リー群論に関する基本定理を含む岩澤の論文[23]は、リー群論の古典の一つである。以下では第五問題に直接関係する後半（第4節以下）の主要部分の概略を紹介する。

先づリー群で近似できる局所コンパクト群として、次のように(L)－群を定義する。

定義　局所コンパクト群Gは、その閉正規部分群の族$(N_\alpha)_{\alpha\in A}$であって次の i) ii) をみたすものが存在するとき、<u>(L)-群</u>と呼ぶ：

i)　各$\alpha\in A$に対し、剰余群G/N_αはリー群である。

ii)　$\bigcap_{\alpha\in A} N_\alpha=\{e\}$.

この条件をみたす正規部分群の族$(N_\alpha)_{\alpha\in A}$を、(L)-群Gの<u>基準系</u>と呼ぶ。Gが連結のとき、この定義の条件は次のように言い換えることができる：

Lemma 4.1　連結局所コンパクト群Gが(L)-群となるための必要十分条件はGの単位元eの任意の近傍Uに対し、Uに含まれるコンパクト正規部分群Nであって、G/Nがリー群となるものが存在することである。

また次のLemmaが成立つ。

Lemma 4.2　任意の連結(L)-群Gは最大コンパクト正規部分群Nを含む。Gの任意のコンパクト正規部分群N_1はNに含まれる。そしてG/Nはリー群である。

(L)-群の部分群と剰余群については、次の定理が成立つ：

Theorem 8.　1) (L)-群Gの任意の閉部分群Hはまた(L)-群である。2) (L)-群Gが連結のときその任意の閉正規部分群Nによる剰余群G/Nも(L)-群である。

次に(L)-群の拡大について、リー群の拡大定理(Theorem 7)を用いて次の定理が得られる：

Theorem 9 ((L)-群の拡大定理)　Gを連結局所コンパクト群，

Nをその閉正規部分群とする。このときNとG/Nが共に(L)-群ならば，G自身も(L)-群である。

この定理を繰返し適用すると，「(L)-群から出発して(L)-群による拡大を有限回繰返して得られる群は(L)-群である」ことがわかる。特に可解群は，アーベル群から出発してアーベル群による拡大を有限回施して得られる群である。一方ポントリャーギンの構造定理により，局所コンパクト・アーベル群Gはコンパクト部分群Nによる剰余群がリー群となるから Lemma 4.1 により(L)-群である。この二つの事実から次の定理が導かれる：

Theorem 10. 可解な連結局所コンパクト群は(L)-群である。

次に岩澤は，この論文の頂点である(L)-群の構造定理を Theorem 11 として証明する。これは連結(L)-群は，局所的には，局所リー群とコンパクト群の直積と同型となるという定理である。この定理から直ちに局所ユークリッド的な連結(L)-群はリー群であることが導かれ，連結(L)-群に対して第五問題が肯定的に解決される。この定理を証明するために，著者は四つの Lemma (Lemma 4.6, 4.7, 4.8, 4.9) を新たに示す他に，第2.3節のいくつかの結果を用いている。これらの結果を先ず掲げておこう。

Theorem 2. Gを連結位相群，Kをそのコンパクト正規部分群とする。今Kの中心化群 $C_G(K)$ をHとすれば，G=HKである。

Theorem 3 G, Kを Theorem 2 と同じとする。このときKの任意

の正規部分群 K' は、G の正規部分群でもある。

Theorem 4. 連結位相群 G のコンパクト可換正規部分群は、G の中心に含まれる。

Lemma 2.4. G を連結位相群，N をそのコンパクト正規部分群とする。N の交換子群 $[N, N]$ の閉包を，$D_1(N) = N_1$ とおき、N の中心を Z とするとき，$N = N_1 Z$ で，$N_1 \cap Z$ は完全不連結群である。

Lemma 3.6. G を n 次元連結可解リー群とするとき，G のリー部分群 $H_1, \cdots H_n$ であって，次の 1) 2) 3) をみたすものが存在する：

1) 各 $H_i \cong \mathbb{R}$ or $\mathbb{T}$,　　2) $G_i = H_{i+1} \cdots H_n$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ は、G の $(n-i)$ 次元リー部分群で，G_i は G_{i-1} の正規部分群である。

3) $G = G_0$ で G の任意の元 g は，連続かつ一意的に

$$g = h_1 h_2 \cdots h_n, \quad h_i \in H_i$$

と表わされる。

Lemma 4.6 G を連結局所コンパクト群，N を G の完全不連結正規部分群，L' を $G' = G/N$ の局所リー部分群とする。このとき G の局所リー部分群 L で，$L \cap N = e$ かつ LN/N は L' の開集合となるものが存在する。

Lemma 4.7 G を連結局所コンパクト群，N をそのコンパクト正規部分群とし，N を含む G の部分群 H_1 で $H_1/N \cong \mathbb{R}$

となるものが存在すると仮定する。このときGの部分群Hで、$H_1=HN$, $H\cap N=e$, $H\cong\mathbb{R}$となるものが存在する。

Lemma 4.8　Gを連結(L)-群、ZをGのコンパクト可換正規部分群とする。いまG/Zはリー群であるとし、G/Zの根基(最大可解正規部分群)がN/Zであるとする。NはZを含むGのリー部分群である。このとき、Gの半単純局所リー部分群Lであって、LN/NがG/Nの閉部分群となるようなものが存在する。

Lemma 4.9　Gを連結局所コンパクト群、MをGの閉正規部分群でG/Hが半単純リー群となるものとする。さらにNをMの部分群で、Gの中心に含まれるもので、1次元トーラス群$\mathbb{T}$の有限または無限個の直積$\mathbb{T}^{\Omega}$と同型となるものとする。今Gの局所リー部分群L_1であって、$L_1\cap M=e$でL_1M/MはG/Mの閉部分群であり、Mは局所リー部分群L_2とNの直積と局所同型となるものが存在すると仮定する。このときGは、局所リー群LとNの部分群$N'=\mathbb{T}^{\Omega'}$(Ω'はΩのある部分集合)の直積と局所同型となる。

これらの結果の証明をこゝで述べる余裕はないが、いづれも初等的な考察で証明できる。次の補助定理は*Theorem* 11の証明中で岩澤が用いているものであるが、二回使われるので、便宜上ここにまとめておいた。

補助定理　Gを連結局所コンパクト群，Dをそのコンパクト完全不連結正規部分群とする。剰余群 $G'=G/D$ が単位元の任意の近傍 $U'=U/D$ に含まれる局所リー部分群 L' とコンパクト正規部分群 K の直積に，局所同型であると仮定する。このとき，G自身も単位元の任意の近傍Uに含まれる局所リー部分群Lとコンパクト正規部分群Kの直積に局所同型となる。

証明　G'の正規部分群K'は，Dを含むGの正規部分群Kにより，$K'=K/D$の形に書ける。KはUに含まれる。D, K'がコンパクトだから，Kもコンパクトである。また Lem. 4.6 によって，このときGの局所リー部分群Lで $L\cap D=e$，LD/D はL'の開集合となるようなものが存在する。そして$L'K'$がG'における単位元の近傍を含むことから，LKはGにおける単位元のある近傍を含む。さらに，$L'\cap K'=e$ だから，$L\cap K\subset L\cap D=e$，$L\cap K=e$ である。一般性を失うことなくLは連結と仮定してよい。このときLの元とKの元が常に可換であることを言えば，Gは局所的にLとKの直積と同型になる。

それを言うために交換子の集合

$$[L,K]=\{usu^{-1}s^{-1}\mid u\in L,\ s\in K\}$$

を考える。各$s\in K$に対し，$f_s(u)=usu^{-1}s^{-1}$ とおくと，f_sは連続だから連結なLの像$f_s(L)$は連結で，$f_s(e)=e$を含む。従って，$[L,K]=\bigcup_{s\in K} f_s(L)$ は連結である。

一方 L', K' は直積因子だから $[L', K'] = e$, $[L, K] \subset D$ となる。Dは完全不連結, $[L, K]$ は連結で e を含むから $[L, K] = e$ となる。従って L の各元は K の各元と可換である。これですべてが証明された。

Theorem 11 (連結 (L)-群の構造定理) G を連結 (L)-群とし, U を単位元 e の G における任意の近傍とする。このとき U に含まれる局所リー部分群 L とコンパクト正規部分群 K が存在して, G は局所的には L と K の直積と同型になる。逆に局所リー群とコンパクト群の直積に同型な連結位相群 G は (L)-群である。

証明　ペーター・ワイルの定理によりコンパクト群は (L)-群であるから後半は明らかである。

前半を証明するのに三段階にわたってより単純な場合に帰着させる。G が連結 (L)-群であるから, Lem 4.1 により e の任意の近傍 U に含まれる, コンパクト正規部分群 N であって, G/N がリー群となるものが存在する。いま $N_1 = \overline{[N, N]}$ とおく。即ち N_1 は N の位相的交換子群である。Z を N の中心とするとき, Lem. 2.4 により, $Z_0 = N_1 \cap Z$ は完全不連結である。Z_0 は N の閉部分群だからコンパクトである。$N_1 = D_1(N)$ および Z は, N の特性部分群 (N のすべての自己同型で不変) だから, G の正規部分群で, Z_0 もそうである。そこで (G, Z_0) は上の補助定理の条件をみたす。従って次の (1) が証明された。

(1) G/Z_0 に対し、定理11（前半）が成立てば、G に対しても定理11（前半）が成立つ。

これで問題は、G から G/Z_0 に還元された。群 G/Z_0 は一般論で $Z_0=e$ となる場合であるから、上の(1)は言い換えれば、次の(1')となる。

(1') 定理11（前半）を証明するには、$Z_0=e$ となる場合に証明すれば十分である。

N_1 の中心を Z_1 とすると $Z_0=N_1\cap Z\subset Z_1$ である。一方 Theorem 2により、$N=C_N(N_1)N_1$ だから $Z_1\subset Z$ でもあるから $Z_1\subset Z_0$ で、$Z_1=Z_0$ である。そこで $Z_0=e$ となる場合には $Z_1=e$ でもある。このとき $G_1=C_G(N_1)$ とすると $G_1\cap N_1=Z_1=e$ であるから、Theorem 2により、

$$G=G_1\times N_1$$

である。ここで N_1 は、G のコンパクト正規部分群である。従って第二段の還元として、次の(2)が成立つ。

(2) $Z_0=e$ のとき、$G/N_1\cong G_1$ に対し、定理11（前半）が成立てば、G に対しても定理11（前半）が成立つ。

G_1 を改めて G とかけば、G_1 を考えることは、一般論で $N_1=D_1(N)=e$ となる場合即ち N が可換である場合を考えることである。つまり(2)は、次の(2')と同値である。

(2') $Z_0=e$ のとき、定理11（前半）を証明するには、N が可換なコンパクト正規部分群である場合を考えれば十分である。この場合 N は G の中心に含まれる（Theorem 4）。

さて、アーベル群の構造定理により、コンパクト・アーベル群Nを、適当な完全不連結部分群N_0で割れば、剰余群N/N_0はトーラス群の直積$\mathbb{T}^\Omega$と同型になる。

(G, N_0)は上の補助定理の条件をみたすから、第三段目の還元として、次の(3)が成立つ。

(3) $Z_0 = e$ のとき、G/N_0に対し定理11(前半)が成立てば、Gに対しても定理11(前半)が成立つ。

G/N_0を考えることは、一般論で$N_0 = e$, $N = \mathbb{T}^\Omega$の場合を考えることだから、(3)は次の(3')と同値である。

(3') $Z_0 = e$ のとき定理11(前半)を証明するには、$N = \mathbb{T}^\Omega$のときに証明すれば十分である。

いま、連結リー群G/Nの根基(最大可解正規部分群)をM'/Nとし、n次元連結可解リー群M'/Nに対し Lem. 3.6 の条件をみたすn個の1次元リー群を$H_1'', \cdots H_n''$とする。各H_i''はNを含むGのリー部分群H_i'により、$H_i'' = H_i'/N$の形になる。このとき$M' = M_0' = H_1' \cdots H_n'$で、各$M_i' = H_{i+1}' \cdots H_n'$は$M_{i-1}'$の正規部分群である。各$H_i'/N \cong R$ or $\mathbb{T}$である。$H_i'/N \cong R$のときは Lem. 4.7 によりGの部分群H_iで

$$H_i' = H_i N, \quad H_i \cap N = e, \quad H_i \cong R$$

となるものが存在する。$H_i'/N \cong \mathbb{T}$の場合も、今$N = \mathbb{T}^\Omega$であることを用いるとやはりGのリー部分群H_iで

$$H_i' = H_i N, \quad H_i \cap N = e, \quad H_i \cong \mathbb{T}$$

となるものが存在する。従って次の関係が成立つ。

$$M_i' = H_{i+1} \cdots H_n N, \quad M_{i-1}' = H_i M_i', \quad H_i \cap M_i' = e.$$

一方、Lem. 4.8 により、Gは局所リー部分群 L_1 で、$L_1 \cap M_0' = e$ で $L_1 M_0'/M_0'$ は G/M_0' の開集合となるものが存在する。そこで Lem. 4.9 を $M_{n-1}, \cdots, M_1', M_0', G$ に順次適用して行けば、結局Gの局所リー部分群Lとコンパクト正規部分群 $K \cong \mathbb{T}^{\Omega'}$ (Ω'はΩのある部分集合)が存在して、Gは局所的には、LとKの直積と同型となる。これで Theorem 11 は証明された。∎

この構造定理 (Theorem 11) により、任意の連結(L)-群Gは、局所的には局所リー群とコンパクト群の直積である。所がコンパクト群に対しては、第五問題は肯定的に解決されていて、ポントリャーギン[47]によれば、有限次元かつ局所連結な(特に局所ユークリッド的な)コンパクト群はリー群である。従って Theorem 11 から直ちに次の Theorem 12 が導かれる。

Theorem 12 ((L)-群に対する第五問題の解決) (L)-群Gが、有限次元かつ局所連結ならば(特に局所ユークリッド的ならば)、Gはリー群である。

上述の Theorem 12 の証明では、Theorem 11 を用いて、既知のコンパクト群の場合に帰着させたわけであるが、Theorem 12 のすぐ後で、岩澤は次のような注意をしている：

「注意　Theorem 12だけを証明するためには、Theorem 11の長い証明は必ずしも必要でない。すぐわかるようにLemma 4.1を用いて、コンパクト群の場合と類似の議論（ポントリャーギン[47] §45）によってTheorem 12を証明することができる。」
定理12によって、岩澤はそれまでに、第五問題が解決したコンパクト群、可換および可解局所コンパクト群に対して、統一的な視点を与えた。即ちこれらの三種の群は、(L)-群であり、リー群によって近似され、その（射影）極限となる群である点に第五問題がこれらの群に対し解けたという事実に対する内在的根拠があることを示したのである。

こうして岩澤は、(L)-群という広いクラスの群に対し、第五問題を解決したが、岩澤はこの論文でさらに一歩踏み出した考察を行った。即ち岩澤は、この(L)-群が局所コンパクト群全体の中で、どのような位置を占めるのかという問題を考えたのである。先ず岩澤は次の二つの定理を証明した：

Theorem 22　任意の連結局所コンパクト群Gは、(L)-群である正規部分群の中で最大のものQを含む。QはGにより一意的に定まる。Gの任意の(L)-群である連結正規部分群はQに含まれる。そして剰余群G/Qは、e以外の(L)-群である正規部分群を含まない。

Theorem 23.　任意の連結局所コンパクト群Gの正規部

分群 R_0 で G/R_0 が (L)-群であるようなものの中で、最小のもの R が一意的に定まる。R 以外の R の任意の正規部分群 R' に対しては、R/R' は (L)-群とならない。

この Q と R が、任意の連結局所コンパクト群 G の中で、(L)-群の理論が適用できる限界を与えているわけである。つまり G/Q および R に対しては (L)-群の理論は全く無効である。所が岩澤は、この限界は存在しないのではないかと考えた。つまり常に

$$Q = G, \qquad R = e$$

であると予想したのである。すなわち岩澤は次の (C_1) を予想した。

予想 (C_1) 任意の連結局所コンパクト群は (L)-群である。

またこの (C_1) と次の予想 (C_2) が同値であることを岩澤は指摘した：

予想 (C_2) 連結局所コンパクト群 G の単位元 e の近傍 U で、e 以外の正規部分群を含まないものが存在するとき（このとき G は小さい正規部分群を持たないという）、G はリー群である。

(C_1) $\Rightarrow$ (C_2) の証明

G が小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群とする。いま U を e 以外の正規部分群を含まない G の単位元近傍とする。今 (C_1) が成立つと仮定すると、G は (L)-群である。従って

Lem. 4.1 により，Uに含まれる閉正規部分群Nで，G/Nがリー群となるものが存在する。所がUはe以外の正規部分群を含まないのだから，$N=e$で$G/N=G$はリー群である。

$(C_2)\Rightarrow(C_1)$の証明．

任意の連結局所コンパクト群Gをとる。Theorem 22により，(L)-群である，Gの正規部分群中最大のものQが存在し，G/Qはe以外の(L)-群である正規部分群を持たない。特にG/Qのコンパクト正規部分群はeだけである。G/Qは局所コンパクト群だから，単位元の近傍の基としてコンパクト近傍がとれる。G/Qの単位元のコンパクト近傍Uに含まれる閉正規部分群はコンパクト正規部分群だからeとなる。従ってG/Qは小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群である。そこで(C_2)が成立つと仮定するとG/Qはリー群従って(L)-群である。QとG/Qが共に(L)-群であるから，(L)-群の拡大定理(Theorem 9)により，Gも(L)-群である。これで$(C_2)\Rightarrow(C_1)$が証明された。

予想(C_1)が重要なのは，もし(C_1)が成立てば第五問題が一般に解決するからである。いま，1930年代以後第五問題の解と考えられて来た次の命題を(V)とする：

(V) 任意の有限次元，局所連絡な(特に局所ユークリッド的な)局所コンパクト群Gはリー群である。

$(C_1)\Rightarrow(V)$の証明

いま G を有限次元局所連結な局所コンパクト群とする。G の単位元連結成分 G_0 は局所連結という仮定から、G の開部分群である。

仮定 (C_1) が成立つとき、連結局所コンパクト群 G_0 は (L)-群である。今、仮定により G_0 は有限次元かつ局所連結だから、(L) 群 G_0 は Theorem 12 により、リー群である。開部分群 G_0 がリー群だから G もリー群である。

後に山辺英彦 [54] [55] は、予想 (C_1), (C_2) が成立つことを証明し、(V) の形の第五問題を最終的に解決した。すなわち (V) の形の第五問題は岩澤の予想した形で解決したのである。

§2 グリースンの研究

グリースンは、1921年カリフォルニアに生れ、42年エール大学を卒業し、召集されて暗号解読の仕事に従事し、戦後ハーヴァード大学のフェローとなり第五問題の研究を始める。50年にハーヴァードの助教授となるが、朝鮮戦争が始まったため、再び暗号の仕事に召集された。第五問題についての彼の決定的な仕事 [15] (1952年) はこの間になされた。

グリースンは位相群 G の単位元 e の近傍 U で、$\{e\}$ 以外の部分群が含まれないものがあるとき、G は小さい部分群を持たないと呼んだ。この性質に注目したのは、シュヴァレーが最初

で、彼は1933年にC.R.ノート[15]で次のことを言明した：

「可分な局所コンパクト群Gが局所連結で小さい部分群を持たないとすればGはリー群である。」

「しかし自分の証明は不十分だった」とシュヴァレーは間もなく友人H.カルタンに告げた（H.カルタン[5]序文脚註）。

このシュヴァレーの予想を、グリースンは改めて取上げ、彼の第五問題研究の鍵とした。グリースンのこの方面の最初の論文「局所ユークリッド群における平方根」[11]（1949年発表）において、彼は次の定理を証明した。

定理A　小さい部分群を持たない局所ユークリッド群Gにおいては単位元eの二つの近傍M, Nが存在してMの各元の平方根がNの中に唯一つ存在する。

さらにグリースンは、論文「局所コンパクト群における弧」[12]において、次の定理を証明した。

定理B　二つ以上の元を含む連結局所コンパクト群は、弧を含む。次元が正の連結局所コンパクト群は、一径数部分群を含む。

シュヴァレーは、定理Aを用いてGの単位元のある近傍は一径数部分群で埋めつくされることを証明した（「グリースンの一定理について」[9]）。

これは小さな部分群を持たない局所ユークリッド群Gは、eのま

わりでリー群と同様の状況となっていることを示している。しかしGがリー群であることを示すためには、Gの群演算がeのまわりで解析的(少なくともC^2級)であることを示さなければならない。その方法は簡単には見つからなかった。

グリースンは、論文「局所コンパクト群の構造」[14]において、リー群の族で近似できる開部分群を含む位相群を考え、一般化リー群(generalized Lie group)と名づけた。正確な定義は次の通りである:

定義　位相群Gの単位元eの任意の近傍Uに対して、Gの開部分群G_1とG_1のコンパクト正規部分群Cで、$C \subset U$かつG_1/Cはリー群となるものが存在するとき、Gを一般化リー群という。

すなわち一般化リー群とは、リー群の族の射影極限となる開部分群を含む位相群のことである。岩澤の(L)-群とは、リー群の族の射影極限となる群のことであったから、この二つの概念は極めて近く、特に連結群に対しては一致する。

一般化リー群の方が一般性においては優るが第五問題では連結群だけを考えればよいから(L)群の方が直接的で便利だとも言える。要するに一長一短である。グリースンは[14]で、一般化リー群についてのいくつかの定理を証明した。それらは、岩澤の(L)-群についての結果と平行したものが多い。例えば一般化リー群Gの剰余群G/Nは、また一般化リー群である(定理4.3)。N及びG/Nが共に一般化リー群ならば、Gも一般化リー群で

ある（拡大定理）。（定理4.7）。任意の局所コンパクト群の組成列の長さは有限である（定理5.5）。可解な局所コンパクト群は、一般化リー群である（定理6.4）。任意の連結局所コンパクト群Gは、最大可解正規部分群R（根基）を持つ。RはGの閉集合で、G/Rの根基は$\{e\}$である。

最後にグリースンは次の予想（C）を述べている：

予想（C）　任意の局所コンパクト群Gは、一般化リー群である。

これは岩澤の予想（G）に対応する予想であり、53年に山辺[55]によって正しいことが証明された。この（C）から、前節で述べた（V）という第五問題の解決が直ちに導かれる。

しかし岩澤論文の中心である（L）-群の構造定理（Theorem 11）と（L）-群に対する第五問題の解決（Theorem 12）に対応する定理は[14]には見当らない。

グリースンの論文「小さい部分群を持たない群」[15]は、第五問題研究史上画期的な仕事である。フォン・ノイマン以後研究者が皆「局所ユークリッド群（有限次元局所連結な局所コンパクト群と言っても殆んど同じ）はリー群か？」という形で第五問題をとらえていた時、グリースンはこれと異なる形の問題「小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群はリー群か？」という問題を提出し、それを独自の方法で解いたのであった。これは岩澤の予想（C_2）よりも少し仮定が強くなっているが、同じ方向の予想が肯定的に解けるという発見であった。

グリーソンの仕事の解説をする前に「小さい部分群を持たない」という仮定の意味を考えて見よう。実数の加法群$\mathbb{R}$は、小さい部分群を持たない。それはアルキメデスの公理「任意の $a>0$, $b>0$ に対し、自然数nが存在して $na>b$ となる」から直ちに導かれる。$\mathbb{R}$の部分群Hが$\{0\}$でなければ正の元aを含むので、任意の$b>0$に対し、0の近傍$(-b, b)$はHを含まないからである。一般に次の定理が成立つ。

定理D　任意のリー群Gは、小さい部分群を含まない。

証明　Gのリー環を$\mathfrak{g}$とする。指数写像 $\exp:\mathfrak{g}\to G$は、解析写像で、$\mathfrak{g}$における0のある開近傍N_0を、Gにおける単位元eのある近傍Nの上に写す解析的同相写像を引起す。任意の$X\in\mathfrak{g}$, $t\in\mathbb{R}$に対し、$a(t)=\exp tX$ とすれば、aは$\mathbb{R}$からGへの解析的準同型写像である。aをGの<u>一径数部分群</u>という。Gの任意の一径数部分群は、すべてこの形に表わされる。いま$\mathfrak{g}$にノルム$\|\ \|$を入れておく。N_0は有界凸集合としてよい。$N^*=\exp(\frac{1}{2}N_0)$ とおくと、N^*もGにおけるeの開近傍である。いま帰謬法により定理Dを証明するため、$N^*\supset S\neq\{e\}$となる部分群Sが存在したと仮定して矛盾を導く。このとき $e\neq s\in S$ が存在する。$s\in N^*=\exp(\frac{1}{2}N_0)$だから

$$(1)\qquad s=\exp X, \qquad X\in\tfrac{1}{2}N_0$$

となるXが唯一つ存在する。$e\neq s$ だから、$0\neq X$ で $\|X\|>0$

である。従って$\mathbb{R}$におけるアルキメデスの公理により、次の(2)が成立つ。

(2) 集合 $A=\{\|kX\|=k\|X\|\mid k=1,2,\dots\}$ は、上に有界でない。

$\frac{1}{2}N_0$は有界集合だから、従って十分大きな自然数mをとれば、

$mX\notin\frac{1}{2}N_0$ となる。このような自然数mの内最小のものを$k+1$とすれば、

(3) $X,\ 2X,\ \cdots kX\in\frac{1}{2}N_0,\quad (k+1)X\notin\frac{1}{2}N_0$

となる。$X, kX\in\frac{1}{2}N_0$ だから

(4) $X=\frac{1}{2}Y,\ kX=\frac{1}{2}Z$ となる $Y, Z\in N_0$ が存在する。

いま、N_0は凸集合だから、その二点Y, Zを結ぶ線分の中点$W\in N_0$である。そこで

(5) $N_0\ni W=\frac{1}{2}(Y+Z)=X+kX=(k+1)X$

となる。今仮定 $S\subset N^*$ だから

(6) $s^{k+1}=\exp(k+1)X\in N^*=\exp(\frac{1}{2}N_0)$

である。従って

(7) $s^{k+1}=\exp(k+1)X=\exp V$ となる $V\in\frac{1}{2}N_0$ が存在する。

$(k+1)X=W\in N_0$ (5) かつ $V\in\frac{1}{2}N_0\subset N_0$ (7) であり、$\exp$はN_0上一対一写像だから

(8) $W=(k+1)X=V\in\frac{1}{2}N_0$

である。この(8)は(3)の$(k+1)X\notin\frac{1}{2}N_0$と矛盾する。これで定理Dは証明された。(この証明はヘルガソン[21] p.150, 552 のものを、アルキメデスの公理を強調する形に書直したものである)。

定理Dにより、小さい部分群を持たないことは、位相群がリー群となるための必要条件である。グリースンは適当な付加条件があれば、これが十分条件でもあることを証明した。すなわち彼は[15]において、次の定理を証明した。

グリースンの定理. 小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群Gはリー群である.

この定理を証明するためのグリースンのプロットは明快である。その主要なアイディアは、このような群Gに対し、リー群の場合の随伴表現に類似の有限次元線型表現Φを構成する点にある。このために、適当な条件をみたすGの一径数部分群γの集合Γを考え、各$\gamma \in \Gamma$の単位元eの接ベクトルにあたる元$z_\gamma \in L^2(G)$を定義し、その集合$Z = \{z_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$は実ベクトル空間の構造を持つことを示す。Gが有限次元ならばZも有限次元である。Gの各元σの引起す内部自己同型写像$\alpha_\sigma : \tau \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$は、$\Gamma$の変換を引起すから、$\Phi_\sigma(z_\gamma) = z_{\sigma\gamma\sigma^{-1}}$により、GのZ上の連続表現$\Phi$が定義される。

この計画の問題点は、一径数部分群$\gamma \in \Gamma$が微分可能で、接ベクトルにあたるz_γが定義できるという点にある。Gは位相群で、微分構造はあらかじめ与えられてはいないので、微分可能ということの意味を与える所から出発する必要がある。そのため、グリースンは次のような工夫をした。

以下Gを小さい部分群を持たない局所コンパクト群とする。このときGは第一可算公理をみたすから通常の点列による極限のみを考えればよい。点

列$(x_n)_{n\in N}$がコンパクト集合Cに含まれるとき、その部分列で収束するものがある。この部分列の記述をはぶくため、グリーソンは自然数の集合$\mathbb{N}$(離散空間と考える)のチェック・コンパクト化N^*を考えた。C内の点列$(x_n)_{n\in N}$を、$\mathbb{N}$からCへの連続写像$x: n\longmapsto x_n = x(n)$と考えるとき、xは$\mathbb{N}^*\longrightarrow C$の連続写像$x^*$に拡張できる。任意の$\xi\in N^*-N$に対し、$x^*(\xi)=\lim_{n\to\xi} x_n$と記す。これは元の点列$(x_n)$の部分列の極限に外ならない。通常の極限$\lim_{n\to\infty}x_n$が存在するのは、すべての$\xi\in\mathbb{N}^*-\mathbb{N}$に対し$\lim_{n\to\xi}x_n$が存在して、その値が$\xi$によらないで一定のときに限る。fがC上の連続写像ならば、$\lim_{n\to\xi}f(x_n)=f(\lim_{n\to\xi}x_n)$が成立つ。特に$(\sigma_n)$、$(\tau_n)$がそれぞれGのコンパクト集合C, K内の点列であるとき、$\lim_{n\to\xi}\sigma_n\tau_n=(\lim_{n\to\xi}\sigma_n)(\lim_{n\to\xi}\tau_n)$が成立つ。

またグリーソンは、位相群Gのコンパクト集合全体の集合Cに位相を入れGのコンパクト集合の列$(D_n)_{n\in N}$が$D\in C$に収束するということを定義した。

これはコンパクト対称集合の半群$(U(s))_{s\geq 0}$を定義するのに用いられる。

$\mathbb{R}^n$における0を中心とする半径$s\geq 0$の閉球にあたる、コンパクト対称集合の族$(U(s))_{s\geq 0}$で、半群性$U(s)U(t)=U(s+t)$をみたすものを一つ構成しておく。そして連続函数$\alpha:[0,1]\longrightarrow G$でリプシッツ条件$\alpha(t)^{-1}\alpha(s)\in U(|s-t|)$をみたすものを一つ構成する。

そして、G上の左不変ハール測度に関する実数値2乗可積分函数

全体の作る実ヒルベルト空間 $L^2=L^2(G)$ を考える。そして G の各元 σ を σ の L^2 上に引起す左移動 $L_\sigma : f(\tau)\mapsto f(\sigma^{-1}\tau)$ と同一視する。$L_\sigma f=\sigma f$ と記すことにする。

2.3　そして G 上の台がコンパクトな実数値連続函数 x で、$x(\varepsilon)>x(\sigma)$ $(\forall\sigma\neq\varepsilon)$, $|x(\sigma\tau)-x(\tau)|\leqq s$ $(\forall\sigma\in U(s))$ をみたすものを構成する。このとき $\|\sigma x-x\|\leqq s$, $(\sigma\in U(s))$ が成立つ。このとき上のリプシッツ条件をみたす $\alpha:[0,1]\to G$ を用いると

$$\|\alpha(s)x-\alpha(t)x\|=\|\alpha(t)^{-1}\alpha(s)x-x\|\leqq|s-t|$$

である。$\alpha(1)\neq\alpha(0)$ だから ある $y\in L^2$ に対し $(\alpha(1)x,y)\neq(\alpha(0)x,y)$ となる。そこで実数値函数 $f(s)=(\alpha(s)x,y)$ は、位数1のリプシッツ連続函数だから、特に絶対連続であり、従って殆んど到る所微分可能で、$f(s)=f(0)+\int_0^s g(t)dt$ と表わされる。f は定数でないから $f'\neq 0$ であり、ある $t\in[0,1]$ において $f'(t)\neq 0$ である。これは

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\alpha\left(t+\tfrac{1}{n}\right)x,y\right)-(\alpha(t)x,y)\right\}\neq 0$$

を意味する。(有限な極限が存在し0でない)。今、この t に対し

$$(10)\qquad \sigma_n=\alpha(t)^{-1}\alpha\left(t+\tfrac{1}{n}\right)$$

とおくと $\sigma_n\in U(\frac{1}{n})$, $\|\sigma_n x-x\|\leqq\frac{1}{n}$ となる。このとき点列 $(n(\sigma_n x-x))_{n\geq 1}$ は L^2 の単位　に含まれる。B は L^2 の弱位相に関しコンパクトだから、ある $\xi\in N^*-N$ に対し、弱極限

$$z=\mathrm{weak}\lim_{n\to\xi} n(\sigma_n x-x)$$

が存在する。　(9) により

$$(z, \alpha(t)^{-1}y) = \lim_{n\to\xi} n\{\alpha(t+\tfrac{1}{n})x, y) - (\alpha(t)x, y)\} \neq 0$$

だから

(11) $\quad z \neq 0$

である。(10) の $\sigma_n \in U(\frac{1}{n})$ から出発すると、任意の $s \in R$ に対し

(12) $\quad \sigma_n^{[ns]} \in U(|[ns]|\cdot\frac{1}{n}) \subset U(|s|)$

となる。ここで $[ns]$ は ns の整数部分を表わす。$U(|s|)$ はコンパクトだから、ある $\xi \in N^* - N$ に対し、極限

(13) $\quad \gamma(s) = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[ns]} \in U(|s|)$

が存在する。任意の $s, t \in R$ に対して

$$e(n) = [(s+t)n] - [sn] - [tn]$$

とおくと、$e(n) = \pm 0$ または 0 であるから、$\sigma_n \to \varepsilon\ (n\to\infty)$ により $\sigma_n^{e(n)} \to \varepsilon$ であり、

$$\gamma(s+t) = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[(s+t)n]} = \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[sn]} \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{[tn]} \lim_{n\to\xi} \sigma_n^{e(n)} = \gamma(s)\gamma(t)$$

となる。すなわち γ は G の一径数部分群である。(12) から

(14) $\quad \gamma(s) \in U(|s|) \quad (\forall s \in R)$

が成立つ。いま $s \downarrow 0$ のとき $U(s) \to \{\varepsilon\}$ だから、$s_0 > 0$ が存在して $0 \leqq s \leqq s_0$ となるすべての s に対し、$\|U(s)z - z\| \leqq \frac{1}{2}\|z\|$ となる。$U(s)z$ の閉凸包を $K(s)$ とすれば任意の $A \in K(s)$ に対し、$\|Az - z\| \leqq \frac{1}{2}\|z\|$ が成立つから

(15) $\quad \|Az\| = \|Az - z + z\| \geqq \|z\| - \|Az - z\| \geqq \frac{1}{2}\|z\| > 0 \quad (0 \leqq s \leqq s_0)$

となる。γ の定義から

(16) $\quad \dfrac{\gamma(s)x - x}{s} = \lim_{n\to\xi} \dfrac{n}{[ns]}\{\sigma_n^{[ns]}x - x\} = \lim_{n\to\xi}\{\phi_{ns}\, n(\sigma_n x - x)\}$

ただし

(17) $\phi_{n,s} = \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} \sigma_n^{\,i-1} \in K(s)$

である。Lemma 1.2.3 により $K(s)$ はコンパクトだから、ある ξ に対し $\lim_{n \to \xi} \phi_{n,s} = \phi_s$ が存在する。(5)(17)より $\|\phi_{n,s} z\| \geqq \frac{1}{2}\|z\|$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ であるから、$\gamma(s)x - x = s\phi_s z \neq 0$ $(0 < s \leqq s_0)$ となる。特に γ は自明でない一径数部分群である。すなわち次の 2.6 が示されたのである。

2.6　G の自明でない一径数部分群で、$\gamma(s) \in U(|s|)$ $(\forall s \in \mathbb{R})$ をみたすものが存在する

このことを証明するのに用いた G の性質は、コンパクト対称集合の半群 $U(s)$ の存在だけである。グリースンが [12] で示したように、任意の局所コンパクト群はこのような半群 $U(s)$ を含むか、いくらでも小さい連結コンパクト部分群を含む。連結なコンパクト群は一径数部分群を含むから、次のことが成立つ。

定理　連結局所コンパクト群 G が $\{e\}$ でないとき、G は自明でない一径数部分群を含む。

G の一径数部分群 γ で定数 $k>0$ が存在して、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して、$\gamma(t) \in U(k|t|)$ となるもの（リプシッツ一径数部分群）の全体を Γ と記す。このような k の下限を $|\gamma|$ と記す。

2.7　2.3で構成した連続函数 $x \in L^2(G)$ と任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し L^2 内の弧 γx は微分可能である。

$\gamma(-\frac{1}{n}) \in U(\frac{|\gamma|}{n})$ だから、$\|n(x - \gamma(-\frac{1}{n})x\| \leqq |\gamma|$ となる。L^2 の閉球は

弱コンパクトだから、従ってある$\xi \in N^* - N$に対し、弱極限

(18) $$z = \text{weak} \lim_{n \to \xi} n(x - \gamma(-\tfrac{1}{n})x) \in L^2$$

が存在する。$s > 0$に対し　$\gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \gamma(1/n)^{[ns]} = \lim_{n \to \xi} \gamma(1/n)^{[ns]}$だから

(19) $$\begin{aligned} \frac{\gamma(s)x - x}{s} &= \lim_{n \to \xi} \frac{n}{[ns]} (\gamma(\tfrac{1}{n})^{[ns]} x - x) \\ &= \lim_{n \to \xi} \left\{ \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} \gamma(\tfrac{i}{n}) \right\} \left\{ n(x - \gamma(-\tfrac{1}{n})x \right\} \\ &= \int_0^1 \gamma(st)\, dt \cdot z \end{aligned}$$

となる。この積分の被積分函数$\gamma(st)$は、(s, t)の連続函数であるから、$s \downarrow 0$のとき極限を積分記号下でとることができる(1.2.5による)。そこでL^2の強位相で

(20) $$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s} = \int_0^1 \gamma(0)\, dt \cdot z = z$$

となる。$s < 0$のときには、$(\gamma(s)x - x)/s = \gamma(s)((\gamma(-s)x - x)/(-s))$だから

(21) $$\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s} = z$$

が成立つ。即ち弧$\gamma(t)$は$s = 0$で微分可能で、導値(derivative)はzである。任意の$t \in R$に対し　$\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(t+s)x - \gamma(t)x}{s} = \gamma(t) \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)x - x}{s} = \gamma(t)z$であり、$\gamma z$は到る所微分可能である。いまこの$s = 0$での導値を$z_\gamma$と記し、

(22) $$Z = \{ z_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \}$$

とおく。

2.8　接ベクトルの集合Zは実ベクトル空間の構造を持つ。

なぜならば、任意の$\gamma \in \Gamma$と$t \in \mathbb{R}$に対し　$\delta(s)=\gamma(ts)$とおけば、$\delta \in \Gamma$で

(23) $$t z_\gamma = z_\delta \in Z$$

である。また任意の$\beta, \gamma \in \Gamma$に対して

$$\delta(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\beta(\tfrac{1}{n})\gamma(\tfrac{1}{n})\right)^{[ns]}$$

とおくと、$\delta\in\Gamma$であり、数値函数の和の微分法と同様にして

(24) $$z_\beta + z_\gamma = z_\delta \in Z$$

が成立つ。

またこのとき次のことが証明される。

2.12　$\beta,\gamma\in\Gamma$,　$z_\beta = z_\gamma$ ならば　$\beta=\gamma$ である。

Gの任意の元σによる内部自己同型 $\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$ によって一径数部分群$\gamma(s)$からもう一つの一径数部分群$\sigma\gamma(s)\sigma^{-1}$が生ずる。また内部自己同型によってリプシッツ性は保たれるから$\gamma\in\Gamma$ならば$\sigma\gamma\sigma^{-1}\in\Gamma$である。そこで

$$\Phi_\sigma(z_\gamma) = z_{\sigma\gamma\sigma^{-1}}$$

によってZ上の変換Φ_σを定義すれば、Φ_σはZ上の線型変換で、写像$\Phi:\sigma\mapsto\Phi_\sigma$は、$G$の$Z$上の弱連続表現となる。

2.13　Gが有限次元のとき、$\dim G = n$ とすれば、$\dim Z \leq n$ である。

証明　帰謬法によって証明するために、$\dim Z > n$ と仮定して矛盾を導く。このときZには $n+1$ 個の一次独立な元 $z_1, z_2, \cdots,$

z_{n+1} が含まれる。$Z_1 = \{z_\gamma \in Z \mid |\gamma| \leqq 1\}$ とおく。必要があれば、z_i をその実数倍で置換えて、$z_i \in Z_1$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ としてよい。Z_1 は凸集合である (2.17) から、$0, z_1, \cdots, z_{n+1}$ を頂点とする $(n+1)$ 次元単体 S は、Z に含まれる: $S \subset Z_1 \subset Z$ であるから、次元の単調性により

$$n+1 = \dim S \leqq \dim Z = n$$

となるがこれは矛盾である。

2.19 定理 G を小さい部分群を持たない有限次元連結局所コンパクト群で $G \neq \{e\}$ とする。今 G の中心は完全不連結であるとする。このとき G は有限次元実ベクトル空間 Z 上に、自明でない連続線型表現 Φ を持つ。

証明 2.18 により Z は有限次元だから、Z 上の弱位相は、通常の位相と一致し、Φ は G の Z 上の連続線型表現である。2.6 により G は自明でない一径数部分群 $\gamma \in \Gamma$ を含む。いま G の中心は完全不連結と仮定しているから、連結な γ は G の中心には含まれない。従って G のある元 σ に対し、$\sigma\gamma\sigma^{-1} \neq \gamma$ となる。

従って、2.12 により、$\Phi_\sigma(z_\gamma) \neq z_\gamma$、$\Phi_\sigma \neq 1$ (恒等変換) となり、Φ は自明でない。この定理 2.19 と既知の結果を組合せて、上に述べたグリーソンの定理が証明される。

グリーソンの定理. 小さい部分群を持たない、有限次元局所コンパクト群 G はリー群である。

証明．　$n=\dim G$に関する帰納法で証明する。

第一段　$n=0$ のとき．このときGは離散群であるか，完全不連結である。

後者の場合には，Gは小さい部分群を持ち，仮定に反する。従ってGは離散群で，0次元リー群である。

第二段　$n\geqq 1$ でGは連結のとき，$n>m\geqq 0$ となる自然数 m に対し，m次元群に対しては定理は成立つと仮定する。二つの場合(A)(B)に分けて考える。

(A)　Gの中心が完全不連結のとき

定理2.19により，このときGは有限次元実ベクトル空間Z上に自明でない連続表現 Φ を持つ。　$K=\mathrm{Ker}\,\Phi$ とおく。KはGの閉部分群だから，局所コンパクトで小さい部分群を持たない。局所コンパクト群 $G/K\cong\Phi(G)$ は，リー群 $GL(Z)$ の中への一対一連続準同型写像を持つからリー群である（シュヴァレー[8] Ch.IV. §XIV. 命題1 (p.130)）。Φ は自明でないから，$\Phi(G)$ は2点以上を含む弧状連結集合であり，

$$(25)\qquad \dim G/K=\dim\Phi(G)\geqq 1$$

である。一方 $\dim K\leqq\dim G=n<+\infty$ であり，モンゴメリの定理（[34]定理7）により，もし $\dim K=\dim G$ ならば，

$$(26)\qquad \dim G/K=0$$

である。(26)は(25)と矛盾するから，$\dim K<\dim G$ である。従

って帰納法の仮定がKに適用され，Kはリー群である。G/Kもリー群だから，リー群の拡大定理（岩澤[23]定理7，グリースン[14]（定理3.1））により，Gはリー群である。

(B)　Gの中心が連結部分群$C \neq \{e\}$を含むとき

このとき第一段からわかるように$\dim C \geq 1$である。Cは局所コンパクト，アーベル群だから一般化リー群である。一方Gの部分群として，Cは小さい部分群を持たないから，それ自身リー群である。従って$C \cong R^k \times T^{n-k}$で，Cはコンパクト・リー群$T^n$の被覆群である。従ってグリースン[14]定理4.2により，GのコンパクトD集合Dであって，標準写像$\varphi: G \to G/C$により，G/Cのある単位元近傍Eの上に同相に写されるものがある。そしてGは$C \times D$と同相な部分集合を含む。Cは多様体だから，$\dim (C \times D) = \dim C + \dim D$である。従って

$$\dim G \geq \dim (C \times D) > \dim D = \dim G/C$$

となる。後藤・山辺[19]により，剰余群G/Cは小さい部分群を持たない局所コンパクト群だから，帰納法の仮定により，G/Cはリー群である。Cもリー群だから，再びリー群の拡大定理により，Gはリー群である。

第三段　$n \geq 1$でGが連結でないとき

Gの単位元連結成分をG^*とする。第二段により，G^*はリー群である。一方G/G^*は完全不連結局所コンパクト群であるから，一般化

リー群である（ポントリャーギン[47] Ch. III §22 E1）。従って一般化リー群の拡大定理（グリースン[13] 定理4.7）により、G自身が一般化リー群である。Gは小さい部分群を持たないから、定義により、Gはリー群である開部分群 G_1 を含み、従ってG自身リー群である。

このグリースンの論文[15]は、局所ユークリッド群から小さい部分群を持たない局所コンパクト群へという視点の転換と、このような群に対し随伴表現に類似の有限次元表現σを構成するというアイディアが際立っている。また一径数部分群の接ベクトルに当るものを考えるために $L^2(G)$ に埋め込んで考えるという工夫や、その際の微分可能性を保証するためにリプシッツ条件を導入することや、それを位相群G内で定義するためにコンパクト対称集合の半群を構成するなど種々の独創的なアイディアを打出している。

岩澤論文[23]が、リー群、位相群に対する深い学識の上に立って書かれているのに対し、グリースンの論文[15]は、アイディアの勝利という印象が強い。

ともあれ、この二つの論文によって、第五問題の研究は大きく転換し、最終的解決も視野に入って来たのであった。

§3　モンゴメリ・ジピンの論文

「小さい部分群を持たない有限次元局所コンパクト群はリー群

である」というグリースンの定理は、リー群を位相群のカテゴリーの中で位相代数的に特徴付けて居り、第五問題の一つの解を与えていると言うことができる。

しかし1930年代以来、第五問題の標準的解釈とされてきた次の(V)および(V_0)は未解決であった。

(V) 有限次元・局所連結な局所コンパクト群はリー群であるか？

(V_0) 局所ユークリッド群（位相多様体である位相群）はリー群であるか？

これを解決したのがモンゴメリ・ジピンの論文「有限次元群の小さい部分群達」[42]であった。

[42]で扱う群は、有限次元の局所コンパクト群であって、可分距離群となるものである。便宜上このような群のクラスを、クラスMと呼ぶことにしよう。可分距離群であるという附加条件は、常に必要というわけではないが、モンゴメリのこれまでの論文では当時の次元論を適用するために常にこれを仮定していたので、ここでも仮定したのである。

前に岩澤の研究について述べた所の最後で、岩澤の予想(C_1)「任意の連結局所コンパクト群は(L)-群である」から直ちに(V)が導かれることを注意した。グリースンの予想(C)「任意の局所コンパクト群は、一般化リー群である」からも同様に(V)が導かれる。[42]でモンゴメリ・ジピンが示したことは、(C)または(C_1)そのものでなく、多少の附加条件がついた命題から附加条件のついた(V)が導かれるということであった。彼等は、次元に関する帰納法がうまく働くような群

のクラスとして、次の条件(I)をみたすクラスMの群Gを考え、それについて次の定理Aを証明した。

条件(I)　Gはクラス M の群(有限次元・局所コンパクト可分距離群)であって、連結かつ局所連結であり、Gと異なるすべての閉部分群は一般化リー群である。

定理A　群Gが条件(I)をみたすとき、Gの閉正規部分群Hであって一般化リー群であり、剰余群G/Hは条件(I)をみたしかつ小さい部分群を持たないようなものが存在する。

先づこの定理Aから導かれる結論をいくつか述べよう。

定理B　局所連結なクラスMの群はすべてリー群である。

証明　帰謬法。局所連結なクラスMの群であって、リー群でないものが存在したと仮定して矛盾を導く。そのような群の内で次元最低の連結群を一つとりGとする。後藤守邦の結果[16]を用いると、Gと異なるGのすべての閉部分群は、一般化リー群であり、Gは条件(I)をみたす。従って定理Aにより、Gの閉正規部分群Hで一般化リー群であるものが存在し、G/Hは(I)をみたしかつ小さい部分群を持たない。このときグリーソンの定理[15]により、G/Hはリー群、従って一般化リー群である。そこで一般化リー群の拡大定理([14]定理4.7)により、G自身も一般化リー群である。Gは連結だから(L)-群である。Gは有限次元かつ局所連結と仮定されているから、岩澤[23]の定理12により(L)-群Gはリー群である。これはGの仮定に反し矛盾である。これで定理Bは証明された。

これで可分距離群であるという附加条件の下に，(V)が証明されたわけである。[42]には書かれていないが，上の(V_0)の形の第五問題は，定理Bから導かれることを注意しておこう。

定理C．Gが局所ユークリッド位相群ならば，Gはリー群である。

証明　Gは局所ユークリッド群だから，有限次元かつ局所連結である。従ってGの単位元連結成分G_0は，Gの開部分群である。G_0は有限次元連結局所コンパクト群である。局所ユークリッド性からG_0は第一可算公理をみたすから，距離付け可能な位相群である（角谷[58]）。さらにG_0における単位元eの近傍$V=V^{-1}$であって，R^nと同相なものが存在する。G_0は連結だからVから生成され，$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}V^n$となる。V従って$V^n$は可分だから，$G_0$も可分である。従って$G_0$は定理Bの仮定をみたすので，リー群である。開部分群G_0がリー群だから，Gもリー群である。

さらに定理Aとグリースン[15]から直ちに次の系が得られる。

定理A系　条件(I)をみたす，クラスMの群Gはすべて一般化リー群である。

証明　定理Aにより，このときGの閉正規部分群HであってG/Hが小さい部分群を含まないものが存在する。G/Hは有限次元局所コンパクト群だから，グリースンの定理[15]によりG/Hはリー群である。仮定により，Hは一般化リー群だから一般化リー群の拡大定理([14]定理4.7)により，Gも一般化リー群である。▌

さらにモンゴメリー・ジピンは、条件(I)は不必要で、一般に次の定理Dが成立つことを証明している。

定理D（有限次元局所コンパクト群で可分距離群とする）クラスMの任意の群Gは、一般化リー群である。

証明　モンゴメリの論文「有限次元群」[34]には次の定理が証明されている。

定理（モンゴメリ[34]）Gをn次元局所コンパクト群とするとき、Gの単位元eの近傍U(e)であって、0次元コンパクト集合Zとn次元の連結かつ局所連結な局所群Lで、Gの正規部分群となるものの、位相的直積となるものが存在する。

これはポントリャーギンの有限次元コンパクト群に対する構造定理[46][47]および岩澤の(L)-群に対する構造定理[23]を、一般の有限次元局所コンパクト群に拡張したものである。ただしここでZは群であることは示されて居らず、その点で[47][23]より弱い結果に終っている。このモンゴメリの定理により、クラスMの群Gがn次元のとき、連結かつ局所連結なn次元局所コンパクト群Lと、LからGへの一対一連続準同型写像fが存在して、f(L)はGの単位元成分G_0の中で稠密になる。定理Bにより、Lおよびf(L)はリー群で、後藤の定理[16]によると$\overline{f(L)}=G_0$は一般化リー群である。Gは局所コンパクト群だから、開部分群Hであって、$H\supset G_0$かつH/G_0がコンパクトとなるものが存在する（グリースン[14]補助定理1.4）。そこで一般

化リー群の拡大定理（[14] 定理4.7）により，Hは一般化リー群である。従ってHを閉部分群とするGも一般化リー群である。■

この定理Dは，有限次元の可分距離群であるという附加条件の下で，グリーソンの予想(C)が成立つことを示している。

最後に定理Aの証明の大筋を述べておこう。定理Aの結論は，G/Hが条件(L)をみたすことと G/Hが小さい部分群を持たないことの二つである。この内前半は一つの点を除いては一般論から直ちに導かれる。いま位相群Gの閉正規部分群Hによる剰余群 G/Hを考える。クラスMと条件(L)を定義する諸性質の内有限次元性を除く他のすべての性質（局所コンパクト，可分，距離づけ可能，連結，局所連結，一般化リー群であること）は，Gで成立てば G/Hでも成立つ。またモンゴメリ[34]により，Hがアーベル群ならば，Gが有限次元のとき G/Hも有限次元となる。従って以下述べる三段階の還元により，定理Aの証明が次の定理1, 2, 3 の証明に帰着される。ここでの要点は G/Hが小さい部分群を持たないことを示す点にある。

第一段階では，Gの中心Zが{e}である場合に帰着させる。Zは局所コンパクト・アーベル群であるから，一般化リー群であり，あるコンパクト0次元部分群Z^*による剰余群 Z/Z^* はリー群となる。特にZ/Z^* は小さい部分群を持たない。従って G=Z のときは，H=Z として定理Aが成立つ。そこで以下G≠Zとする。今 G/Z^* は[34]により有限次元である。このとき G/Z^* の中心 Z_0 は小さい部分群を

持たないことが言えるから、グリースンの定理[15]により Z_0 は可換リー群である。$f: G \to G/Z^*$ を標準写像とする。Z_0 が離散群のときは、$(G/Z_*)/Z_0 \cong G/f^{-1}(Z_0)$ は中心が $\{e\}$ となる。Z_0 が離散群でないときは、その単位元連結成分を Z_1 とするとき $\dim Z_1 > 0$ である。そして局所的切断面の存在から $G_1 = (G/Z^*)/Z_1 \cong G/f^{-1}(Z_1)$ は、G/Z_* より低次元となることがわかる：

$$\dim G_1 = \dim G/Z_* + \dim Z_1 < \dim G/Z_*$$

そこで以上の操作を有限回繰返えすことにより、次の定理1が証明される。

定理1　G が条件(I)をみたすクラスMの群であるとき、G の閉正規部分群 H であって H は一般化リー群で剰余群 G/H は(I)をみたしかつ小さい部分群を持たないようなものが存在する。

以下定理1の G/H を改めて G と置く。このとき G は(I)をみたすクラスMの群で中心は $\{e\}$ である。この新しい群 G が小さい部分群を持たないことを言えばよい。それを次の定理2と定理3に分けて証明する。

定理2. G が(I)をみたすクラスMの群で中心が $\{e\}$ となるものとする。このとき正次元の G の部分群と可換であるようなコンパクト0次元無限群を、G は含まない。

定理の証明はかなり長く、ここで立入って紹介することはしないが、この定理2から次の三つの系が導かれる。

系 2.1　定理2の群Gは、コンパクト0次元無限可換群を含まない。

証明　なぜならば このような無限群AがGに含まれると仮定すると定理2に反するからである。実際このとき、Aはコンパクト無限群だから離散群ではない。

$e \neq x \in A$をとり、G_xをxの中心化群$C_G(x)$とすると、Aは可換だからG_xに含まれる。従ってG_xも離散ではない。モンゴメリ・ジピン[39]により、$\dim G_x = 0$ならばG_xは離散群となるから$\dim G_x > 0$である。従って正次元群G_xと可換なコンパクト0次元無限群AがGに含まれることになり、定理2に反し矛盾。▮

系 2.2　Gと異なる正次元のGの部分群Fはすべてリー群である。

証明　なぜならば条件(I)によりFは一般化リー群であり、局所的に$B \times R$の形になる。ここでBはコンパクト0次元群でRは局所リー群であり、BとRは可換である。$\dim R = \dim F > 0$だから、定理2によりBは有限群である。従ってFは局所リー群Rと局所同型な位相群だからリー群である。▮

系 2.3　定理2の群Gの任意の元xから生成される部分群$\langle x \rangle$の閉包$\overline{\langle x \rangle} = H$は、常にリー群である。

実際$G = H$ならば、Gはアーベル群で$H = G = Z = \{e\}$となり、Hは0次元リー群である。以下$H \neq G$とする。$\dim H > 0$ならば、系2.2によりHはリー群である。$\dim H = 0$のとき、$\dim G = 0$ならばGは一般化リー群で定理Aが成立つ。そこで以下$\dim G > 0$とする。

このとき $H \neq G$ だから条件(I)により Hは一般化リー群で、Hにおける e の開近傍Uは、$U = B \times R$ (B=コンパクト0次元群, R=局所リー群)となる。いま $0 = \dim H = \dim R$ だから Rは離散群でUを小さくとれば、$R = \{e\}$, $U = B$ となり、Hはコンパクト0次元アーベル群Bを開部分群に持つ。系2.1により Bは有限群であり、BとHは離散群だから0次元リー群である。∎

定理3. Gは条件(I)をみたすクラスMの群で、中心は$\{e\}$であるとする。このときGは小さい有限部分群を含まない。すなわちGにおけるeの近傍WでWに含まれる有限部分群は$\{e\}$だけであるようなものが存在する。

次の定理3系は、[42]では定理3の末尾に記されているが証明がついていない。ここでは別記して証明をつけた。

定理3系、定理3の群Gは、小さい部分群も持たない。

証明　定理3により、Gにおけるeの近傍Wで$\{e\}$以外の有限部分群を含まないものが存在する。また補助定理6.1によりeの近傍Vで$\{e\}$以外の連結リー部分群を含まないものが存在する。$U = V \cap W$はeの近傍で、$\{e\}$以外の有限群も、連結リー群も含まない。さらにUはコンパクトであるとしてよい。今Uに含まれる任意の部分群Hをとり、$H = \{e\}$であることを示そう。Hの閉包$\overline{H}$は、$\overline{H} \subset \overline{U} =$ 　だからコンパクト群である。$\dim \overline{H} > 0$ ならば系2.2により$\overline{H}$はリー群でUに含まれるから$\overline{H} = \{e\}$となり、

$\dim \bar{H} > 0$ に反し矛盾である。従って $\dim \bar{H} = 0$ であり，$\bar{H}$ はコンパクト 0 次元群である。$\bar{H}$ の任意の元 x を取り，x を含む G の最小閉部分群 $A = \overline{\langle x \rangle}$ を作る。A はコンパクト 0 次元アーベル群だから系 2.1 により有限群である。さらに $A \subset \bar{H} \subset U$ で U に含まれる有限群は $\{e\}$ のみであるから，$A = \{e\}$，$x = e$ である。そして x は $\bar{H}$ の任意の元だから $\bar{H} = H = \{e\}$ となる。これで定理 3 系は証明された。∎

定理 2.3 を用いて定理 3 系が証明されたが，さらにそれと定理 1 を組合せて定理 A が証明される。実際定理 1 の部分群 H をとると，G/H は条件 (I) をみたすクラス M の群で，中心は $\{e\}$ である。従って定理 3 系により，G/H は小さい部分群を持たない。これで定理 A が証明された。∎

§ 4　山辺の研究

モンゴメリ・ジピンの論文[42] によって「(V_0) 任意の局所ユークリッド群はリー群である。」という形での第五問題は解決した。しかし「(V) 任意の有限次元，局所連結な局所コンパクト群 G はリー群である」という命題は「G が可分距離群である」という附加条件の下でしか証明できなかった。この附加条件は，連結成分の個数が高々可算個のリー群では常に成立って居るので，特に強い限定条件では

ないが、それだけにそれは不必要ではないかとも考えられる。

またグリースンの予想「(C) 任意の局所コンパクト群は、一般化リー群である」に対しても、「有限次元かつ可分距離群である」という附加条件の下で (C) が成立つことを、[42] は証明したのであった。ここでもこの附加条件をつけない。元来の (C) が成立つかが問題になる。

また岩澤の予想「(C_2) 小さい正規部分群を持たない任意の連結局所コンパクト群はリー群である」は、有限次元という附加条件をつけ、さらに「小さい正規部分群を持たない」という仮定を強めて、「小さい部分群を持たない」としたとき成立つことがグリースンによって証明された。これに対しても元来の (C_2) が成立つかどうかが問題となる。

これらの残された問題を解き、第五問題を最終的に解決したのが、山辺英彦が1953年に発表した二つの論文 [55]「岩澤とグリースンの予想について」、[56]「グリースンの定理の拡張について」であった。山辺は、グリースンの方法を改良して次の二つの結果を得た。

定理A ([55]定理) 連結局所コンパクト群Gが、小さい正規部分群を持たなければ、Gは小さい部分群も持たない。

定理B ([56]定理2からの結論) 小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gの任意の一径数部分群はリプシッツの条件をみたし、そのグリースンの意味の接ベクトルの空間Lは常に有限次元である。

定理A.Bの証明については、後で説明する。定理Bでは、Lの近傍がGの近傍と同相になること（[56]定理2）から、ノルム空間が局所コンパクトならば有限次元であるというリースの定理[59]に帰着させるのである。

定理A.Bによって、上に述べた第五問題について残された問題が解決することを説明しよう。まづ次の定理3の証明に用いるマリツェフの定理を掲げる。（山辺では岩澤[23]のLemmaを挙げているが、このマリツェフの定理の方が直接的である。）

マリツェフの定理（[61], [20] Lemma 28）。Aが局所コンパクト群Gの連結可換閉正規部分群で、AおよびG/Aが共にリー群であるものとする。このとき $G'=G/A$ の任意の一径数部分群$g'(t)$に対し、Gの一径数部分群$g(t)$であって、標準準同型写像 $f: G \longrightarrow G/A$ により $f(g(t))=g'(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ となるものが存在する。

定理3（[56]）。小さい部分群を持たない連結局所コンパクト群Gはリー群である。

証明　任意の$g \in G$と、Gの一径数部分群 $x=x(r)$ に対し、$y=y(r)=g x(r) g^{-1}$ はまた一径数部分群である。x, y のeにおける接ベクトルを $\tau(x)$, $\tau(y)$ とすると、対応 $\Phi_g: \tau(x) \longmapsto \tau(y)$ は接ベクトル空間Lの一次変換である。そして $\Phi_{gh}=\Phi_g \cdot \Phi_h$ であるから、Φは群GのL上の線型表現である。そしてLemma 10によりΦは連続である。いま $\mathrm{Ker}\,\Phi=H$ とおくと、剰余群 G/H は局所コンパクト

群で，リー群 $GL(L)$ の中への一対一連続準同型写像を持つから，G/H はリー群である。（シュヴァレー［8］p.130）．．

以下 G がリー群であることを，次の (a)(b) の二つの場合に分けて証明する。

(a) H が完全不連結のとき

G の閉部分群 H は，局所コンパクトである。従って H が離散群でなければ，H は小さい部分群を持つことになるから，G も小さい部分群を持ち，仮定に反する。従って H は離散群であるから，G はリー群 G/H と局所同型で，またリー群である。

(b) H が完全不連結でないとき

このとき H の単位元成分 H_0 は，連結局所コンパクト群で二点以上を含む。そこでグリースンの結果（［15］定理2.6）により H_0 は自明でない一径数部分群 $\mathfrak{r}$ を含む。$H=\mathrm{Ker}\,\Phi$ だから，H の各元 h は $\mathfrak{r}$ と可換であり，$\mathfrak{r}$ は H の中心 Z_H に含まれる。このとき H/Z_H は完全不連結となる。なぜならばそうでないと仮定すれば，上のグリースンの定理により，H/Z_H は自明でない一径数部分群を含む。このとき上述のマリツェフの定理により，H は Z_H に含まれない一径数部分群を含むこととなり，上に述べたことに反し矛盾である。

いま H は小さい部分群を持たないから，H/Z_H も小さい部分群を持たない（倉西［25］Lemma 6）．従って完全不連結局所コンパクト群 H/Z_H は，離散群でなければならない。そこでリー群 $G/H \cong G/Z_H/H/Z_H$

は、G/Z_Hと局所同型であり、G/Z_Hはリー群である。一方Z_Hは局所コンパクト・アーベル群であるから、一般化リー群であり、かつ小さい部分群を持たないからリー群である。従ってリー群の拡大定理（[23]定理7、[14]定理3.1）により、Gはリー群である。▮

<u>定理4</u>　小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群はリー群である。

証明　これは定理Aと定理3から直ちに導かれる。

<u>定理5</u>　任意の局所コンパクト群は一般化リー群である。

証明　定理4は岩澤の予想（C_2）が正しいということであるから、岩澤の証明した（C_2）と（C_1）の同値性により、次の（C_1）が成立つ。

（C_1）　任意の連結局所コンパクト群は（L）-群である

そこで今任意の局所コンパクト群Gをとるとき、その単位元連結成分G_0は、連結（L）-群であり、従って一般化リー群でもある。剰余群G/G_0は完全不連結局所コンパクト群であるから、コンパクト開部分群を持つ。コンパクト群は一般化リー群だから、G/G_0は一般化リー群である。従って一般化リー群の拡大定理（[14]定理4.7）により、Gは一般化リー群である。▮

既に第1節の最後に述べたように、岩澤の予想（C_1）から、30年代以後第五問題の標準的解釈とされてきた（V）が導かれる。すなわち次の定理Cが成立つ。

定理C　任意の有限次元・局所連結の局所コンパクト群はリ

一群である。

こうして、山辺の二つの論文[55][56]によって、リー群自身に関する第五問題について、当時懸案となっていた問題はすべて肯定的に解決したのである。

次に[55][56]の実質的内容である定理A,Bの証明の大筋を述べよう。

以下Gを連結局所コンパクト群とし、UをGにおけるeのコンパクト近傍とする。いまグリースンのコンパクト対称集合の半群を次のように構成する。Nを自然数列$(0, 1, 2, \cdots)$の一つの部分列とし、集合列$(D_n)_{n\in N}$で次の(i)(ii)(iii)をみたすものを考える：(i) $D_n \to e\ (n \to \infty)$, ii) $D_n^n \subset U$, $D_n^{n+1} \not\subset U$ iii) $D_n = D_n^{-1}$で、D_nはコンパクト。(このような(D_n)が存在することはすぐ確められる。$0 \leqq i \leqq 2n$のとき、$D_n^i \subset D_n^{2n} = (D_n^n)^2 \subset U^2 =$コンパクトだから、$0 \leqq s \leqq 2$となる任意の有理数$s \in Q$に対し$(D_n^{[sn]})_{n\in N}$の適当な部分列をとったとき、極限$\lim D_n^{[sn]} = D(s)$が存在する。$0 \leqq r \leqq 2$となる任意の実数$r$に対して

(1)
$$E(r) = \bigcap_{s>r} D(s)$$
とおくとき、次の(2)が成立つ：

(2)
$$D(s_1)D(s_2) = D(s_1+s_2),\quad E(r_1)E(r_2) = E(r_1+r_2),\quad s_1, s_2 \in Q,\ r_1, r_2$$
$\in \mathbb{R}$で$s_1, s_2, r_1, r_2, s_1+s_2, r_1+r_2 \in [0, 2]$.

さらに$r_1 \in Q$のとき次の(3)が成立つ。

(3) $\quad E(r_1+r_2)=\bigcap_{\lambda>r_1+r_2} D(\lambda)=D(r_1)\bigcap_{\lambda>r_2} D(\lambda)=D(r_1)E(r_2)$

さらに $D(1)\cap\partial U\neq\phi$（$\partial U$はUの境界）であることから $D(1)\neq\{e\}$ であり、$D(\lambda)$, $E(r)$は自明でない半群である。さらに、$\partial D(1)=\phi$ ならば $D(1)^2=D(2)=D(1)$ で、$D(1)^{-1}=D(1)$ だから次の(4)が成立つ：

(4) $\quad \partial D(1)=\phi$ ならば $D(2)=D(1)$ はGの部分群である。

$\partial D(1)=\phi$ のとき、$\partial D'(1)\neq\phi$ となる半群 $(D'(\lambda))$ を作ることができる。

そこで以下Dの代りにD′をとって、$\partial D(1)\neq\phi$ と仮定する。

Lemma 1

コンパクト対称集合の半群 $D(\lambda)$, $E(r)$ は $\partial D(1)\neq\phi$ をみたすと仮定する。このとき $L^2(G)$ の点列 $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とGの点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で、次の(i)(ii)をみたすものが存在する。

i) $(n(x_n\theta_n-\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で、ある $\tau\neq0$ に弱収束するものが存在する。

ii) 十分大きなすべての n に対し、$\mathrm{supp}\,\theta_n\subset U$（初めに与えたeのコンパクト近傍）。（ここで $x,y\in G$, $\theta\in L^2(G)$ に対し $(x\theta)(y)=\theta(x^{-1}y)$ とする）。

証明　一点 $p\in\partial D(1)\neq\phi$ をとる。このとき $p_n\in D_n^n$ となる点列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で p に収束するものがある。$pE(\frac{1}{3})\in D(1)E(\frac{1}{3})=E(\frac{4}{3})$, $pE(\frac{1}{3})\in\partial E(\frac{3}{4})$, $E(\frac{1}{3})\cap\partial E(\frac{4}{3})=\phi$ から

(5) $\quad pE(\frac{1}{3})\cap E(\frac{1}{3})=\phi$

GはT_2空間で、$pE(\frac{1}{3})$, $E(\frac{1}{3})$は交わらないコンパクト集合だから、それらの開近傍で交わらないものがある。それはeの開近傍Wにより$pE(\frac{1}{3})W$, $E(\frac{1}{3})W$の形のものとしてよい。さらに位相群は正則空間だから、eの任意の近傍Wに対し$\overline{V}\subset W$となるeの近傍Vが存在する。従って(5)から次の(6)が成立つ。

(6) Gにおけるeの開近傍$X\subset U$であって、閉包$\overline{X}$はコンパクトで次の(7)をみたすものが存在する。

(7) $$pE(\tfrac{1}{3})\overline{X}\cap E(\tfrac{1}{3})\overline{X}=\phi, \qquad pE(\tfrac{1}{3})\overline{X}\subset U$$

このとき、十分大きいすべての$n\in\mathbb{N}$に対し、次の(8)が成立つ。

(8) $$p_n D_n^{[\frac{n}{3}]}X\cap D_n^{[\frac{n}{3}]}X=\phi, \qquad D_n^{[\frac{n}{3}]}X\subset U$$

今G上の連続函数θで次の(9)をみたすものを一つとる。

(9) $$0\leqq\theta\leqq 1, \qquad \mathrm{supp}\,\theta\subset X, \qquad \theta\neq 0.$$

いま各$n\in\mathbb{N}$に対し、G上の実数値函数Δ_n, θ_nを次のように定義する。

(10) $$\Delta_n(x)=\begin{cases} 3i/n, & x\in D_n^{i}-D_n^{i-1} \text{ のとき}, \ 1\leqq i\leqq[n/3] \\ 0, & x=e \text{ のとき} \\ 1, & x\notin D_n^{[n/3]} \text{ のとき}. \end{cases}$$

Δ_nは、次の三角不等式をみたす。

(11) $$\Delta_n(xy)\leqq\Delta_n(x)+\Delta_n(y)$$

また $$\Delta_n(x^{-1})=\Delta_n(x)$$

である。このΔ_nと(9)をみたす連続函数θを用いて、θ_nを次式で定義する：

(12) $$\theta_n(x)=\sup_{y\in G}\,(1-\Delta_n(y))\,\theta(y^{-1}x)$$

すぐわかるように

(13) $0 \leqq \theta(x) \leqq \theta_n(x) \leqq 1$, $\mathrm{supp}\,\theta_n \subset D_n^{[n/3]}X \subset UX$

である。θがG上一様連続であることと、$0 \leqq \Delta_n \leqq 1$ を用いて、θ_nが連続であることが直ちに確められる。

さらに、$(1-\Delta_n(y))\theta(y^{-1}x)$ の上半連続性，$0 \leqq \theta \leqq 1$，Δ_nの三角不等式などを用いて

(14) $$|\theta_n(x) - u\theta_n(x)| \leqq \Delta_n(u), \quad x, u \in G$$

が成立つ。$\mathrm{supp}\,\theta_n \subset U$ だから，ハール測度 m を適当に定数倍して $m(U) \leqq 1$ とすれば，L^2ノルムについて

(15) $$\|\theta_n - u\theta_n\| \leqq \Delta_n(u), \quad \|p_n\theta_n - \theta_n\| \leqq \Delta_n(p_n) \leqq 1$$

が成立つ。(15)から L^2 の有界点列 $(p_n\theta_n - \theta_n)_{n \in N}$ は弱コンパクトだから適当な部分列をとるとき，

(16) $$\text{weak}\lim\,(p_n\theta_n - \theta_n) = \chi \in L^2$$

が存在する。一方(8)により，$\mathrm{supp}(p_n\theta_n) \cap \mathrm{supp}\,\theta \subset p_n D_n^{[n/3]}X \cap X = \phi$ だから，(13)により

(17) $$(p_n\theta_n - \theta_n, \theta) = -(\theta_n, \theta) \leqq -\|\theta\|^2 < 0$$

となるから，ここで(16)の弱極限をとると，$(\chi, \theta) \leqq -\|\theta\|^2 < 0$ で特に $\chi \neq 0$ である。従って(16)の収束部分列の番号として現われる十分大きなすべてのnに対して

(18) $$(p_n\theta_n - \theta_n, \chi) > 0$$

となる。$p_n \in D_n^n$ であるから

(19) $\quad p_n = x_{n1}\cdot x_{n2}\cdots\cdots x_{nn}\ ,\ x_{ni}\in D_n$

と表わされる。今 $g_n(j)=x_{n1}\cdot x_{n2}\cdots x_{nj}$, $g_n(0)=e$ と置く。このとき

(20) $$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\ \chi)\leqq\sum_{j=0}^{n-1}(g_n(j)(x_{nj+1}\theta_n-\theta_n),\chi)$$

である。右辺の n 個の項の内最大のものを一つとり、

(21) $$\Phi_n=(g_n(j_0)(x_{nj_0+1}\theta_n-\theta_n),\ \chi),\quad x_{n,j_0+1}=x(n)$$

とおく。このとき、$x\in G$ に対し $\|x\varphi\|=\|\varphi\|$, $x(n)\in D_n$ だから

(22) $$\|ng_n(j_0)(x(n)\theta_n-\theta_n)\|=\|n(x(n)\theta_n-\theta_n)\|\leqq n\Delta_n(x(n))=3$$

従って有界点列 $(a_n)=(ng_n(j_0)(x(n(\theta_n-\theta_n))$ のある部分列は τ' に弱収束する。(20)から

(23) $$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\chi)\leqq n\Phi_n=(a_n,\chi)$$

だから、ここで部分列の極限をとれば

(24) $$(\tau',\chi)\geqq\|\chi\|^2>0,\quad 特\ \tau'\neq 0$$

を得る。$g_n(j_0)\in D_n^n\subset U=$ コンパクトだから、$(g_n(j_0))_n$ の部分列である $g\in G$ に収束するものがある。このとき任意の $\varphi\in L^2$ に対して

(25) $$\begin{aligned}(g^{-1}\tau',g^{-1}\varphi)=(\tau',\varphi)&=\lim(ng_n(j_0)(x(n)\theta_n-\theta_n),\varphi)\\&=\lim(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ g_n(j_0)^{-1}\varphi)\\&=\lim(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ g^{-1}\varphi)\end{aligned}$$

となる。従って L^2 の点列 $(n(x(n)\theta_n-\theta_n))_n$ は、$g^{-1}\tau'=\tau\neq 0$ に弱収束する。(13)と(25)により、Lemma 1 は証明された。∎

以下 G は、小さい正規部分群を持たない連結局所コンパクト群とする。

角谷・小平[60]により、任意の局所コンパクト群Gに対し、閉正規部分群Nが存在して、G/Nは第一可算公理をみたす。Nはいくらでも小さくとれる。いま考えているGは小さい正規部分群を持たないから、$N=\{e\}$であり、G自身第一可算公理をみたす。そこでGの単位元eの近傍の基底としてコンパクト近傍の可算系$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$が存在する。(V_n)は減少列$(V_n\supset V_{n+1})$としてよい。このとき次のように定義する。$x\in G$から生成されるGの部分群を$\langle x\rangle$とし、各$n\in\mathbb{N}$に対し

(26) $$S_n=\{x\in G \mid \langle x\rangle\subset V_n\},\quad T_n=\overline{\langle S_n\rangle}$$

とおく。T_nはS_nを含む最小の閉部分群である。

Lemma 2　このとき、十分大きなnに対して、T_nはコンパクトである。

証明. 「eの任意の近傍Vに対して、十分大きなnをとると$T_n\subset V$となる」ことを言えばよい。特にVがコンパクトにとればT_nはコンパクトとなる。

今この「　」内の命題が成立たぬと仮定して矛盾を導く。このとき各$m\in\mathbb{N}$に対して、$n(m)\in\mathbb{N}$が存在して、

(27) $$S_m^{n(m)}\subset V,\quad S_m^{n(m)+1}\not\subset V$$

となる。そこで最初のコンパクト対称集合D_nとして、$D_m=S_m$をとって半群$D(\lambda)$を作る。

前と同様　$\exists D(1)\neq\phi$としてよい。次の実数Γ_nを考える。

(28) $$\Gamma_n=(x(n)^n\theta_n-\theta_n,\ \tau)=\left(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x(n)^{-k}\tau\right)$$
$$=(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\tau)+\left(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x(n)^{-k}-e)\tau\right)$$

$x(n)\in D_n\to e\ (n\to\infty)$ であるから、任意の整数 k に対し、$(x(n)^k-e)\tau\to 0$ $(n\to\infty)$ である。従ってある $n_1\in N$ が存在して、

(29) $$\|(x(n)^k-e)\tau\|\leqq\frac{1}{6}\|\tau\|^2\qquad(\forall n\geqq n_1)$$

となる。また $(n(x(n)\theta_n-\theta_n))$ は τ に弱収束するから、ある $n_2\in N$ が存在して

(30) $$(n(x(n)\theta_n-\theta_n),\tau)\geqq\frac{3}{4}\|\tau\|^2,\qquad(\forall n\geqq n_2)$$

となる。また (29) と $\|\theta_n\|\leqq 1$ （$0\leqq\theta_n\leqq 1$ (13) と $\mathrm{supp}\,\theta_n\subset U$, $m(U)\leqq 1$ から導かれる）により、

(31) $$\Gamma_n=(\theta_n,(x(n)^{-n}-e)\tau)\leqq\|\theta_n\|\cdot\|(x(n)^{-n}-e)\tau\|\leqq\frac{1}{6}\|\tau\|^2$$

である。一方 (28) 左辺からは (22)(30), (29) により

(32) $$\begin{aligned}\Gamma_n&=(n(x(n)\theta_n-\theta_n,\tau)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n(x(n)\theta_n-\theta_n),(x(n)^{-k}-e)\tau)\\&\geqq\frac{3}{4}\|\tau\|^2-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\|n(x(n)\theta_n-\theta_n\|-\|(x(n)^{-k}-e)\tau\|\\&\geqq\frac{3}{4}\|\tau\|^2-\frac{n-1}{n}3\cdot\frac{1}{6}\|\tau\|^2>\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\|\tau\|^2=\frac{1}{4}\|\tau\|^2\end{aligned}$$

(31)と(32)は明らかに矛盾する。従って帰謬法により Lemma 2 が証明された。∎

以上の準備の下で定理Aが証明される。

定理A　連結局所コンパクト群コンパクト群 G が小さい正規部分群を持たないとき、G は小さい部分群を持たない。

定理Aの証明（山辺[5J]）Lemma 2 により、ある自然数 n_0 に対し、(26)で定義された部分群 T_{n_0} はコンパクトとなる。

コンパクト群の構造定理により、T_{n_0} は完全不連結なコンパクト

部分群 N と局所リー群 R の直積となる。すなわち G における e の近傍 $V(\subset V_{x_0})$ を適当にとれば

(33) $$T_{x_0} \cap V = N \times R$$

となる。いま $W^2 \subset V$ となる e の近傍 W をとる。$f(a,x)=axa^{-1}$ は連続で $f(e,x)=x$ だから、各 $x \in G$ に対し、e の対称開近傍 V_x が存在して

(34) $$f(V_x, x) \in W, \quad V_x^3 \subset W$$

となる。$(xV_x)_{x\in N}$ はコンパクト集合 N の開被覆だから、有限個の点 $x_1, \cdots, x_n \in N$ が存在して、$\bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i} \supset N$ となる。$\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} = U_2 = U_2^{-1}$ は、e の開近傍であり、(34) より

(35) 任意の $a \in U_2$ に対し、$a x_i a^{-1} = f(a, x_i) \in f(V_{x_i}, x_i) \in W$

となる。また任意の $x \in N$ をとると、$x = x_i v_i$, $v_i \in V_{x_i}$ の形になる。そして

(36) 任意の $a \in U_2$ に対し、$a v_i a^{-1} = f(a, v_i) \in f(V_{x_i}, V_{x_j}) \subset V_{x_j}^3 \subset W$

となる。(35)(36) から、任意の $a \in U_2$, $x \in N$ に対し、$axa^{-1} = ax_ja^{-1} \cdot av_ia^{-1} \in W^2 \subset V \subset V_{x_0}$ となる。従って次の (37) が成立つ:

(37) 任意の $a \in U_2$ に対し、$aNa^{-1} \subset V \subset V_{x_0}$

次に山辺は、

(38) 任意の $a \in U_2$ に対し $aNa^{-1} \subset T_{x_0}$, $aNa^{-1} \subset T_{x_0} \cap V = N \times R$

であると述べているが、T_{x_0} は部分群であって正規部分群とは限らないから、その理由がわからない。今この点を保留して、先へ進もう。

今 $N\times R$ から第二因子への射影を φ とする：$\varphi(n,r)=r$. このとき、$\varphi(aNa^{-1})$ は R の部分群だから、仮定により $\varphi(aNa^{-1})=\{e\}$ となる。従って

(39) $aNa^{-1}\subset N \quad (\forall a\in U_2)$

が成立つ。G は連結群だから、対称近傍 U_2 により生成される。従って G の任意の元 g は、U_2 の元の有限個の積となるから、(39) から次の (40) が成立つ。

(40) $gNg^{-1}\subset N \quad (\forall g\in G)$ で、N は G の正規部分群で、$N\subset V$.

V は単位元の近傍で、いくらでも小さくとることができる。いま帰謬法により定理A を証明するために、次の (41) を証明しよう。

(41) G が小さい部分群を含むと仮定すれば、$N\neq\{e\}$ で、G は小さい正規部分群を含む。

(41)の証明. G が小さい部分群を含むとすれば、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し、e の近傍 V_n は、部分群 $H_n\neq\{e\}$ を含む。今 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は、e の近傍の基底だから、e の近傍 V に対し

(42) $\exists n_1\in\mathbb{N},\ V_{n_1}\subset V$

となる。そこで $n_2=\max(n_0,n_1)$ とおくと

(43) $V_{n_2}\subset V_{n_0}\cap V_{n_1},\quad S_{n_2}\subset S_{n_0}\subset T_{n_0},\ S_{n_0}\subset T_{n_0}\cap V=N\times R$

である。V_{n_2} は部分群 $H\neq\{e\}$ を含むから、$e\neq x\in H$ をとり、$x=(n,r)$, $(n\in N, r\in R)$ とすると、任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対し、$x^k=(n^k,r^k)$ であり、R は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから、$r=e$, $x\in N$ となる。従って

$N \neq \{e\}$となる。そこで(40)により、eの近傍Vは$\{e\}$以外の正規部分群Nを含むことになる。Vはいくらでも小さくとれるから、Gは小さい正規部分群を含む。これで(41)が証明された。(41)は定理Aの対偶であるから、これで定理Aが証明された。∎

上の証明では(38)の証明を保留したので、その点不完全である。しかし(38)の成立するかどうかに拘らず、定理Aは正しい。それを示すために、定理Aを拡張した、次のグルシュコフの定理[20](定理4)を述べておく。

グルシュコフの定理

局所コンパクト群Gの単位元連結成分をG_0とし、G/G_0はコンパクトと仮定する。このときGの単位元eの任意の近傍Uは、Gのコンパクト正規部分群AでG/Aは小さい部分群を含まないようなものを含む。

証明. Gにおけるeの任意近傍Uに対し、Uに含まれるコンパクト正規部分群Bであって、G/Bは第二可算公理をみたすものが存在する([20]定理3系1)。従って$G \supset A \supset B$となるコンパクト正規部分群Aに対し、$G/A \cong G/B/A/B$だからGの代りにG/Bを考えれば、始めからGは第二可算公理をみたすとしてよい。

Gにおけるeのコンパクト対称近傍$U = U^{-1}$を考える。このときGのコンパクト部分群$B \subset U$と、Gにおけるeの近傍$V \subset U$であって、Vに含まれるGの部分群はすべてBに含まれるようなものが存在する([20] Lemma 12)。必要があればVをさらに小さい近傍と取り換えることにより、Vは次の

(44)をみたすとしてよい。

(44) Vはeの開近傍で、$V \cap B = N \times R$(直積)の形であり、Nはコンパクト群、Rは局所リー群で$\{e\}$以外の部分群を含まない

このとき、(37)により次の(45)が成立つ。

(45) eの対称近傍U_2が存在して、$aNa^{-1} \subset V$ $(\forall a \in U_2)$

aNa^{-1}はVに含まれる部分群だから、Bに含まれる: 従って

$$aNa^{-1} \subset V \cap B = N \times R \quad (\forall a \in U_2)$$

となる。Rが$\{e\}$以外の部分群を含まないことから、上式より

(46) $\qquad aNa^{-1} \subset N \quad (\forall a \in U_2) \qquad$ となる

そこでNの正規化群を $M = N_G(N)$ とするとき、$M \supset U_2 = U_2^{-1}$ である。従って

(47) MはGの開部分群であり、G/Mは離散群である。

一方、開部分群Mは単位元成分G_0を含むから、仮定G/G_0=コンパクトより

(48) $\qquad G/M$はコンパクト群である。

従って、(47)(48)から、G/Mは有限群である。そこで

(49) 有限個の元$g_1, \cdots g_m \in G$が存在して、$G = \bigcup_{i=1}^{m} g_i M$となる。

上で(46)を導いたと同じ理由で、次の(50)が成立つ。

(50) Vに含まれる任意の部分群は$V \cap B = N \times R$に含まれ、従って$V \cap N$に含まれる。このことから次の(51)が成立つ。

(51) 群M/Nにおけるeの近傍$V' = (V \cap M)N/N$は$\{e\}$以外の部分群を含まない。

すなわち

(52)　群 M/N は小さい部分群を含まない。

いま次のように定義する。

(53)　$M_i = g_i M g_i^{-1}$, $N_i = g_i N g_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq m)$. $S = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$, $A = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$

M, M_i は G の閉部分群，N, N_i は G のコンパクト部分群だから。

(54)　S は G の閉部分群。A は G のコンパクト部分群である。

N は M の正規部分群だから

(55)　N_i は M_i の正規部分群である $(1 \leq i \leq m)$.

そして (52) から。

(56)　M_i/N_i は小さい部分群を持たない $(1 \leq i \leq m)$ から直積 $\prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ も小さい部分群を持たない。

いま写像 $\varphi : S/A \to \prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ を

$$\varphi(sA) = (sN_1, \cdots, sN_m)$$

によって定義するとき，すぐわかるように

(57)　φ は S/A から $\prod_{i=1}^{m} M_i/N_i$ の中への一対一連続準同型写像である。

さて (56) (57) から

(58)　S/A は小さい部分群を持たない。

(54) により S/A は G/A の閉部分群であるから，(58) により G/A は小さい部分群を持たない。これでグルシュコフの定理が証明された。∎

定理 A の証明（グルシュコフの定理による）

今 G を連結局所コンパクト群とする。このとき $G_0 = G$ だから，グルシュコ

フの定理が適用される。従ってGにおけるeの近傍Uに含まれるコンパクト正規部分群Aが存在して、G/Aは小さい部分群を持たない。いまGが小さい正規部分群を持たないとすれば、$A=\{e\}$であって、G自身が小さい部分群を持たない。∎

次に[56]における定理Bの証明に移る。定理Bは二つの部分から成る。それを今定理B1, B2としよう。

定理 B1　小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gの任意の一径数部分群はリプシッツの条件をみたす。

定理 B2　小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gのグリーソンの意味の接ベクトル空間は常に有限次元である。

[56]では、定理B1はLemma 4で証明され、定理B2は定理2とそれに続く部分で証明されている。

以下ではGを常に連結局所コンパクト群で小さい部分群を持たないとする。

定理 1. V_0をこのような群Gの単位元eのコンパクト対称近傍で、$\{e\}$以外の部分群を持たないものとする。このときGにおけるeのコンパクト対称近傍V_1で、$x, y \in V_1$, $x^2 = y^2$ ならば $x = y$ となるものが存在する。

証明　Xをeの近傍で$X^2 \subset V_0$となるものとし、eのコンパクト対称近傍V_1を十分小さくとり、次の(59)をみたすようにする：

(59)　$$V_1 (c^{-1} V_1 c) \subset X \qquad (^\forall c \in V_0)$$

いま，$x, y \in V_1$，$x^2 = y^2$ とし，$x^{-1}y = a$ とおく。このとき $a \in V_1^2 \subset X \subset V_0$ であり，また

$$x^{-1}a^{-1}x = x^{-1}y^{-1}x \cdot x = x^{-1}y \cdot y^{-2}x^2 = x^{-1}y = a$$

である。従って任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$x^{-1}a^{-m}x = a^m, \qquad a^{2m} = x^{-1}a^{-m}xa^m$$

となる。いま自然数 $n \geqq 1$ に対して $\mathbb{N} \ni m \leqq n$ となるすべての m に対し，$a^m \in V_0$ とすれば (59) により，$a^{2m} = x^{-1} \cdot a^{-m}x a^m \in V_1 \cdot a^{-m} \cdot V_1 a^m \subset X \subset V_0$ となり，従って $a^{2m+1} \in X^2 \subset V_0$ となる。従ってすべての $m \leqq 2n$ に対し，$a^m \in V_0$ である。そこで n に関する帰納法により，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し $a^m \in V_0$ となる。$V_0 = V_0^{-1}$ だから，$\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \subset V_0$ となる。V_0 に含まれる部分群は $\{e\}$ のみだから，$a = e$，$x = y$ となる。▮

以下定理1の近傍 V_0, V_1 を一つ固定しておく。各 $\alpha \in \mathbb{N}$ に対し

(60) $$Q_\alpha = \{x \in G \mid x, x^2, \cdots, x^\alpha \in V_1\}$$

とし，$n(\alpha) \in \mathbb{N}$ を

(61) $$Q_\alpha^{n(\alpha)} \subset V_1, \quad Q_\alpha^{n(\alpha)+1} \not\subset V_1$$

となるような正整数とする。$V_1 = V_1^{-1}$ は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから，このような $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ が存在する。$n = n(\alpha)$ として，$D_n = Q_\alpha$ とおくと，$D_n^n \subset V_1$，$D_n^{n+1} \not\subset V_1$ だから，各 $s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ に対し，$D(s) = \lim_{n \to \infty} D_n^{[sn]}$ が存在し，$\forall r \in \mathbb{R}$ に対して $E(r) = \bigcap_{s > r} D(s)$ とおくと，コンパクト対称集合のブリースン半群 $D(s)$，$E(r)$ が得られる。

前に [55] の解説で述べたように $L^2(G)$ の点列 $(n(x(n)\theta_n - \theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$

は、ある$\tau\neq 0$に弱収束する。このとき次のことが成立つ([56] P.357)
(以下述べる補助定理1, 2, 3は[56]の原文の中で証明されているが、命題番号がつけられていない命題に対し、便宜上このように番号をつけたものである。)

補助定理1 ある十分小さい$\gamma>0$が存在して、$k\leqq\gamma n$をみたす任意の正整数kに対し、次の(62)が成立つ：

(62) $$\|(x(n)^k-e)\tau\|\leqq\frac{1}{6}\|\tau\|^2$$

証明 このような$\gamma>0$が存在しないと仮定して矛盾を導く。この仮定から、このときGの点列$(y(n))$と、自然数列$(k(n))$であって、次の(63)をみたすものが存在する。

(63) $$y(n)\in D_n,\quad y(n)^{k(n)}\notin V'=e\text{のある近傍},\quad \frac{k(n)}{n}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).$$

$k(n)<n$ $(\forall n\geqq n_0)$ だから$n\geqq n_0$のとき$y(n)^{k(n)}\in D_n^n\subset V_1=$コンパクトだから適当な部分列をとれば、$y(n)^{k(n)}\longrightarrow\bar{y}\ (n\to\infty)$となる。
$\bar{y}\in\overline{V_1}=V_1\subset V_0$である。$y(n)^{k(n)}\notin V'$だから

(64) $$\bar{y}\neq e$$

である。一方任意の$l\in\mathbb{Z}$に対して$\frac{lk(n)}{n}\to 0\ (n\to\infty)$だから、十分大きなすべての$n$に対し、$lk(n)<n$で、$y(n)^{lk(n)}\in D_n^n\subset V_1\subset V_0$となるので、$\bar{y}^l\in V_0\ (\forall l\in\mathbb{Z})$となるから、$V_0$が$\{e\}$以外の部分群を含まないことから

(65) $$\bar{y}=e$$

となる。(64)と(65)は矛盾する。これで上の補助定理は証明された。∎

Lemma 3 $n(\alpha)$を、$Q^{n(\alpha)}\subset V_1$となる最大の整数とするとき、定

整数 $k>0$ が存在して、十分大きなすべての α に対し、次の(66)が成立つ：

(66) $\quad k\cdot u(\alpha) \geqq \alpha \qquad (\forall \alpha \geqq \alpha_0)$

証明　前に[55]の Lemma 2 の証明の中でも用いた次の量 Γ_n を考える：ここで γ は上の補助定理に現われる正数である。

(67) $\quad \Gamma_n = (x(n)^{[\gamma n]}\theta_n - \theta_n, \tau)$

$$= \frac{[\gamma n]}{n}(n(x(n)\theta_n - \theta_n), \tau) + \frac{[\gamma n]}{n}\left(n(x(n)\theta_n - \theta_n), \frac{1}{[\gamma n]}\sum_{k=1}^{[\gamma n]}(x(n)^{-k} - e)\tau\right)$$

右辺第一項 $\to \gamma\|\tau\|^2$ $(n\to\infty)$ である。また右辺第二項の上極限 $\leqq \gamma \overline{\lim}$ $\|n(x(n)\theta_n - \theta_n)\|\cdot\|(x(n)^{-k} - e)\tau\| \leqq \gamma\cdot 3\cdot\frac{1}{6}\|\tau\|^2 = \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2$ となる。

((15) および (62) による)。従って

(68) $\quad \underline{\lim}\,\Gamma_n \geqq \gamma\|\tau\|^2 - \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2 = \frac{\gamma}{2}\|\tau\|^2 > 0$

である。一方 $\gamma<1$, $x(n)^{[\gamma n]} \in D_n^n \subset V_1$ だから、点列 $(x(n)^{[\gamma n]})$ の適当な部分列は、ある $\bar{x} \in V_1$ に収束する。もし $\bar{x} = e$ ならば、Γ_n の定義式 (67) 左辺により

(69) $\quad \lim_{n\to\infty}\Gamma_n = (\theta - \theta, \tau) = 0$

となり、(68) と矛盾する。従って

(70) $\quad \bar{x} \neq e$

である。$\bar{x} \in V_1 \subset V_0$ だから

(71) $\quad$ ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $\bar{x}^k \notin V$ となる。

なぜならこのような $k \in \mathbb{N}$ が存在せず、$\bar{x}^k \in V_1$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ なら、V_0 に含まれる部分群が $\{e\}$ のみだから、$\bar{x} = e$ となり、(70) に反する。

(72) $$\overline{x}^{h} = \lim_{n\to\infty} x(n)^{h[\gamma n]}$$

だから (71)(72) から、ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して、

(73) すべての $n\geq n_0$ に対し、$x(n)^{h[\gamma n]}\notin V_1$

となる。$x(n)\in D_n = Q_\alpha$ なので $x(n), x(n)^2, \cdots, x(n)^\alpha \in V_1$ だから

(74) $$h[\gamma n] > \alpha$$

となる。そこで $k=1+[h\gamma]$ とおけば $k\in\mathbb{N}$ で、$n=n(\alpha)$ に対し

$$kn(\alpha) = (1+[h\gamma])n \geq h\gamma n \geq \alpha$$

となる。これで Lemma 3 が証明された。■

定理 B1 の証明([56] Lemma 4)。$x(\gamma)\in V_1$ $(0\leq {}^\forall\gamma\leq 1)$ となる G の一径数部分群 $x(\gamma)$ をとる。

今、任意の $\gamma\in[0,1]$ に収束する有理数列 $\left(\frac{l(\alpha)}{\alpha}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ $(\alpha, l(\alpha)\in\mathbb{N})$ をとる。$\frac{l(\alpha)}{\alpha}\in[0,1]$ としてよい。このとき Lemma 3 により $kn(\alpha)\geq\alpha$ だから

$$x(\gamma)=\lim_{\alpha\to\infty} x\left(\frac{l(\alpha)}{\alpha}\right) \in \lim D_n^{l(\alpha)} = \lim D_n^{\frac{l(\alpha)}{\alpha}\cdot\alpha}$$
$$\subset \lim D_n^{\left[\frac{l(\alpha)}{\alpha}\cdot kn\right]} = E(k\gamma)$$

となり、$x(\gamma)$ は $E(\gamma)$ に関し、リプシッツ条件をみたす。■

上の Lemma 3 の証明に登場した量 T_n は、[55] でも用いられ、重要な役割を果していた。この T_n をとり出したことが山辺の研究 [55] [56] を成功させた技術的基盤の一つとなっている。

次に定理 B2 の証明の要点を述べよう。グリースンの所で述べたことは省略し、山辺の方法の特色を強調する。山辺においても、G の接ベク

トルの空間の作り方は、本質的にはグリースンの方法と一致する。しかしグリースンは G の（リプシッツ条件をみたす）一径数部分群 γ に対し、その e における接ベクトル Z_γ を定義した。これに対して、山辺は G における e の近傍 V_1 の点 x で一径数部分群 $x(\nu)$ 上にあり、$x(1)=x$ となるものに対し、$x(\nu)$ の上における接ベクトルを、x の函数としてとらえて $\tau(x)$ と記す。そして $x \longrightarrow \tau(x)$ という写像が同相写像であることを示し、G の局所コンパクト性から、接ベクトル空間 L も局所コンパクトであることを示し、リースの定理 [59] により、L が有限次元であることを示したのである。

もう少し正確に述べると接ベクトル $\tau(x)$ の定義は次の通りである。点 $x \in V_1$ が一径数部分群 $x(\nu)$ 上にあるとする。このとき V_1 の点列 (x_n) と自然数列 $(\nu(n))$ が $x_n, x_n^2, \ldots, x_n^{\nu(n)} \in V_1$ でかつ $\lim_{n\to\infty} x_n^{\nu(n)} = x$ であるとき、弱極限

(75) $$w\text{-}\lim_{n\to\infty} \nu(n)(x_n\theta_n - \theta_n) = \tau(x)$$

が存在すれば、これを x に対応する<u>接ベクトル</u>という。この接ベクトル $\tau(x)$ は、点列 (x_n) と自然数列 $(\nu(n))$ によって定義されるが、実は「接ベクトル $\tau(x)$ は x のみで定まる」。すなわち、二つの点列 (x_n) と (y_n) および二つの自然数列 $(\nu(n))$ と $(\rho(n))$ があり

$$w\text{-}\lim \nu(n)(x_n\theta_n - \theta_n) = \tau, \quad w\text{-}\lim \rho(n)(y_n\theta_n - \theta_n) = \tau'$$

が存在するとき、$\tau = \tau'$ である (Lemma 6)。

さらに $\|\theta_n\| \leqq 1$ だから、

点列 (θ_n) の適当な部分列は，ある $\vartheta\in L^2$ に弱収束する。そこで以下この部分列を考え $\theta_n\to\vartheta\ (n\to\infty)$ とする。このとき強収束の意味で

(76) $$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(x(r)\vartheta-\vartheta)=\tau(x)$$

となる。(Lemma 7)。このことから，山辺の接ベクトル $\tau(x)$ は，グリースンのものと一致することがわかる。

Lemma 7 系 $\|x\vartheta-\vartheta\|\leqq\|n(x(\frac{1}{n})\vartheta-\vartheta)\|$ が成立つ。特に $\tau\neq e$ ならば $\tau(x)\neq 0$ である。

証明 $\|x\vartheta-\vartheta\|\leqq\|n(\tau\frac{1}{n})\vartheta-\vartheta)\|$ で $n\to\infty$ として前半が得られる。この不等式から，$\tau(\tau)=0$ ならば $x\vartheta=\vartheta$ である。(17) により $(\theta_n,\theta)\geqq\|\theta\|^2>0$ で $n\to\infty$ として，$(\vartheta,\theta)\geqq\|\theta\|^2>0$ だから特に $\vartheta\neq 0$ である。また (13) により $\mathrm{supp}\,\theta_n\subset D_n^{[n/3]}X\subset V$ である。$V\subset V_1^2$ としてよいから

(77) $x\notin V_1^2$ ならば $\vartheta(x)=0$ である。

さらに次の (78) が成立つ：

(78) $g\notin V_1^4$ ならば $\mathrm{supp}(g\vartheta)\cap\mathrm{supp}\,\vartheta=\phi$ 特に $g\vartheta\neq\vartheta$.

実際 $\mathrm{supp}(g\vartheta)\cap\mathrm{supp}\,\vartheta\ni x$ が存在すれば，$x=gv=w$, $v,w\in\mathrm{supp}\,\vartheta\subset V_1^2$ となる。従って $g=wv^{-1}\in V^2V^{-2}=V^4$ となる。対偶をとれば，$g\notin V^4$ ならば $\mathrm{supp}(g\vartheta)\cap\mathrm{supp}\,\vartheta=\phi$ となる。従って特に $g\vartheta\neq\vartheta$ である。

そこで $x\vartheta=\vartheta$ から任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し $x^n\vartheta=\vartheta$ であり，従って

(79) $\langle x\rangle=\{x^n\mid n\in\mathbb{Z}\}\subset V_1^4\subset V$。

となる。U_0に含まれる部分群は$\{e\}$のみだから，(79)から$x=e$が導かれる。これで$\tau(x)=0$または$x=e$が証明された。その対偶が後半である。▮

補助定理2　$r\in\mathbb{R}$に対し$x(r)$が定義されるとき，$\tau(x(r))=r\tau(x)$が成立つ。

証明　$x(1)=x$である。今$y(t)=x(rt)$とおくと，$y=y(1)=x(r)$である。$u=rt$とおくと　$t\to 0\Leftrightarrow u\to 0$である。(76)により次の等式が成立つ。

$$\tau(x(r))=\tau(y)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(y(t)\mathscr{l}-\mathscr{l})=\lim_{u\to 0}\frac{r}{u}(x(u)\mathscr{l}-\mathscr{l})=r\tau(x).\ ▮$$

一径数部分群$x(r)$が，任意の$r\in[0,1]$に対し，$x(r)\in V_1$となることを，$x(r)\prec V_1$と記すことにする。

Lemma 8　$x(r)\prec V_1$ならば$\|\tau(x)\|\leqq 3k$　(kはLem. 3の定数)

証明　任意の$\alpha\in\mathbb{N}$に対し，$x(\frac{1}{\alpha})\in Q_\alpha=D_n$であるから$\Delta_n(x(\frac{1}{\alpha}))=\frac{3}{n}$
$=\frac{3}{n(\alpha)}$である。ここで$n=n(\alpha)$は，$Q_\alpha^{n(\alpha)}\subset V_1$となる最大の整数である。
(15)とLem 3の$kn(\alpha)\geqq\alpha$により

$$\|\alpha(x(\tfrac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n\|\leqq\alpha\Delta_n(x(\tfrac{1}{\alpha}))\leqq\frac{3\alpha}{n(\alpha)}\leqq 3k \tag{80}$$

となる。いま$\alpha\to\infty$のとき$\alpha(x(\frac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n)$は，$\tau(x)$に弱収束するから，

$$\|\tau(x)\|\leqq\varliminf_{\alpha\to\infty}\|\alpha(x(\tfrac{1}{\alpha})\theta_n-\theta_n)\|\leqq 3k$$

が成立つ。▮

Lemma 8系　$x(r)\prec V_1$のとき　$\lim_{r\to 0}\tau(x(r))=0$.

証明　補助定理2から　$\tau(x(r))=r\tau(x)$である。Lem. 8により

$$\|\tau(x(r))\| = |r|\,\|\tau(x)\| \leqq r\cdot 3k$$

だから、$r \to 0$ のとき $\|\tau(x(r))\| \to 0$ となる。∎

以下山辺は、次の四つの命題を証明する。ここでは結果だけを掲げる。

Lemma 9. 任意の正数 ε に対し e のコンパクトな近傍 W_ε が存在して次の(81)が成立つ。

(81) $x \in W_\varepsilon$ かつ $x(r) \prec V_1$ ならば、$\|\tau(x)\| \leqq \varepsilon$ である。

Lemma 10. 定数 $\gamma > 0$ が存在して、任意の $g \in V_1$ に対し $\tau(x)$、$\tau(g^{-1}xg)$ が定義され、$x(r) \prec V_1$ であるとき、次の(82)が成立つ：

(82) $$\|\tau(g^{-1}xg)\| \leqq \gamma\, \|\tau(x)\|$$

補助定理3 G の二つの点列 (x_α) と (y_α) があり、$x_\alpha^\alpha \to x$, $y_\alpha^\alpha \to y$ $(\alpha \to \infty)$ で、$x_\alpha, y_\alpha \in Q_\alpha$ であるとする。このとき次の (a) (b) (c) が成立つ：

(a) L^2 の点列 $(\alpha(x_\alpha y_\alpha \theta_n - \theta_n))$ の適当な部分列は、ある $\tau(z)$ に弱収束する。ここで z は G の点列 $((x_\alpha y_\alpha)^\alpha)$ の極限点である。ただし $n = n(\alpha)$ (11) である。

(b) $z(r) = \lim_{\alpha\to\infty} (x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha]}$ は、G の一径数部分群で $z(1) = z$ である。

(c) $z \in V_1$ でなくても $z\left(\frac{r}{2k}\right) \prec V_1$ であり、$\tau\left(z\left(\frac{r}{2k}\right)\right) = \frac{r}{2k}\{\tau(x) + \tau(y)\}$ が成立つ。

証明 (a) (11)により $\Delta_n(x_\alpha y_\alpha) \leqq \Delta_n(x_\alpha) + \Delta_n(y_\alpha) \leqq \frac{6}{n(\alpha)}$ だから、(15)と Lemma 3 により $\|\alpha(x_\alpha y_\alpha \theta_n - \theta_n)\| \leqq \frac{6\alpha}{n(\alpha)} \leqq 6k$ である。従って L^2 の有界点列 $(\alpha(x_\alpha y_\alpha \theta_n - \theta_n))$ の適当な部分列はある τ に弱収束する。$(x_\alpha y_\alpha)^\alpha \in Q_\alpha^{2\alpha} \subset V_1^2$ = コンパクトだから $((x_\alpha y_\alpha)^\alpha)$ のある部分列は $z \in V_1^2$ に収束する。そして $\tau = \tau(z)$ である。

(b) このとき $z(r)=\lim_{\alpha\to\infty}(x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha]}$ は、G の一径数部分群である（グリースン[15] Lemma 1.4.2）. そして $z(1)=:z$ である。

(c) $$z(r/2k)=\lim_{\alpha\to\infty}(x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha/2k]}\in\lim Q_\alpha^{2[r\alpha/2k]}\subset\lim D_n^{2[rn/2]}$$
$$=E(r)\subset V_1$$

である。そして、この $z(r/2k)$ に対し、次の等式が成立つ:
$$\tau(z(r/2k))=w-\lim[r\alpha/2k](x_\alpha y_\alpha\theta_n-\theta_n)$$
$$=w-\lim[r\alpha/2k]\{x_\alpha(y_\alpha\theta_n-\theta_n)+(x_\alpha\theta_n-\theta_n)\}$$
$$=\tau(x(r/2k))+\tau(y(r/2k))=\frac{r}{2k}(\tau(x)+\tau(y))\ \blacksquare$$

Lemma 11　e の任意のコンパクト近傍 W に対して、e の近傍 $W^\#$ と自然数 α_0 が存在して、$x\in yW^\#$, $x(r)\prec V_1$, $y(r)\prec V_1$ であるとき、任意の $\alpha\geqq\alpha_0$ に対して、$(x(\frac{1}{\alpha})y(\frac{1}{\alpha}))^\beta\in W$ となる。ここでは β は、$\beta\leqq\alpha$ となる任意の自然数である。

定理2.　$x(r)\prec V_1$ となる G の一径数部分群 $x(r)$ に対する $x=x(1)$ の全体の集合を M とする。$x\in M$ に対する接ベクトル w を $\tau(x)$ とする。このとき写像 $\tau:M\to L^2$ は、一対一写像でかつ両連続である。ただし L^2 には弱位相を与えておく。

証明　任意の $\varepsilon>0$ に対し、Lem. 9 における e のコンパクト近傍 W_ε をとる。そして Lem. 11 により、W_ε に対し e の近傍 $W_\varepsilon^\#$ と自然数 α_0 が存在して、$x\in yW_\varepsilon^\#$, $x(r)$, $y(r)\prec V_1$ に対して任意の整数 $\alpha\geqq\alpha_0$ と、任意の自然数 $\beta\leqq\alpha$ に対して
$$(x(\tfrac{1}{\alpha})y(1-\tfrac{1}{\alpha}))^\beta\in W_\varepsilon$$

が成立つ。従って

$$z\left(\frac{1}{2k}\right)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\left[\frac{\alpha}{2k}\right]}\in\overline{W}_\varepsilon=W_\varepsilon$$

となる。そこで、補助定理3 (c) と Lemma 9 により

(83) $$\frac{1}{2k}\|\tau(x)-\tau(y)\|=\left\|\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right)\right\|\leqq\varepsilon$$

となる。kは定数>0 だから、これでτの連続性が証明された。

次に、τ^{-1}の連続性を示そう。いま $x(\gamma)$, $y(\gamma)\prec V_1$ となる二つの一径数部分群を考え、$x=x(1)$, $y=(1)$ とする。このとき $z(\gamma)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[\gamma\alpha]}$ はまた一径数部分群である。$z=z(1)$ とすると補助定理3 (c) により $z'(\gamma)=z\left(\frac{1}{2k}\right)$ は $z'(\gamma)\prec V_1$ をみたす。今簡単のために $z(\gamma)\prec V_1$ としよう。このとき、やはり補助定理3 (c) から

(84) $$\tau(z)=\tau(x)-\tau(y)$$

である。いま任意の $\psi\in L^2$ を一つとり

(85) $$\Gamma_n=(x\theta_n-y\theta_n,\psi)=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\left(x\left(\frac{i+1}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i-1}{\alpha}\right)\theta_n-x\left(\frac{i}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i}{\alpha}\right)\theta_n,\psi\right)$$

を考える。右辺の α 個の項の中で、絶対値最大のものを一つとり、

(86) $$\Phi_\alpha=\left(x\left(\frac{i_0+1}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i_0-1}{\alpha}\right)\theta_n-x\left(\frac{i_0}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i_0}{\alpha}\right)\theta_n,\psi\right)$$

とする。$u_\alpha=y((\alpha-i_0)/\alpha)$, $v_\alpha=u_\alpha^{-1}x(-i_0/\alpha)$ とおくと

(87) $$\Phi_\alpha=\left(u_\alpha^{-1}x(1/\alpha)y(-1/\alpha)u_\alpha\theta_n-\theta_n,\ v_\alpha\psi\right)$$

である。$|\Gamma_n|\leqq\alpha|\Phi_\alpha|$ だから、ここで $n\to\infty$ として

(88) $$|(x\vartheta-y\vartheta,\psi)|\leqq\lim_{\alpha\to\infty}\alpha|\Phi_\alpha|=\lim_{\alpha\to\infty}\left|\left(\alpha\left(u_\alpha^{-1}x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{-1}{\alpha}\right)u_\alpha\vartheta-\vartheta\right),v_\alpha\psi\right)\right|$$

である。またここで (u_α), (v_α) はコンパクトな V_1 の点列だから、適当な部分列は収束する。そこでこの部分列において

$$u_\alpha \to \bar{u},\quad v_\alpha \to \bar{v}\quad (\alpha\to\infty)$$

とする。(88) で $\alpha\to\infty$ として

$$\tau(z) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\,(x(1/\alpha)\,y(-1/\alpha)\,\vartheta - \vartheta)$$

であることを用いると

(89) $|(x\vartheta - y\vartheta, \psi)| \leqq |(\tau(\bar{u}^{-1} z\bar{u}), \bar{v}\psi)| \leqq \|\tau(\bar{u}^{-1} z\bar{u})\|\cdot\|\bar{v}\psi\|,\ (\forall\psi\in L^2)$

となる。ここで $\psi = x\vartheta - y\vartheta$ とおくと、Lem 10 と (84) により

(90) $\|y^{-1}x\vartheta - \vartheta\| = \|x\vartheta - y\vartheta\| \leqq \gamma\,\|\tau(z)\| = \gamma\,\|\tau(x) - \tau(y)\|.$

が得られる。(90) から直ちに次の (91) が得られる。

(91) $\tau : M \to L^2$ は一対一写像である

実際 $x, y \in M$、$\tau(x) = \tau(y)$ とすると (90) から $y^{-1}x\vartheta = \vartheta$ となるから

(92) 任意の整数 m に対し $(y^{-1}x)^m\vartheta = \vartheta$ である。

一方、(78) により、$g \notin V^4$ ならば $g\vartheta \neq \vartheta$ だから (92) より

(93) すべての $m\in\mathbb{Z}$ に対し、$(y^{-1}x)^m \in V^4 \subset V_0$

である。V_0 は $\{e\}$ 以外の部分群を含まないから、(93) により

$$x = y$$

となり、(91) が証明された。

最後に τ^{-1} の連続性の証明であるが、山辺は (90) の不等式を証明して、「これで τ^{-1} の連続性が証明された」と述べている。それは (90) から直ちに次の (94) が導かれることを意味する。

(94) e の任意の近傍 W に対して $\varepsilon > 0$ が存在して

$\|\tau(x)-\tau(y)\|\leqq\varepsilon$　ならば　$y^{-1}x\in W$　となる。

つまり

(95)　$\|y^{-1}xv-v\|\leqq\gamma\varepsilon$　ならば　$y^{-1}x\in W$ である。

が成立つというのである。(95)の逆命題は $L^2(G)$ における左正則表現の強連続性であって、よく知られた一般的事実であるが、(95)自身は函数 v の性質に立入らなければ言えないように思われる。での連続性はグルシュコフ[20]が証明している（後で紹介する）ので、定理2の正しさには疑問の余地はない。

(95)の証明は保留して、定理B2の山辺の証明を紹介しよう。

定理B2の山辺の証明

山辺は(95)の成立は当然としているようで、(95)を定理B2の証明でも用いている。(95)の W として V_1 をとると次の(96)が成立つ。

(96)　eの近傍 V_1 に対し正数 η が存在して

$\|xv-v\|\leqq\eta\Rightarrow x\in V_1$　が成立つ。

いまこの正数 η を用いて、Gの部分集合 C を定義する：

(97)　$C=\{x\in G\mid x(r)\prec V_1,\ x(1)=x,\ \|\tau(x)\|\leqq\eta\}$

このとき次の(98)が成立つ：

(98)　$\tau(C)$は凸集合である。

なぜならば任意の $r\in[0,1]$ に対し

$$\|z(r)v-v\|\leqq 2^k\|z(\tfrac{r}{2^k})v-v\|\leqq 2^k\|\tau(z(r/2^k))\|$$
$$\leqq r\eta\leqq\eta$$

だから．$z(r) < V_1$ であり．補助定理2と3により

$$\lambda\tau(x)+\mu\tau(y)=\tau(z)\in\tau(C)$$

となる．((98)証明終り)．

(99)　$y\in C$．$\|\tau(y)\|<\eta$ ならば．ある正数λが存在して．$\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$．$y(\lambda)\in C$　となる。

実際．$\lambda=\eta/\|\tau(y)\|$ とおくと．$\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$ となる。そして Lem. 7系と(96)から　$\|y(\lambda)\Omega-\Omega\|\leqq\|\tau(y(\lambda))\|=\eta$ から $y(\lambda)\in V_1$ となる。同様にして任意の $r\in[0,1]$ に対し．$y(\lambda r)\in V_1$ であるから $y(\lambda)\in C$ となる。

また．$\tau(y(-r))=-\tau(y(r))$ だから．次の(100)が成立つ．

(100)　　$\varphi\in\tau(C)$ ならば $-\varphi\in\tau(C)$

いま，$L=\bigcup_{\lambda>0}(\lambda\tau(C))$ とおくとき

(101)　Lは実ベクトル空間（L^2の部分空間）である。

実際．(100)と定義から任意の $t\in\mathbb{R}$ と $\varphi\in L$ に対し．$t\varphi\in L$ である。また任意の $\varphi,\psi\in L$ に対し．$\varphi=\lambda\varphi_1$．$\psi=\mu\psi_1$　となる $\varphi_1,\psi_1\in\tau(C)$ と $\lambda,\mu>0$ がある。$\nu=\lambda+\mu$ とおくとき．$\varphi+\psi=\nu(\frac{\lambda}{\nu}\varphi_1+\frac{\mu}{\nu}\psi_1)$ であり．(98)から $\frac{\lambda}{\nu}\varphi_1+\frac{\mu}{\nu}\psi_1\in\tau(C)$ だから．$\varphi+\psi\in L$ となる．

$B=\{\varphi\in L^2 \mid \|\varphi\|\leqq\eta\}$ とおくとき

(102)　　$B\cap L\subset\tau(C)$

が成立つ。実際．任意の $\psi\in B\cap L$ をとるとき．$\psi=\lambda\varphi$．$\lambda>0$．$\varphi\in\tau(C)$となる。

(99)により $\mu>0$ が存在して $\|\mu\varphi\|=\eta$，$\mu\varphi\in C$ となる。このとき $\psi\in B$ より

$$\eta\cdot\frac{\lambda}{\mu}=\|\mu\varphi\|\frac{\lambda}{\mu}=\|\lambda\varphi\|=\|\psi\|\leqq\eta$$

となるから、 $1/\mu \leqq 1$ である。そこで

$\psi = \lambda\varphi = \frac{1}{\mu}\cdot\mu\varphi$ で、$\mu\varphi \in \tau(C)$, $\frac{1}{\mu} \leqq 1$ だから $\psi \in \tau(C)$

となり、(102) が証明された。さて次の (103) が成立つ：

(103)　　$\tau(C)$ は L^2 の強位相でコンパクトである。

この (103) の証明は、[56] には欠けている。今、その点を保留して先へ進むと (102) と (103) から、$\tau(C)$ の閉集合である $B \cap L$ について次の (104) が成立つ：

(104)　　$B \cap L$ はコンパクトである。

この (104) により、実ノルム空間 L（L^2 の部分空間）の任意の閉球はコンパクトであり、従って L は強位相に関し、局所コンパクトである。そこで F. リースの定理 [59]「局所コンパクトなノルム空間は有限次元である」によって

(105)　実ベクトル空間 L は、有限次元である。

これで定理 B2 の証明ができた。∎

以上の山辺の証明では、(95) と (103) の証明が欠けている。そこでこの gap を補うグルシュコフの証明 [20] を紹介しておこう。

定理 B2 のグルシュコフの証明

[20] における補助定理を、山辺 [56] にあるものと区別するために、レンマとして引用する。山辺 [56] と異なる部分を重点的に示す。

G の一径数部分群 $x(\gamma)$ 全体の集合を K とする。K は $\mathbb{R}$ から G への連続準同型写像全体の集合である。$M = \{x(1) \mid x \in K,\ x(\gamma) \subset V_1\}$ とおく。

レンマ 20：　M はコンパクトである。

証明. M はコンパクト集合 V_1 に含まれるから. Mが閉集合であることを示せば十分である。それには M の点列 $(x_n)_{n\in N}$が. G内で点xに収束するとき. $x\in M$ であることを言えばよい。$x_n(r)\in V_1$ であるから $y_n=x_n(\frac{1}{n})$ とおくと $y_n, y_n^2, \cdots, y_n^n \in V_1$ であるから $y_n\in Q_n$ である。(Q_α の定義は(60)). $Q_n\to\{e\}$ であるから, $y_n\to e\ (n\to\infty)$ である。このとき一径数部分群 $x(r)$ が

$$x(r)=\lim_{n\to\infty} y_n^{[rn]}$$

によって定義される。

このとき

(106) $$x(1)=\lim_{n\to\infty} y_n^n=\lim_{n\to\infty} x_n(1)=\lim_{n\to\infty} x_n=x$$

である。そして $y_n, y_n^2, \cdots, y_n^n \in V_1$ だから任意の $r\in[0,1]$ に対し, $x(r)\in\overline{V_1}=V_1$ である。そこで M の定義と (106) から. $x\in M$ となる。これでレンマは証明された。

任意の $x\in M$に対し. 接ベクトル $\tau(x)$が定義される。Lemma 7 により

(107) $$\tau(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(x(r)\vartheta-\vartheta)\in L^2$$

である。

レンマ26. $\tau: M\to L^2$ は. 一対一連続写像で, τ^{-1} も連続である。

証明. 前半は, 山辺 [56] Theorem 2 の証明で証明されているから τ^{-1} の連続性を言えばよい。Mはコンパクトだから. Mの任意の閉集合 F はコンパクトであり. 従って連続写像 τ による像 $\tau(F)$ はコンパクト従って L^2 の

閉集合である。従ってτは閉写像であるから、逆写像$\tau^{-1}: \tau(M) \to M$は連続である。∎

Gの一径数部分群全体の集合Kは、実ベクトル空間の構造を持つ。

(a) $t \in \mathbb{R}$, $x \in K$に対し、$(t\cdot x)(r) = x(tr)$ $(r \in \mathbb{R})$とすると$t\cdot x \in K$。

(b) $x, y \in K$に対し

(108) $$z(r) = \lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[r\alpha]}, \quad r \in \mathbb{R}$$

とするとき、$z \in K$である。$z = x+y$と定義する。

この定義によって実際Kが実ベクトル空間となることは容易に確められる。

任意の$x \in K$に対し

(109) $$r_x = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid x(r) \in V_1\}$$

とおく。$x(r_x) \in \overline{V_1} = V_1$である。$x(r_x)$は$V_1$の境界に含まれるから、次の(110)が成立つ。

(110) $$d = \inf_{x \in K}\|\tau(x(r_x))\| \text{ とおくとき、} d > 0 \text{ である。}$$

次に実ベクトル空間Kにノルムを導入する。

任意の一径数部分群$x(r)$に対し、$\varepsilon > 0$が存在して$|r| \leqq \varepsilon \Rightarrow x(r) \in V_1$だから、$y(r) = x(\varepsilon r)$とすると、$0 \leqq r \leqq 1 \Rightarrow y(r) \in V_1$であるから$x(\varepsilon) = y(1) \in M$となる。そこで$x(r_0) \in M$となる$r_0 > 0$を一つとり（例えば$r_0 = \varepsilon$）、一径数部分群$x = x(r)$のノルムを次の(111)によって定義する：

(111) $$\|x\| = \left\|\frac{1}{r_0}\tau(x(r_0))\right\| \qquad (x(r_0) \in M),\ r_0 > 0)$$

(111)の右辺の値はr_0のとり方によらず一定である（補助定理2による）。そして実際に、K上のノルムを定義する。特に

(112)　　$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$　(すなわち$\forall r\in\mathbb{R}$に対し$x(r)=e$)

実際定義(111)により、$\|x\|=0$のとき　$x(r_0)\in M$となる$r_0>0$に対し$\|\tau(x_0(r_0))\|=0$であるから、$\tau(x(r_0))=0$で、レンマ26により$x(r_0)=e$である。このとき$|r|\leqq r_0$となる任意の$r\in\mathbb{R}$に対し、$x(r)\in M$であるから、同様にして$x(r)=e$となる。xは$\mathbb{R}\to G$の連続準同型写像だから、これから$x(r)=e$　$(\forall r\in\mathbb{R})$が導かれる。

(110)のdの定義により

(113)　　$x\in K,\quad \|x\|\leqq d \Rightarrow x(1)\in M$

が成立つ。いま(110)の$d>0$に対し

(114)　　$B=\{x\in K \mid \|x\|\leqq d\}$

とおく。また、

(115)　　$K_1=\{x\in K \mid x(1)\in M\}$

とおく。

(116)　　$f: K_1\to G$を、　$f(x)=x(1)$

によって定義する。K_1にノルム空間Kの強位相を与えておく。

(117)　fはK_1から$f(K_1)$への同相写像である。

証明．$x,y\in K_1$に対し、$z=x-y$とおく。このとき補助定理3(c)により、$z(\frac{1}{2^k})\in M$で$\tau(z(\frac{1}{2^k}))=\frac{1}{2^k}\{\tau(x(1))+\tau(y(1))\}$となるから、次の(118)が成立つ。

(118)　$\|x-y\|=\|z\|=2^k\|z(\frac{1}{2^k})\|=\|\tau(x(1))-\tau(y(1))\|=\|\tau(f(x))-\tau(f(y))\|$

これから，$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ が導かれるので

(119)　　f は一対一写像である。

また，$\tau: M \to L^2$ は連続である（レンマ 26）から，次の(120)が成立つ。

(120)　　${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し，e の近傍 U が存在して，$y^{-1}x \in U \Rightarrow \|\tau(x)-\tau(y)\| \leqq \varepsilon$ となる。

(118)(120)から

次の(121)が導かれる。

(121)　$f^{-1}: f(K_1) \to K_1$ は連続である。

実際，(120)により ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して e の近傍 U が存在して

(122)　　$f(y)^{-1}f(x) \in U \Rightarrow \|\tau(f(x))-\tau(f(y))\| \leqq \varepsilon$

が成立つ。一方，(118)により $\|x-y\|=\|\tau(f(x))-\tau(f(y))\| \leqq \varepsilon$ だから

(123)　　$f(y)^{-1}f(x) \in U \Rightarrow \|x-y\| \leqq \varepsilon$

が成立ち，f^{-1} は連続である。一方次の(124)が成立つ。

(124)　$f(K)$ はコンパクトである。

$f(K_1) \subset M =$ コンパクト（レンマ 20）だから，$f(K_1)$ が G の閉集合であることを示せば十分である。今 $f(K_1)$ の点列 $(f(x_n))_{n\in N}$ $((x_n \in K_1))$ が G 内で $\bar{x}$ に収束したとする。

$f(x_n)=x_n(1) \in M$ で，M はコンパクトだから，$\bar{x}=\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \bar{M}=M$ である。M の定義から，$x(\gamma) < V_1$ となる $x \in K$ が存在して $x(1)=\bar{x} \in M$ となる。そこで $x \in K_1$ で，$\bar{x}=f(x) \in f(K_1)$ だから，$f(K_1)$ は閉集合である。((124)証明終り)。

(125) $f^{-1}: f(K_1) \to K_1$ は閉写像である。

証明　$f(K_1)$ の任意の閉集合 C をとるとき、(124) により C はコンパクトだから、(121) により、その連続像 $f^{-1}(C)$ はコンパクト、従って T_2 空間である G の閉集合である（(125) 証明終り）。　(125) から直ちに次の (126) が導かれる。

(126)　$f: K_1 \to f(K_1)$ は連続である。

(119) (121) (126) により、直ちに次の (127) が導かれる。

(127)　$f: K_1 \to f(K_1)$ は同相写像である。

(128)　K_1 はコンパクトである。

これは (124) と (127) から明らか。

(113) により、B はコンパクトな K_1 ((128)) の閉集合だから、

(129)　閉球 B はコンパクトである。

さて、実ノルム空間 K の閉球 B がコンパクトだから、K は局所コンパクトであり、従って前述のリースの定理 [59] により、

(130)　K は有限次元である。

$x \in K$ に対し、$\tau(x(1)) \in L$ を対応させると、これが全単写線型写像であり、(130) により L も有限次元となる。（証明終り）。

§5　結び

以上述べたように、第五問題は、位相群の中でリー群を位相代数的に

特徴付けるという，フォン・ノイマン[52]の設定した形では，完全に解決した。すなわち次の定理が成立つ。

定理　位相群Gがリー群となるための必要かつ十分な条件は，次の(A)または(B)をみたすことである。

(A)　Gは小さな部分群を持たない局所コンパクト群である。

(B)　Gは有限次元かつ局所連結な局所コンパクト群(特に位相多様体である位相群)である。

よく知られているように，微分可能構造を持たない位相多様体が存在するが位相群であるような位相多様体はすべて，微分可能多様体(実解析多様体)で群演算は微分可能(解析的)となるのである。

しかし，この結果は決して，リー群論を位相群論の中に解消することを意味しない。リー群の作用から，微分することによってその無限小変換を導くというリーのアイディアなくしては，今日でもリー群論の豊かな結果を導くことはできないのである。この意味で，第五問題の解決は，リー群論に代わるものを提供したわけではない。しかし，岩澤の研究に見られるように，第五問題はリー群論の進歩に大いに貢献し，その解決は位相群論の中におけるリー群論の地位を明確にしたのであった。

最後に第五問題の応用の例として，フロイデンタールの論文「リーマン・ヘルムホルツ・リーの空間問題の新しいとらえ方」[10](1956年)に触れておこう。

[10]では、連結局所コンパクトT_2空間R上に、位相変換群Fが推移的に作用しているものとし、(R,F)は次の三つの仮定(S), (V), (Z)をみたすものとする。

(S)　Rの閉集合Aとコンパクト集合Bが交わらないとき、開集合Uが存在して、任意の$f\in F$に対し、$f(U)\cap A\neq\phi\Rightarrow f(U)\cap B=\phi$が成立つ。

(V)　位相群Fは完備である。

(Z)　$x\in R$が存在して$J=\{f\in F\mid f\cdot x=x\}$とおくとき、$R-J\cdot x$は連結でない。

[10]では、この三条件をみたすRとFの組を数え上げている。この場合Fはリー群となるのであるが、その証明に第五問題の最終的な解となった次の定理を用いている：

山辺の定理5.　任意の局所コンパクト群Gは一般化リー群Gである。すなわちGの単位元eの任意のコンパクト近傍Uに対し、Uに含まれるGのコンパクト正規部分群Nが存在して、G/Nはリー群となる。

この定理を用いて、上のFの単位元成分F_0がリー群であることを帰謬法で証明する。もしF_0がリー群でないとすると、山辺の定理5により、F_0のコンパクト正規部分群N_rの無限減少列

$$N_1\supsetneqq N_2\supsetneqq\cdots\supsetneqq N_r\supsetneqq\cdots \tag{1}$$

が存在して、F_0/N_rはすべてリー群で、N_rはどれもリー群でないようなものが存在する。所が上の三条件をみたすFでは、(1)のような無限列は存

在しないことがわかるのである。実は(1)のような列の長さは高々5以下となるのである。このフロイデンタールの研究は、第五問題の他分野への応用として特筆すべきものである。このフロイデンタールの定理については、長野[63]は別証を与え、応用として「長さの等しい二つの線分は常に合同である」という条件をみたすリーマン多様体は、階数1の対称リーマン空間であることを証明した。

References

[1] S.Bochner and D.Montgomery, Locally compact groups of differential transformations, Ann. of Math. 47(1946), 639-653.

[2] N.Bourbaki, Integration, Ch. 7 et 8, Hermann, Paris, 1963.

[3] N.Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie, Ch. 9, Masson, Paris, 1982.

[4] G.E.Bredon, F.Raymond and R.F.Williams, p-adic groups of transformations, Trans. AMS 99(1961), 488-498.

[5] H.Cartan, Sur les groupes de transformations analytiques, Hermann, Paris, 1935.

[6] C.Chevalley, Generation d'un groupe topologique par des transformations infinitesimales, C.R.Acad.Sci.Paris 196(1933), 744-746.

[7] C.Chevalley, Two theorems on solvable topological groups, Lectures in Topology, edited by Wilder and Ayres, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1941.

[8] C.Chevalley, "Theory of Lie Groups I", Princeton Unv. Press, Princeton, 1946.

[9] C.Chevalley, On a theorem of Gleason, Proc. AMS 2(1951), 122-125.

[10] H.Freudenthal, Neuere Fassungen der Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, Math. Zeitschr. 63(1956), 374-405.

[11]A.M.Gleason, Square roots in locally compact groups, Bull.AMS 55(1949), 446-449.

[12] A.M.Gleason, Arcs in a locally compact groups, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A., 36(1950), 663-667.

[13] A.M.Gleason, Spaces with a compact groups of transformations, Proc.AMS 1 (1950), 35-43.

[14] A.M.Gleason, On the structure of locally compact groups, Duke Math.J. 18 (1951(, 85-104.

[15] A.M.Gleason, Groups without small subgroups, Ann. of Math. 56(1952), 193-212.

[16] M.Goto, On local Lie groups in a locally compact groups, Ann. of Math. 54 (1951), 94-95.

[17] 後藤守邦稿. vector 群の arcwise connected subgroup について, 数学 2巻 2号 (1949), 180-183.

[18]M.Goto, On an arcwise connected subgroups of a Lie group, Proc.AMS 20(1969), 157-162.

[19] M.Goto and H.Yamabe, On continuous isomorphisms of topological groups, Nagoya Math.J. 1(1950), 109-111.

[20] V.M.Gluškov, The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem, Uspehi Mat. Nauk 12(1957)2,3-41. English translation, AMS Translations 15(1960), 55-93.

[21] S.Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Acad. Press, New York, 1978.

[22] 岩澤健吉, Hilbertの第五問題,可解位相群の構造について, 数学 第1巻3号(1948), 161－171.

[23] K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. 50(1949), 507-557.

[24] I.Kaplansky,"Lie algebras and locally compact groups", Univ. of Chicago Press, Chicago, 1971.

[25] M.Kuranishi, On locally euclidean groups satisfying certain conditions, Proc. AMS 1(1950), 372-380.

[26] M.Kuranishi, On conditions of differentiability of locally compact groups, Nagoya Math. J.(1950), 71-81.

[27] D.Montgomery, Topological groups of differentiable transformations, Ann. of Math. 46(1945), 382-387.

[28] D.Montgomery, A theorem on locally euclidean groups, Ann. of Math. 48 (1947), 650-659.

[29] D.Montgomery. Connected one-dimensional groups, Ann. of Math. 49(1948), 110-117.

[30] D.Montgomery, Analytic parameters in three dimensional groups, Ann. of Math. 49(1948), 118-131.

[31] D.Montgomery, Subgroups of locally compact groups, Amer. J. Math. 70 (1948), 327-332.

[32] D.Montgomery, Theorems on the topological structure of locally compact groups, Ann. of Math. 50(1949), 570-580.

[33] D.Montgomery, Connected two dimensional groups, Ann. of Math. 51(1950),

[34]D.Montgomery, Finite dimensiona groups, Ann. of Math. 52(1950),591-605.

[35] D.Montgomery, Locally homogeneous spaces, Ann. of Math. 52(1950),261-271.

[36] D.Montgomery, Simply connected homogeneous spaces, Proc.AMS 1(1950), 467-469.[37] D.Montgomery and L.Zippin, Compact abelian transformation

[37] D.Montgomery and L.Zippin, Compact abelian transformation groups, Duke

Math. J.4(1936), 363-373.
[38] D.Montgomery and L.Zippin, Topological transformation groups, Ann. of Math. 41(1940), 778-791.
[39] D.Montgomery and L.Zippin, Existence of subgroups isomorphic to the real numbers, Ann. of Math. 53(1951), 298-326.
[40] D.Montgomery and L.Zippin, Two-dimensional subgroups, Proc.AMS 2(1951), 822-838.
[41] D.Montgomery and L.Zippin, Four-dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 140-166.
[42]D.Montgomery and L.Zippin, Small subgroups of finite-dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 213-241.
[43] D.Montgomery and L.Zippin, "Topological Transformation Groups",Interscience Publ. Inc., New York, 1955.
[44] S.B.Myers and N.E.Steenrod, The groups of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. 40(1939), 400-416.
[45] L.S.Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35(1934), 361-388.
[46] L.S.Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquieme probleme de M.Hilbert, C.R.Acad.Sci. Paris, 198(1934), 238-240.
[47] L.S.Pontrjagin, "Topological Groups", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.
[48] J.P.Serre, Le cinquième probleme de Hilbert, État de la question en 1951, Bull.Soc.Math.France, 79(1951), 1-10.
[49] J.P.Serre, "Lie Algebras and Lie Groups", W.A.Benjamin, New York, 1965.
[50] 杉浦光夫. 第五問題研究史 I. 津田塾大学数学・計算機科学研究所報 13 (1997), 67-105.
[51] J.von Neumann, Über der analytische Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellung, Math. Zeitsch. 30(1929), 3-42.
[52] J. von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 170-190.
[53] H.Yamabe, On an arcwise connected subgroups of a Lie groups, Osaka Math. J. 2(1950), 13-14.
[54] H.Yamabe,Note on locally compact groups, Osaka Math. J.3(1951), 77-82.
[55] H.Yamabe, On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 48-54.
[56] H.Yamabe, Generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. 58(k953),

351-365.

[57] C.T.Yang, p-adic transformation groups, Mich. Math. J. 7(1960), 201-218.

[58] S.Kakutani, Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc.Imp.Acad. Japan, 12(1936), 82-84.

[59] F.Riesz, Über lineare Fuktionalgleichungen, Acta Math. 41(1918),71-98.

[60] S.Kakutani and K.Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppen, Proc,Imp,Acad.Japan, 20(1944), 444-450

[61] A.I.Malc'cev, On solvable topological groups, Mat.Sbornik N.S. 19(1946), 165-174. (Russian)

[62] 山辺英彦. Chevalleyの問題について. 数学.4巻1号 ((1952) 17-21.

[63] 長野正. Wang-Tits-Freudenthalの空間問題について——線分の合同定理による古典的空間の特徴づけ—— 数学 11巻 4号 (1960), 205-217.