ハンバーガーの味わい方
–関数等式の歴史から–

佐藤文広（立教大学理学部）

Hamburger の定理は, Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

をその関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

（と正則性の条件）で特徴づけるものである（[H, '21-i]）[1].

Hamburger の結果は発表するやいなや多大な関心を呼んだ. そのことは, 当代きっての整数論の大物 C. L. Siegel と E. Hecke が Hamburger の定理 ([H, '21-i, Satz 1]) の別証明や証明の簡易化を発表している（[Si, '22], [He, '23]）ことが示している.

とくに Hecke は [He, '23] の冒頭で, Hamburger の結果を「驚くべき定理」と呼んでいる. さらに, Hecke は 1938 年の Michigan と Princeton での講義（[He, '38]）において, [He, '36] に始まる一連の研究の成果（関数等式を満たす Dirichlet 級数の空間と保型形式の空間の対応を述べたいわゆる Hecke 対応, Hecke の作用素, Theta 級数を通じた二次形式論への応用）を解説するにあたり, まず, Riemann ゼータ関数の関数等式と Hamburger の定理から話を始めている.

> 「$\zeta(s)$ の関数等式は, 正則性に関するある仮定の下でそれが $\zeta(s)$ を一意的に決定するがゆえに, きわめて重要である」

として, Hamburger [H, '21-i] による証明のアイディアを簡単に紹介する. ついで,

> 「しかし, その議論は（簡単であるが）満足すべきものではない. 我々は関数等式が存在する真の理由を理解しない; Riemann による s を $\frac{s}{2}$ で置き換える方法[2]は単なる証明, 孤立した結果を導き出す工夫にすぎない. また, 正則性と関数等式という仮定が, 解の一意性を導き出せるほど強力であるという理由も分からない. だが, 実際にはこの定理はずっと一般化でき, そうするとき, より明快な理解ができるのである. 」

---

[1]たとえば, [H, '21-i] は H (= Hamburger) の '21 (=1921) 年の第 i (=1) 番目の論文を意味する.
[2]Jacobi の Theta 級数の変換公式に基づく, いわゆる Riemann の第 2 証明.

と, 彼の研究の問題意識を述べるのである. Hecke は Hamburger の定理の意味を考えることを大きな動機として, 彼の保型形式の理論に到達したと言ってよいだろう.

かくして今日, 「ハンバーガー」は, Hecke 理論（保型形式・保型表現をそれに付随する L 関数の関数等式で特徴づける）に発展する流れの源として賞味されることとなった. これは「ハンバーガー」のまったく正統的な味わい方で, 由緒正しい立派なレストランの味と言えよう.

ところで私は, この定理の証明者である H. Hamburger 自身は彼の定理をどう理解したのか, いわば, 素朴なドイツ家庭料理としての「ハンバーガー」の元々の味わいはどんなものだったのか, ということが気になる.

こうした疑問を持つ一つの理由として, 文献表に見るように, Hamburger にはゼータ関数の関数等式に関して（少なくとも）4 つの論文（[H, '21-i], [H, '21-ii], [H, '22-i], [H, '22-ii]）があるのだが, 通常, 第 1 論文 [H, '21-i] のみが引用されるにすぎないということがある.

もう一つの理由としては, 私自身, [EK, '82], [Y, '86] という論文に触発されて [Sa, '89] を書いてみたときに, 「ハンバーガー」には Hecke 理論とは異なる（もちろん, まったく関係ないわけではないが）風味の利かせ方があって, しかもあまり宣伝が行き届いていないので, 何度か再発見されているように見えることに気づいた, ということもある. その料理法は, 実は, Hamburger 自身のあまり引用されない論文 [H, '22-ii] に書かれている方法を発展させたもののようなのである.

繰り返すが, やはり Hecke 理論として味わうのが「ハンバーガー」の正しい味わい方であろう. しかし, 人間, ときにはいつもと違う味を求めたい気持ちもあり, Hamburger の仕事とそれから派生した仕事（Hecke 理論からはみ出た部分の）を調べてみた. まだ, 調査が十分でなく歴史叙述としては不完全であり, またおそらく拙速による誤解もあると思われるが, 中間報告としてご理解いただきたい. （特に §5 はもっと詳しい議論をするつもりであったが, 時間的余裕が無かった. また, Theta 変換公式を一般化された Poisson 和公式と見る Weil 表現的な見方 [W, '64] や, その見方を楕円モジュラー形式に拡張した [Su, '80] なども紹介すべきであったが, 省略せざるを得なかった. ）

1 Hamburger の 3 部作

既に述べたように, Hamburger には [H, '21-i] – [H, '22-ii] の 4 つの論文がある. 第 1 論文が Riemann ゼータ関数の関数等式による特徴づけを示した最もよく引用されるもので, 第 2, 第 3 論文はその直接の延長である. したがって, 本節ではこの 3 つの論文をまず一括して紹介し, 次節で第 4 論文を扱おう. また, 証明については第 4 論文の項で簡単に触れる.

Hamburger の第 1 論文 [H, '21-i] の結果は次のようなものである.

Theorem 1.1 ([H, '21-i], Satz 1) $f(s)$ を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で条件

(1) 極は高々有限個,

(2) ある正数 r, γ に対し, $|s| \geq r$ 上で $f(s)$ は正則で $|f(s)| \leq e^{|s|^\gamma}$ が成り立つ,

(3) $\sigma := \Re(s) > 1$ で

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

と収束する *Dirichlet* 級数に展開される,

を満たすものとする. このとき, さらに関数等式

$$f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2} = f(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{(s-1)/2} \tag{4}$$

が成り立てば, $f(s)$ は *Riemann* ゼータ関数 $\zeta(s)$ の定数倍である.

Hamburger は主定理を上のように定式化した後に, 関数等式 (4) を

$$f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2} = g(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{(s-1)/2}, \tag{5}$$

ここで $g(s)$ は

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \quad \sigma > {}^{\exists}\alpha$$

と展開できる関数である, と弱めても同様の結論

$$f(s) = g(s) = a\zeta(s)$$

が導かれることを注意し, この強い形で $\zeta(s)$ の特徴付けを証明している.

第 2 論文 [H, '21-ii] では, まず, $g(s)$ の Dirichlet 級数展開に関する条件をさらに弱めて, $g(s)$ は

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^s}, \quad 0 < l_1 < l_2 < \cdots \to \infty, \quad \sigma > {}^{\exists}\alpha \tag{6}$$

という形に展開されることを仮定するならば, $f(s), g(s)$ はどのようなものとなるかを考察している. さて,

$$0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_{k-1} < l_k = 1$$

となる k をとる.[3] このとき, 彼の結果は, 次の通りである.

Theorem 1.2 $f(s), g(s)$ が条件 (1), (2), (3), (5) を満たすならば,

$$l_{k-i} = 1 - l_i, \quad b_{k-i} = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

であり,

$$g(s) = \sum_{i=1}^{k} b_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+l_i)^s}$$

が成り立つ.

[3] $l_k = 1$ となる k がないときは, $b_k = 0$ と解釈してもよいし, $f(s), g(s)$ に Riemann ゼータ関数を加えてやってもよい.

これから, とくに $l_n \geq 1$ $(\forall n \geq 0)$ ならば, $g(s)$ を (6) と条件をゆるめても, (1), (2), (3), (5) を満たす $f(s)$, $g(s)$ は Riemann ゼータ関数（の定数倍）に限ることがわかる. 一方, l_n に条件をつけなければ, 関数等式を満たす Dirichlet 級数のなすベクトル空間は無限次元になってしまうことが分かる. [H, '21-ii] ではまた,

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)g(1-s)$$

の形の関数等式に対して, 定理 1.2 の類似も証明している.

第 3 論文 [H, '22-i] では, Dirichlet の L 関数の関数等式に示唆されて

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)f(1-s)$$

の形の関数等式を考察した. 彼は, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda = \pm 1$ が必要であることを示した後, この関数等式を満たす Dirichlet 級数の空間の次元の決定, 基底の構成を行っている. これは,

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}k^{-s+1/2}f(s)$$

とおいてやれば, 容易に [H, '21-ii] の結果に帰着するのである.

2 Hamburger の第 4 論文と Siegel, Hecke による別証明

さて, 序で述べたように Siegel, Hecke は Hamburger の定理が発表されるや, 別証明・簡易化を考案し論文を書いている（[Si, '22], [He, '23]）. だが, Hamburger 自身も, その一部として彼らの議論と実質的に同じ内容を含む結果に, ほぼ同時に到達していた.[4] それが彼の第 4 論文 [H, '22-ii] である. この論文は, 自分の得た結果が何を意味しているのかを反省してみたとき, Hamburuger が到達した地点を示すものだと言ってよかろう. さて, Hamburger は 2 つの Dirichlet 級数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{\lambda_n}^s}, \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{l_n}^s}$$

を考え, これらに

(6) $f(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり, $s=1$ において 1 位の極を持つほか至るところ正則で, $(s-1)f(s)$ は位数有限の整関数である,

(7) $f(s)$, $g(s)$ は $\sigma = \Re(s) > 1$ で絶対収束する,

という仮定を課した. そして, このとき, Riemann 型の関数等式を含む次の主張はみな同値であることを発見したのである.

(a) $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)f(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)g(1-s)$, （関数等式）

[4] [He, '23] の脚注 2, [H, '22-ii] の脚注 1 参照.

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-\pi l_n^2/\tau},$ (Theta relation)

(c) $\displaystyle a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z} = \frac{b_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^2 + l_n^2},$ (部分分数展開)

(d) $\displaystyle\sum_{l_n<y} b_n(y - l_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2}(\cos 2\pi\lambda_n y - 1),$ (Riesz 和)

(e) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Phi(i\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi l_n iy}\Phi(iy)\, dy.$ (Poisson 型和公式)

ここで, $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = b_n$, $a_0 = -f(0)/2$, $b_0 = \mathrm{Res}_{s=1} f(s)$ とおいた.

この結果に基づくと, Siegel, Hecke の別証明は説明しやすい. ただし, 上では, $f(s)$ は $s = 1$ においてのみ極を持ちその位数は 1 であるという, もともとの Hamburger の定理の仮定より強い条件が課せられているので, [H, '21-i, Satz 1] を回復するには上の結果をもう少し拡張しなくてはいけないのだが, そのことを modulo とすると, Siegel, Hecke による別証明の基本的なアイディアは, 次のように説明できる.

Siegel の証明の場合: 関数等式 (a) から逆 Mellin 変換により (b) を導き, (b) の $\tau = iy$ への制限に $e^{-\pi z^2 y}$ をかけて $(0, \infty)$ 上で積分することにより, (c) を導く. (c) において, $\lambda_n = n$ ならば, 左辺の周期性から右辺において b_n が n によらない定数であることが従う (Riemann ゼータ関数に関する Titchmarsh の有名な教科書 [T, '51] で紹介されているのは, この証明である),

Hecke の証明の場合: (a) の両辺を $s(s+1)\Gamma\left(\frac{1-s}{1}\right)$ で割ってから, 逆 Mellin 変換することで (d) を導く. (d) の左辺を $B(y)$ とおくとき, $B(y+1) - B(y)$ の具体的な表示と $\lambda_n = n$ から得られる (d) の右辺の主要部分の周期性を考え合わせることにより, b_n が n によらない定数であることが従う,[5]

Hamburger ([H, '21-i]) のもともとの証明も (d) を根拠とするものであったが, Hecke の証明は (d) を導く過程が [H, '21-i] に比べて大いに見通しのよいものになっている. [H, '22-ii] では, Siegel と同じ方法で (c) を示し, (c) から (d) を導く簡単な方法を与えられている.

次節以降では, 以上に列挙した (a) - (e) のタイプの等式の間にある相互関連を問題としたその後の研究を紹介していくが, まずは, Dirichlet 級数と Poisson 型の和公式の関係は, Hamburger の定理以前に, 若干異なる文脈からすでに立ち現れてきていたことを説明することから始めよう.

[5]Hecke は, Voronoi, Hardy 等によってこの種の公式が約数関数 $d(n)$ に対して知られており, この方法がさらに多くの例に適用され数論的応用を持つことを指摘して, $\zeta(s)^2$ に加えて, 実 2 次体・虚 2 次体のゼータ関数に関連する Riesz 和の例も与えている.

3 Voronoi 和公式と Dirichlet 級数

今世紀のはじめ Voronoi ([V, '04-i], [V, '04-ii]) は次のような問題を考えた.[6]

"$\tau(n)$ $(n \geq 1)$ を数論的関数とし, $f(x)$ を区間 $a < x < b$ で高々有限個の極値をもつ連続関数とする. このとき, τ のみに依存し f によらない関数 $\alpha(x)$, $\delta(x)$ で

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq a}^{n<b}\tau(n)f(n)\\ =\int_a^b f(x)\delta(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_a^b f(x)\alpha(nx)\,dx\end{aligned}$$

を満たすものを求めよ."

すなわち, 勝手な数論的関数 $\tau(n)$ に対して, それを係数として Poisson 型の和公式が成り立つような積分変換が見つけられるか, ということを問題にしたのである.

Voronoi は [V, '04-i] で約数関数

$$\tau(n)=d(n)=n\ \text{の約数の個数},\quad \zeta(s)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}$$

の場合を詳しく研究し,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)f(n) &= 4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)\int_0^{\infty}f(x)\{K_0(4\pi\sqrt{nx})-(\pi/2)Y_0(4\pi\sqrt{nx})\}\,dx\\ &\quad+\int_0^{\infty}(\log x+2\gamma)f(x)\,dx+\frac{1}{4}f(0)\end{aligned}$$

を見いだした (γ は Euler の定数, K_0, Y_0 は (modified) Bessel 関数). これが, いわゆる Voronoi 和公式である. また, Voronoi は [V, '04-ii] において, $\tau(n)$ が整係数正定値 2 元 2 次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ を用いて

$$\tau(n)=\sharp\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, ax^2+2bxy+cy^2=n\right\}$$

と与えられる場合を調べている.

Voronoi 和公式については Hardy, Landau をはじめとして多くの研究が行われたが, 上記のタイプの和公式と $\tau(n)$ に付随する Dirichlet 級数

$$\psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

の関係を一般的に定式化したのは, Ferrar [F, '34], [F, '36], とくに [F, '36] である.[7]

[6]おそらく, $\sum_{n<x}\tau(n)$ の評価という数論の問題からの興味であろう. また, Voronoi は, これを定理として述べているが, 予想と考えるべきである.

[7]Voronoi [V, '04-i] もその議論の基礎に $\zeta(s)^2$ の関数等式を据えているので, ことのはじめから和公式とゼータ関数の関係というのは表面に現れていた, とは言える.

彼の議論を解析的な厳密さは無視して, 簡単にスケッチしてみよう.

まず, 関数 $f(x)$ が Mellin 変換の形で

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma} \phi(s)x^{-s}\,ds$$

と与えられているとする. このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma\gg 0}\tau(n)\phi(s)n^{-s}\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma}\psi(s)\phi(s)\,ds\\ &= (R) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b\ll 0}A(s)\psi(1-s)\phi(s)\,ds\end{aligned}$$

と変形できる. ここで, (R) は積分路を移動したことから出てくる $\psi(s)$ の極における留数からなる項であり, また $A(s)=\psi(s)/\psi(1-s)$ とおいている. このとき, 積分路 $\Re(s)=-b\ll 0$ の上で Dirichlet 級数

$$\psi(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{1-s}}$$

が絶対収束するとすると, さらに

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b}A(s)\psi(1-s)\phi(s)\,ds &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{2\pi i}\int_{\Re(s)=-b}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left\{-\Theta_n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma'\gg 0}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds\right\}\end{aligned}$$

となる. ここで, Θ_n は積分路の移動にともなって現れる $A(s)$ の極における留数からなる項である. $\phi(s)$ が $f(x)$ の Mellin 変換であることを利用して, 最後の積分は

$$\begin{aligned}\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)\phi(s)n^{s-1}\,ds &= \int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)n^{s-1}\,ds\int_0^{\infty}f(x)x^{s-1}\,dx\\ &= \int_0^{\infty}f(x)\,dx\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)(nx)^{s-1}\,ds\end{aligned}$$

と変形できる. そこで,

$$\beta(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma'}A(s)y^{s-1}\,ds$$

とおけば,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)f(n) - (R) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left\{-\Theta_n + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}f(x)\beta(nx)\,dx\right\}$$

の形の和公式が得られるのである. したがって, Dirichlet 級数の解析的性質がよく分かるならば, この形式的な変形を正当化し, さらに留数項 $(R), \Theta_n$ や積分変換の核関数 $\beta(x)$ を決定して明示的な和公式に到達することもできるであろう. そのためには, とくに $s\mapsto 1-s$ の関数等式が重要であることも分かる. すなわち, 関数等式は

- $A(s) = \psi(s)/\psi(1-s)$ の極の留数から Θ_n の項が現れてくるが, $\psi(1-s)$ の非自明な零点の寄与が無くなる（Dirichlet 級数 $\psi(s)$ の極における留数から来る項は, 問題が少ない. (R) もそうである.）,
- $A(s)$ が指数関数, およびガンマ関数で記述され, $\beta(x)$ を具体的に計算することが可能になる,

などの効果を発揮する.

たとえば, $\tau(n)=1$ $(\forall n)$, すなわち $\psi(s)$ が Riemann ゼータ関数となる場合には, もともとの Poisson の和公式が得られるのである.[8] この場合, $\beta(y)$ の計算結果は

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} x^{s-1}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\pi^{s-1/2}\zeta(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} x^{s-1}\,ds = 2\cos 2\pi x$$

となる.

Ferrar は, さらに [He, '36] を引用して, $\psi(s) = \sum \tau(n) n^{-s}$ が Hecke 型の関数等式

$$R(s) = \gamma R(k-s), \quad R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\psi(s)$$

を満たすとき, 上記の議論を適当に修正して対応する和公式が得られることにも注意している.[9]

この段階で Poisson 型和公式と Dirichlet 級数の関数等式の関係はかなり明瞭になった. すなわち, Dirichlet 級数の解析接続がある程度なされれば, 和公式の存在を主張することはできるが, もう一歩踏み込むと

美しい和公式の存在は関数等式と結びついている

と標語的に言うことができる.

---

[8]Ferrar は Hamburger の仕事 [H, '22-ii] を引用してはいない.

[9]Hejhal [Hej, '79] には $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する重さ $4k$ の楕円モヂュラ形式

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

に対応する和公式の具体形

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a(n) f(n) &= \frac{(2\pi)^{4k}}{(4k-1)!} a(0) \int_0^{\infty} f(x) x^{4k-1}\,dx \\ &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{2k-1}} \int_0^{\infty} f(x) x^{2k-1} J_{4k-1}(4\pi\sqrt{nx})\,dx\end{aligned}$$

が与えられているが, Ferrar がすでに気がついていることは指摘されていない. だが, Hejhal が [F, '36] を知らなかったとは考えにくい. また, 次章で説明する Bochner の仕事にも触れていない.

4 Hamburger の後継者としての Bochner

Hamburger の論文 [H, '22-ii] をまっこうから取り上げて, 一般化をはかった論文が S. Bochner の [B, '51] である. §2 で列挙した等式の記号を用いて説明すると, (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (d) という関係が, ここで一般化されている.

4.1 関数等式とテータ関係式の同値性

Mellin 変換で与えられる 2 つの関数

$$\chi_1(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\Phi(x)\,dx, \quad \chi_2(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\Psi(x)\,dx$$

を考える. この積分は, ともに, $\Re(s) \geq \sigma_0$ で絶対収束しているとする.

定義 1. χ_1, χ_2 が

(1) $\mathbb{C}$ のある有界閉集合 S の外部 D で正則な関数 $\chi(s)$ が存在して,

$$\chi(s) = \begin{cases} \chi_1(s) & \text{if } \Re(s) \gg 0, \\ \chi_2(\delta - s) & \text{if } \Re(s) \ll 0, \end{cases}$$

(2) 任意の有界帯領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ において一様に

$$\lim_{|t|\to\infty} \chi(\sigma + it) = 0$$

の 2 条件を満たすとき, χ_1, χ_2 は関数等式

$$\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$$

を満たすという.

定義 2. 関数 $P(x)$ は次の条件を満たすとき, **剰余関数** といわれる :

(1) $0 < x < +\infty$ 上の可微分関数で, ある $\gamma > 0$ に対し

$$P(x) = \begin{cases} O(x^{-\gamma}) & \text{as } x \to 0, \\ O(x^{\gamma}) & \text{as } x \to +\infty. \end{cases}$$

(2) 関数 $\chi_r(s)$, $\chi_l(s)$ を

$$\begin{aligned} \chi_r(s) &:= \int_0^1 P(x)x^{s-1}\,dx \quad (\Re(s) > \gamma) \\ \chi_l(s) &:= -\int_1^\infty P(x)x^{s-1}\,dx \quad (\Re(s) < -\gamma) \end{aligned}$$

によって定義すると, これらは定義 1 で考えられていた領域 D 上に同一の関数として解析接続され, 任意の有界帯領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ において一様に

$$\lim_{|t|\to\infty} \chi_r(\sigma + it) = 0$$

を満たす.

Theorem 4.1 $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ が関数等式 $\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$ $(=: \chi(s))$ を満たすとき, S を囲む D 内の曲線 C に対して

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \chi(\zeta)x^{-\zeta}\,d\zeta$$

は剰余関数であり, *modular relation (テータ関係式)*

$$\Phi(x) = x^{-\delta}\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + P(x)$$

が成り立つ.

Theorem 4.2 逆に, 可微分関数 Φ, Ψ が

(1) *Mellin* 変換 χ_1, χ_2 は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束する,

(2) 定義 2 の意味の剰余関数 $P(x)$ があって, 上の定理の *modular relation* が成り立つ

の 2 条件を満たすならば, 定義 1 の意味で関数等式

$$\chi_1(s) = \chi_2(\delta - s)$$

が成り立つ.

Corollary 4.3 *Dirichlet* 級数

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{\lambda_n}^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{{\mu_n}^s},$$

について *Hecke* の関数等式

$$\Gamma(s)\phi(s) = \Gamma(\delta - s)\psi(\delta - s) = \chi(s)$$

と *modular relation*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = x^{-\delta}\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\mu_n/x} + P(x)$$

は同値である. ここで, $P(x)$ は剰余関数である.

これが, Bochner による (a) $\Longleftrightarrow$ (b) の定式化である.

Symmetric theta relation

Dirichlet 級数の極が $s = 0, \delta$ である Hecke の場合のように, S が $\Re(s) = \delta/2$ によって分離されており, 剰余関数を定義する線積分の積分路 C を $\Re(s) > \delta/2$ に含まれる C_+ と $\Re(s) = \delta/2$ に関してそれと対称な ($\Re(s) < \delta/2$ に含まれる) C_- との合併となっているとしよう.

このとき,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\chi(s)x^{-s}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(\delta-s)x^{s-\delta}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds - \frac{1}{2\pi i}x^{-\delta}\int_{C_1}\chi(\delta-s)\left(\frac{1}{x}\right)^{-s}\,ds \end{aligned}$$

となる. そこで,

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(s)x^{-s}\,ds, \quad N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\chi(\delta-s)x^{-s}\,ds$$

とおくと, 剰余関数は

$$P(x) = M(x) - x^{-\delta}N(1/x)$$

の形となり, テータ関係式は

$$\Phi(x) - M(x) = x^{-\delta}\left\{\Psi\left(\frac{1}{x}\right) - N\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

と対称な形を持つことになる.

この両辺が Laplace-Stiltjes 積分として

$$\Phi(x) - M(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dR(\lambda), \quad \Psi(x) - N(x) = \int_0^\infty e^{-\mu x}\,dS(\mu)$$

と表されれば, テータ関係式はさらに

(7)
$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dR(\lambda) = x^{-\delta}\int_0^\infty e^{-\mu/x}\,dS(\mu)$$

と表現できる.

4.2 テータ関係式と和公式

次に Bochner は, テータ関係式 (7) から, それを特殊な場合として含む和公式を導く. 適当な関数族に含まれる $f(\lambda)$ に対して, 次の定理が成立する.

Theorem 4.4 関数 $R(\lambda)$ (resp. $S(\mu)$) が任意の帯領域 $0 \le \lambda \le \lambda'$ (resp. $0 \le \mu \le \mu'$) で有界変動だとする. また, ある正定数 $\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \lambda^{-\alpha}\,|dR(\lambda)| < \infty, \quad \int_1^\infty \mu^{-\beta}\,|dS(\mu)| < \infty,$$

だとする. このとき, 和公式

$$\int_0^\infty f(\lambda x)\,dR(\lambda) = x^{-\delta}\int_0^\infty g\left(\frac{\mu}{x}\right)\,dS(\mu)$$

が成り立つ. ここで, $0 \le \lambda < \infty$ 上の関数 $f(\lambda)$ に対して $g(\mu)$ は *Hankel* 変換

$$g(\mu) = \mu^{-\frac{1}{2}(\delta-1)}\int_0^\infty J_{\delta-1}(2(\mu\lambda)^{1/2})\lambda^{\frac{1}{2}(\delta-1)}f(\lambda)\,d\lambda$$

で与えられる. (少なくとも *formal* には) この変換は *self-inverse* である.

もちろん, Bochner は上の和公式を成り立たせるような関数族を具体的に与えているが, その条件は省略する.

指数関数は Hankel 変換に関して不変である, すなわち, 次の公式が成り立つことに注意しよう：

$$e^{-\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{2}(\delta-1)} \int_0^\infty J_{\delta-1}(2(\lambda\mu)^{1/2})\mu^{\frac{1}{2}(\delta-1)} e^{-\mu}\, d\mu.$$

したがって, テータ関係式 (7) は和公式の特別な場合となる.

さらに, この場合には Riesz 和型の公式（§2 の (d) の類似）は

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^x (x-\lambda)^\gamma\, dR(\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu}\right)^{(\delta+\gamma)/2} J_{\delta+\gamma}(2(x\mu)^{1/2})\, dS(\mu).$$

という形を取り, その成立条件も明確にしている.

この公式の $\gamma = 1$ の場合が Hamburger や Hecke による Riemann ゼータ関数の特徴づけの証明の基礎となった等式に相当するものであり, 別種のゼータ関数の一意性への応用もあるだろうと Bochner は注釈をつけている. だが、次に紹介するように、Bochner は実際には Siegel の証明の一般化という方向で, ゼータ関数の関数等式による特徴付けを進めたのである。

4.3 関数等式による ゼータ関数の特徴付け（Siegel の証明の一般化）

[BC, '56], [CM, '57] は, 関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\phi(s) = \pi^{-(\delta-s)/2}\Gamma\left(\frac{\delta-s}{2}\right)\psi(\delta-s), \quad (\delta \in \mathbb{R})$$

の一般 Dirichlet 級数解

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n\lambda_n^{-s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n\mu_n^{-s},$$

を, Siegel [Si, '22] の方法を一般化して（すなわち, §2 (c) 型の等式に基づく方法で）, 研究した.

Bochner [B, '58] は, さらに進んで,

$$(2P\pi)^{-s/2}\Delta_1(s)\phi(s) = (2P\pi)^{s/2}\Delta_2(-s)\psi(-s)$$

の形の関数等式を問題にした. ここで, Gamma 因子は

$$\Delta_1(s) = \prod_{f=1}^G \Gamma(p_f s + c_f), \quad \Delta_2(s) = \prod_{g=G+1}^H \Gamma(p_g s + c_g),$$

の形とする. ただし,

$$p_1, \ldots, p_H > 0, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_H = 1$$

である. また, P は

$$P = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \cdots p_h^{p_h}$$

の形とする.

注意： 一般 Dirichlet 級数の Gamma 因子付き関数等式は上の形に標準化できる.

さて, 一般 Dirichlet 級数 $\phi(s)$, $\psi(s)$ が上の関数等式を満たすというのは, 定義 1 と同じように定義する. このとき, Bochner [B, '58] の結果は次のようにまとめられる：

- $p_1 + \cdots + p_G \neq p_{G+1} + \cdots + p_H$ ならば関数等式に解はない.
- $p_1 + \cdots + p_G = p_{G+1} + \cdots + p_H$ ならば, 関数等式の解に対して部分分数分解公式 (§2 の (c) 式) の一般化が成り立つ. すなわち, $r \gg 0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n {\mu_n}^r e^{-2\pi\mu_n z} = K_r(z) + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{\lambda_n}^r} \Phi_r\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \tag{8}$$

が成り立つ.[10] ここで, $K_r(z)$ は剰余関数であり, $\log z$ のリーマン面上に解析接続できる. $\Phi_r(z)$ は Gamma 因子のみに依存する右半平面で正則な関数.

- 上の一般化された部分分数分解公式 (8) において $x = 0$ での特異性を調べることから, 次のようなことが導かれる.

  (1) $\phi(s)$, $\psi(s)$ の少なくとも一方が有限 Dirichlet 級数ならば, 関数等式を満たすことはない.

  (2) ある $\epsilon > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{2\pi\mu_n\epsilon} < \infty$ となれば, 関数等式を満たすことはない.

  (3) $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 0 を持つならば,[11] 関数等式は満たさない.

  (4) $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 1 を持つとき,

  $$k = \min\{n \mid \lambda_{n+1} > 1\}$$

  とおくと, 関数等式は高々 k 個の一次独立な解しか持たない.

  (5) $\mu_{n+1} - \mu_n = 1$ $(n \gg 1)$, かつ $\sup_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 1$ または $\sup_n(\lambda_{n+2} - \lambda_n) > 1$ ならば, 関数等式の解は $\zeta(s)$ と Dirichlet の L 関数を用いて explicit に決定できる.

---

[10] §2 の (c) 式を z について r 階微分したものに相当. 一般には, Dirichlet 級数の収束や剰余関数についてより強い仮定を課さなければ, (c) 式の直接の拡張は得られない. Hecke 型の関数等式の場合は [Wal, '22] がこのような等式を導いているそうである.

[11] $\{\mu_n\}$ が Polya 密度 δ_μ を持つ $\iff \inf_n(\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = \delta_\mu$.

4.4 Bochner と Hecke の対比

この論説では Hecke に端を発する研究は取り扱わないのだが, Bochner と対比したときの Hecke の研究の特徴をここで見ておくことは意義があると思われる.

第 1 に, これまでの議論（たとえば, Hamburger の第 2 論文, 第 3 論文など）で見てきたように, ゼータ関数の関数等式による特徴付けというのは, Dirichlet 級数の形をある程度制限することによって始めて可能になるということに注意しよう（p. 4 参照）. Hecke の場合には, $\lambda_n = n$ の形の Dirichlet 級数に限る, いいかえれば数論的なものに興味を集中することによって, 関数等式による良い特徴付けを得ているのである. この点は, Bochner と Hecke の重要な違いである.[12] Hecke の研究の数論的性格とは対照的に, Bochner の研究は Hamburger が提起した主題を, 解析の問題と見てとことんつきつめたものと言えよう.

第 2 に Hecke においては, 平行移動と反転の生成する群（モヂュラー群）の導入が内容をきわめて豊かなものとしている（Hecke 作用素, 表現論との関係など）. 一般 Dirichlet 級数に対応するテータ級数の類似物は, もちろん平行移動不変性は持たないから, この部分も数論性が効いている.

第 3 に Bochner の multiple Gamma factor を持つ関数等式は具体例を構成しようとすれば多変数の保型形式を考えるところであるが, Bochner の考察はある意味で 1 変数化したところで物事を見ているので, 多変数保型形式のような方向へは発展できない. 袋小路に入ってしまった感がある. Bochner の研究と前後して始められた代数群論や表現論の発展により保型形式の研究がリニューアルされてくる中で, Bochner の研究は興味深いのではあるが忘れられていったようである. （Serre に示唆された Vigneras の研究 [Vi, '77] は, 数少ない例外の一つである. ）

5 ゼータ関数の関数等式と Poisson 型和公式

§3 において, Ferrar の仕事に基づいて Poisson 型の和公式の存在とゼータ関数の関数等式の関係を説明した. この節では次の発展として, テータ級数の Mellin 変換として得られるゼータ関数の積分表示を利用して, 局所関数等式を媒介にして Poisson 型和公式とゼータ関数の関数等式を結び付ける idea を説明する. この idea は, T. Kubota [Ku, '74], L. Ehrenpreis and T. Kawai [EK, '82] などに由来する.[13] それを図式化すると, 次のようになる.

$$\begin{tikzcd} \text{和公式} \arrow[rr, "\text{特殊化}"] \arrow[dr, "\text{Mellin 変換 + 局所関数等式}"'] & & \text{テータ関係式} \arrow[dl, "\text{Mellin 変換}"] \\ & \text{関数等式} & \end{tikzcd}$$

要点は, Riemann ゼータ関数の Riemann による第 2 証明に含まれる議論を次のように一般化することである. 適当な関数族に含まれる $f(x)$ に対し, ある積分変換 $f \mapsto \hat{f}$ が定

[12] [H, '22-ii] の冒頭部分でも Riemann ゼータ関数の特徴づけにとって, 数論的条件が本質的であることが述べられている.
[13] もっと遡れるのではないかという気もするが, よく分からない.

義されて Poisson 型和公式

(9) $$\sum_n a_n f(tn) = t^{-\delta} \sum_n b_n \hat{f}(t^{-1}n)$$

が成り立っているとしよう.

$$Z(\{a_n\}, f; s) = \int_0^\infty t^{s-1} \sum_n a_n f(tn)\, dt, \quad \zeta(\{a_n\}, s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}, \quad \Phi(f; s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt$$

とおく. これらの積分は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束するとする. ここで, 項別積分が正当化されるとすれば,

$$Z(\{a_n\}, f; s) = \zeta(\{a_n\}, s)\Phi(f; s), \quad Z(\{b_n\}, \hat{f}; s) = \zeta(\{b_n\}, s)\Phi(\hat{f}; s),$$

という Dirichlet 級数 $\zeta(\{a_n\}, s)$, $\zeta(\{b_n\}, s)$ の積分表示が得られる. Riemann ゼータ関数の場合に倣って, $Z(\{a_n\}, f; s)$, $Z(\{b_n\}, \hat{f}; s)$ の積分範囲 $(0, \infty)$ を $(0, 1)$ と $(1, \infty)$ とに分割して, $(0, 1)$ に対応する部分に和公式 (9) を適用すれば, $Z(\{a_n\}, f; s)$, $Z(\{b_n\}, \hat{f}; s)$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されて, 関数等式

(10) $$Z(\{a_n\}, f; s) = Z(\{b_n\}, \hat{f}; \delta - s)$$

が得られる. ここで, $f = f_0$ を上手に選ぶと, $\Phi(f_0; s)$, $\Phi(\hat{f}_0; s)$ が明示的に計算され, 特に

$$\gamma(s) = \Phi(f_0; s)/\Phi(\hat{f}_0; \delta - s)$$

が Gamma 関数 $\Gamma(s)$ や指数関数などを用いて書き表されたとする. 関数等式 (10) を $f = f_0$ に適用すれば, 直ちに,

(11) $$\zeta(\{b_n\}; \delta - s) = \gamma(s)\zeta(\{a_n\}, s)$$

が出てくる. (10) の $f = f_0$ という特殊ケースから得られた (11) を (10) に戻してやれば, 一般の f に対して $\Phi(f; s)$ の関数等式

(12) $$\Phi(f; s) = \gamma(s)\Phi(\hat{f}, \delta - s)$$

が得られる. これは, 無限素点における局所関数等式というべきものである.

このようにして, Poisson 型和公式の存在から (10) を介して, ゼータ関数の関数等式 (11), 局所関数等式 (12) が得られる. この考察を逆転させると, ゼータ関数の関数等式 (11), 局所関数等式 (12) が前もって得られていれば, (10) が導かれ, この等式の逆 Mellin 変換として Poisson 型和公式を証明できると考えられる.

言い換えると, ある積分変換に対して局所関数等式が存在すれば, その局所関数等式から定まる Gamma 因子に対して関数等式を満たすゼータ関数が存在することと, その積分変換について Poisson 型和公式が成り立つこととが同等である, という見通しが得られる.

以下, この考え方を具体的に実行した研究を列挙する. この辺りはもう少し詳しく述べたいが, 余裕がないので, 簡略な説明に止めざるを得ない.

(1) 久保田富雄氏は 60 年代から 70 年代の前半にかけて, 高次冪剰余の相互法則と結びついたテータ級数の類似物を Eisenstein 級数の留数として構成し, さらに Weil 表現の理論の一般化を行った. その過程で ([Ku, '74]), 古典的なテータ級数の変換公式 (テータ関係式) の場合の Poisson の和公式に相当する和公式を高次のテータ級数に一般化しているが, その証明に上記のアイディアが用いられている. すなわち, 高次テータ級数の変換公式からゼータ関数 (の族) の関数等式を導き, Bessel 関数で表される関数

$$k(z) = n\pi^2 \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1} |z| \left(\left|J_{-1/n}(2\pi z^{n/2})\right|^2 - \left|J_{1/n}(2\pi z^{n/2})\right|^2\right)$$

を用いて定まる積分変換に対する局所関数等式と組み合わせて, Poisson 型和公式を証明している.

(2) Poisson の和公式は, 超関数の言葉を用いると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n) \text{ の Fourier 変換} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(y-m)$$

と表現できる.[14] Ehrenpreis and Kawai [EK, '82] では, $\mathbb{Z}$ に台を持つ超関数であり, その Fourier 変換もまた $\mathbb{Z}$ に台を持つようなものは, Poisson の和公式に多項式係数の線形微分作用素を働かせて得られるものに限ることを証明し, この事実に基づいて Hamburger の定理の別証明を与えた. このとき, ゼータ関数の関数等式から Poisson 型の和公式を前記のアイディアにもとづいて導いている. [EK, '82] では, さらに, 虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のゼータ関数にこの議論を拡張している.

(3) [EK, '82] の結果は, Yoshimoto [Y, '86] により, 一般の代数体の場合に拡張された. また, [Sa, '89] は, 正定値二次形式の Epstein ゼータ関数に対する Hamburger 型の特徴付け定理を同様の方法で示した. これらの論文では, 問題となっている積分変換は Fourier 変換であり, Fourier 変換に対する和公式は本質的に Poisson の和公式しかないことが, ゼータ関数の特徴付けのポイントになっている.

注意: (1) 以上の研究では, ゼータ関数の関数等式から多次元ベクトル空間内の格子上の和に関する Poisson 型和公式が導かれている. この場合, 1 変数のゼータ関数の関数等式を 1 つ用いただけでは, 高次元格子上の和公式は得られず, (保型形式や表現付きの) ゼータ関数の族を考察する必要がある.

(2) ここで説明した局所関数等式を媒介にしてゼータ関数の関数等式と和公式を結びつける方法は, 概均質ベクトル空間の場合に特にうまく機能する. このとき, (1) で触れた保型形式付きゼータ関数は, [Sa, '94], [Sa, '96] などで一般的に研究されている.

[14] このような観点から, ゼータ関数と Poisson の和公式の関連を調べた研究に, Kahane and Mandelbrojt の [KM, '58] がある.

参考文献

[V, '04-i] G. Voronoi, Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21**(1904), 207–267.

[V, '04-ii] G. Voronoi, Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers, *Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg* (1904), 241–245.

[H, '21-i] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Erste Mitteilung), *Math. Z.* **10**(1921), 240–254.

[H, '21-ii] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Zweite Mitteilung), *Math. Z.* **11**(1921), 224–245.

[H, '22-i] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Dritte Mitteilung), Die Funktionalgleichung der L-Reihen, *Math. Z.* **13**(1922), 283–311.

[H, '22-ii] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, *Math. Ann.* **85**(1922), 129–140.

[Si, '22] C. L. Siegel, Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichng der Riemannschen Zetafunktion, *Math. Ann.* **86**(1922), 276–279.

[Wal, '22] Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1922.

[He, '23] E. Hecke, Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung, *Math. Z.* **16**(1923), 301–307.

[F, '34] W. L. Ferrar, Summation formulae and their relation to Dirichlet's series, *Compositio Math.* **1**(1934), 344–360.

[He, '36] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, *Math. Ann.* **112**(1936), 664–669.

[F, '36] W. L. Ferrar, Summation formulae and their relation to Dirichlet's series II, *Compositio Math.* **4**(1936), 394–405.

[He, '38] E. Hecke, Lectures on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms (Lectures at Universities of Michigan and Princeton in 1938), Vandenhoeck and Ruprecht, 1983.

[T, '51] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, 1951.

[B, '51] S. Bochner, Some properties of mudular relations, *Ann. of Math.* **53**(1951), 332–363.

[BC, '56] S. Bochner and K. Chandrasekharan, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.* **63**(1956), 336–360.

[CM, '57] K. Chandrasekharan and S. Mandelbrojt, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.* **66**(1957), 285–296.

[B, '58] S. Bochner, On Riemann's functional equation with multiple Gamma factors, *Ann. of Math.* **67**(1958), 29–41.

[KM, '58] J. P. Kahane and S. Mandelbrojt, Sur l'equation fonctionelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **75**(1958), 57–80.

[W, '64] A. Weil, Sur cetains groupes d'operateurs unitaires, *Acta Math.* **111**(1964), 143–211.

[Ku, '74] T. Kubota, On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transformation, *J. reine angew. Math.* **268/269**(1974), 180–189.

[Vi, '77] M. -F. Vignéras, Facteurs gamma et équations fonctionelles, in "Modular functions of one variable VI", Lect. Notes in Math. **627**(1977), 79–103.

[Hej, '79] D. A. Hejhal, A note on the Voronoi summation formula, *Monatshefte Math.* **87**(1979), 1–14.

[Su, '80] T. Suzuki, Weil type representations and automorphic forms, *Nagoya Math. J.* **77**(1980), 145–166.

[EK, '82] L. Ehrenpreis and T. Kawai, Poisson's summation formula and Hamburger's theorem, *Publ. RIMS, Kyoto Univ* **18**(1982), 413–426.

[Y, '86] A. Yoshimoto, On a generalization of Hamburger's theorem, *Nagoya Math. J.* **98**(1986), 67–76.

[Sa, '89] F. Sato, The Hamburger theorem for the Epstein zeta functions, Algebraic Analysis Vol.II, Academic Press, 1989, 789–807.

[Sa, '94] F. Sato, Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms, *Proc. Ind. Acad. (K.G.Ramanathan memorial issue)* **104**(1994), 99–135.

[Sa, '96] F.Sato, Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* 45(1996), 177–211.