2つの固定中心による引力の問題の歴史
Jacobiの解法をめぐって

中根美知代

1.はじめに

空間内に2つの固定された重力中心と運動する質点がある．質点の質量は，重力中心に較べて十分小さいとし，重力中心から影響を受けるが，それらに影響は与えないとする．また，2つの重量中心の間には相互作用がないとする．このような条件のもとで質点はどのように運動するか．これを考察するのが，「2つの固定中心力による引力の問題」と呼ばれるものである．

こうした条件をみたす運動は，もちろん自然界に存在しない．おそらくは，3体の運動を解析するためのとりかかりとして考えられたもので，自然現象を近似的に解析するというよりも，数学的な関心からとりあげられた問題であろう．1760年頃，Eulerが提示したといわれている．いわゆる「条件付き3体問題」のなかには，Lagrangeの3角形の解のように，18世紀中に解決されたものもあったが，この問題は1840年代，Jacobiによるまで，完全に解かれることはなかった．問題の解決にあたって，JacobiがいわゆるHamilton-Jacobiの偏微分方程式を活用していることから，彼らの理論の有効性が発揮される問題として，力学の教科書にも紹介されている（Arnold [1980])(注1)．

ところが，この問題が数学史のなかで登場するのは，ここだけではない．楕円積分論・楕円関数論との関連のなかで，重要な役割を果たすことが，Houzelにより指摘されている（Houzel[1985]）．彼によれば，Lagrangeは，この問題から楕円積分へ導かれたし，Legendre (Legendre [1825-28])もまた，楕円積分の応用として，この問題を扱っている．JacobiがAbelの定理の新しい証明を与えたときも，この問題の考え方を用いたとされている．そうだとすれば，この問題の歴史的意味を，Hamilton-Jacobi理論の強力さを例示したものとして片づけるのでは不十分だろう．

18世紀半ばから19世紀はじめにかけて，楕円関数論や楕円積分論が力学の問題への応用を意図して発展してきたことは，何度となく指摘されている．ところが，両者がどう結びつくかを実際に示した例は，ほとんどない．楕円関数論で数多くの業績をあげたJacobiが，Hamilton-Jacobi理論によって，2つの固定中心による引力の問題を扱うとき，それらの関係の一側面が明らかになるのではないか．このような期待をもって，Jacobiによる2つの固定中心による引力の問題を解決する手続きを考察していきたい．

2 Euler・Lagrange の寄与

Euler は 1760 年のベルリンアカデミーの紀要で，この問題を扱い，ペテルスブルグでの論集で，引き続いて扱っている（Euler[1764-66][1766-67]）．ただしこの報告では Euler の結果には立ち入らず，彼が，質点と２つの中心が同一平面上にある場合のみを扱い，この問題を解くことが２次曲線の求長と関係することを指摘したことを言及するにとどめる．

Lagrange もまた，Euler の影響を受けてこの問題を取り上げ，1766 年から 69 年にかけて，２つのパートからなる論文を発表した（Lagrange [1766-69]）．後半の部分は Euler の論文以降に発表されたものであるが， Lagrange は，Euler の 67 年の論文とは独立に自分の結果を導いたと記している．

Lagrange は第１部で，Euler の問題を３次元に拡張して検討していく．(x, y, z) を質点の位置，P (a, b, c), Q (α, β, γ) を２つの中心の位置とし，

$$u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$$\nu = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

$$f = \sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2}$$

と定義する．A，B を適当な定数係数ととることにより，P，Q 方向に作用する力をそれぞれ $\dfrac{A}{u^2}, \dfrac{B}{\nu^2}$ で表す．$u+\nu=p, u-\nu=q, A+B=M, A-B=N$ とおくことにより，Lagrange はつぎの方程式を得た．

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E}} = \frac{dq}{\sqrt{Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E}}, \qquad (2-1)$$

$(C, D, E$は任意定数$)$

$$dt = \frac{p^2dp}{4\sqrt{Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E}} - \frac{q^2dq}{4\sqrt{Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E}}, \qquad (2-2)$$

$$d\varphi = \frac{fKdp}{(p^2-f^2)\sqrt{Cp^4 + Mp^3 + Dp^2 - Mf^2p + E}} - \frac{fKdq}{(q^2-f^2)\sqrt{Cq^4 + Nq^3 + Dq^2 - Nf^2q + E}}, \qquad (2-3)$$

(φ は PQ を通る軸まわりの角度，$K^2 = -Cf^4 - Df^2 - E$)

これらの方程式を積分することにより，２つの固定中心による引力の問題が解かれることになる．Lagrange は，これらの積分は円錐曲線の求長問題，任意の３次曲線の求長に関係すると記した．Houzel は，Lagrange が (2-1) 式に達したことを指して，楕円積分に導かれたとしている．ここで Lagrange が実際に積分を求めることが出来たのは，以下の場合に限られていた．

ひとつは，$B=0, M=N$ のとき，すなわち，１つの引力中心にむかう１つの力に引かれる状況で,「２つの固定中心による引力」とは言い難い場合である．つぎに，適当な α，β，γ，λ，μ，ν が存在して

$\sqrt{Cp^4+Mp^3+Dp^2-Mf^2p+E}=(p-\alpha)\sqrt{Cp^2+\beta p+\gamma}$

かつ $\sqrt{Cq^4+Nq^3+Dq^2-Nf^2q+E}=(q-\lambda)\sqrt{Cq^2+\mu q+\nu}$

となる場合である．根号内が積分出来るようにするための数学的要請から付された仮定であり，力学的な意味のあるものではない．３つめは $f=\infty, \nu=\infty$ となる場合，すなわち力の引力中心が無限に遠ざかった場合である．

第２論文で Lagrange は，質点が，引力中心 P, Q 方向に，

$$\mathrm{P}\text{から}: 2\alpha p+\frac{\beta f^3}{p^2}, \qquad \mathrm{Q}\text{から}: 2\alpha q+\frac{\gamma f^3}{q^2},$$

の力を受ける場合について考察した．ここでは

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}, \quad q=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},$$

とする．またα,β,γ は適当な定数係数である．Lagrange は２つの力の$2\alpha p$と$2\alpha q$の部分は，２つの中心の中央に向かう，大きさ$4\alpha r$のひとつの力に帰着できることを指摘し,「２つの固定中心P, Q からは距離の２乗に反比例する力を受け，P, Q を結ぶ線分の中央からは，その点と質点間の距離に比例する力をうける場合」として論じている（注2）．Lagrange はこの問題に対しても，$(2-1)$,$(2-2)$, $(2-3)$ に相当する方程式を導き，条件をつけてこれらを解いている．

第２論文で取り上げた問題もまた，自然にある力学現象を解析するためというよりも，距離の２乗に反比例する力に距離に比例する力の項を付け加えてみると，方程式とその積分はどのようになるかといった，問題を数学的に一般化しようとする動機から考察されたものであろう．

Lagrange は,『解析力学』(Lagrange [1788]）で，宇宙の体系を論じるような問題にはどうしても適用できないが，解析学上は興味深く，詳細に論じるに値するとして，上の２つの論文の結果を整理して紹介している．

Lagrange によって，２つの固定中心力による引力の問題が，３次元に拡張され，より一般的な状況まで含めて考察されるようにはなった．また，この問題を契機として，彼は楕円積分論へと導かれていった．しかし，Lagrange は，

きわめて限定された場合に対してしか，方程式を積分できていない．Lagrange は，この問題自体の解決からはまだ遠い地点にあった（注3）．

3. Hamilton-Jacobi の理論

Jacobi による２つの固定中心による引力の問題の解法を検討するに先だって，この問題の解決に有用な方法とされている Hamilton-Jacobi の理論について概観しておこう．

Hamilton-Jacobi の理論には多様な側面があるが，ここでは，常微分方程式系の積分を求めることを，特殊なタイプの１階の非線形偏微分方程式の積分に帰着する方法と規定しておく．具体的には，偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\Big(t,q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial V}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial q_n}\Big)=0 \qquad (3-1)$$

に対して，その完全積分

$$V=V(t,q_1,\cdots,q_n:\alpha_1,\cdots,\alpha_n)+a$$

が知られたならば，$2n$ 個の任意定数α_iとβ_iを持った方程式

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}=\beta_i,\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i \qquad (i=1,\cdots,n)$$

から正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dq_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3-2)$$

の解が得られる，というものである．なお，偏微分方程式（3-1）は求める関数V自体を含んでいない．このような１階非線形偏微分方程式を Hamilton-Jacobi 方程式と呼んでいる．ここに示したような定式化は，Jacobi が『力学講義』第 20 講(Jacobi[1866]) で提示したものである．

ニュートンの運動方程式が，Hを全エネルギーとした(3-2) 式に変形できることを示したのは William Rowan Hamilton である．そして，運動方程式の解は，上のようなタイプの偏微分方程式を解くことにより得られることを示したのも彼である（Hamilton [1834],[1835]）．ただし Hamilton は，Hを全エネルギー，Vは力学の作用積分というように，あくまで力学に限定し，力学の概念を用いて理論構成している．Hamilton のアイデアを整備・拡張し，力学を離れた１階偏

微分方程式の理論としたのが Jacobi であった．この理論を，Hamilton-Jacobi 理論と称するのはこのためである．

Jacobi は一度は，上に見るような理論を作り上げた後，関数Hがtを陽に含んでいない場合について論じている．新しい変数αとWを

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha,$$

$$W = V - (t-\tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - (t-\tau)\alpha \qquad (\tau\text{は任意定数})$$

として導入することにより，偏微分方程式(3-1)は

$$\alpha + H\Big(t, q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\Big) = 0 \qquad (3-3)$$

に置きかわる．この場合は

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t,$$

$$\frac{\partial W}{q_1} = p_1, \cdots, \frac{\partial W}{q_n} = p_n,$$

が正準方程式の解を与える．

このように一般論を整備した後，Jacobi は力学への応用を考える．力学の方程式を解こうとする場合，正準方程式に現れるHは全エネルギーである．保存系では，Hは時間tを陽に含まないから，偏微分方程式(3-3)が使える．また Jacobi は，Tを運動エネルギーとしたとき，関係式$p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$が成り立つことも指摘している．

では，この方法は実際にどのように使えばいいのだろうか．Jacobi 自身が提示している例を見てみよう．

太陽のまわり運動する質量 1 の質点を考える．太陽は座標の原点に静止しているものとし，質点の座標を(x, y, z)とする．当時のポテンシャル関数は，今日のものと符号が逆になっているため，

$$U = \frac{k^2}{r},$$

で表現されている．ここでkは太陽の引力に関する係数，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$である．この場合の Hamilton-Jacobi 方程式は

$$T = \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2\Big\} = \frac{k^2}{r} - \alpha, \qquad (3-4)$$

となる．この方程式を極座標

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

で書きかえる．・を時間微分すると

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\sin^2\varphi\dot{\psi}^2),$$

となる．なお本論文では，時間微分はこの記号で表すことにする．関係式

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}(=\frac{\partial W}{\partial r}) = \dot{r},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}(=\frac{\partial W}{\partial \varphi}) = r^2\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}(=\frac{\partial W}{\partial \psi}) = r^2\sin^2\varphi\dot{\psi}$$

に注意すると，偏微分方程式(3-4)は,

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r} - \alpha. \qquad (3-5)$$

となる．方程式(3-5)は以下のように分解される．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{k^2}{r} - \alpha - \frac{\beta}{r^2}, \qquad (3-6)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta, \qquad (3-7)$$

ここでβは新しい任意定数である．方程式 (3-6) はrのみの関数であり，方程式 (3-7) はrを含まず，φとψの関数である．方程式 (3-6) を積分すると

$$W = \int\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}\cdot dr + F(\varphi,\psi)$$

となる．これを (3-7) に代入すると,

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta$$

で，これは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \beta - \frac{\gamma}{\sin^2\varphi},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2 = \gamma$$

と分解できる．ここでγは新しい任意定数である．第１式はφのみの関数，第２式はψのみの関数であるから，積分は

$$F(\varphi,\psi) = \int\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\cdot d\varphi + f(\psi),\quad f(\psi) = \sqrt{2\gamma}\cdot\psi$$

となる．これらを組み合わせると，求める偏微分方程式の完全解

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}dr+\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}d\varphi+\sqrt{2\gamma}\cdot\psi$$

が得られる．新しい任意定数α'，β'，γ' を導入し

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\alpha'-t,\quad \frac{\partial W}{\partial\beta}=\beta',\quad \frac{\partial W}{\partial\gamma}=\gamma'$$

とおくことにより，運動方程式の解

$$\begin{cases} t-\alpha'=\displaystyle\int\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2k^2}{r}-2\alpha-\dfrac{2\beta}{r^2}}}, \\ \beta'=-\displaystyle\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2k^2}{r}-2\alpha-\dfrac{2\beta}{r^2}}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\dfrac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}, \\ \gamma'=-\displaystyle\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\dfrac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi \end{cases}$$

が求まる．

この問題自体は，Hamilton-Jacobi 理論を持ち出さなくても解くことが出来るので，この理論を有効に使った例とは言い難い．しかし，この例で Jacobi が主張したかったことは，変数が完全に分離する場合には，偏微分方程式が容易に解けること，すなわち運動方程式をはじめとする常微分方程式系を直接解くより，これを偏微分方程式に帰着させて解いた方が容易な場合があるということなのである．18 世紀末から 19 世紀前半にかけて偏微分方程式を研究してきた Lagrange，Pfaff，Cauchy らはいずれも，偏微分方程式をいかにして常微分方程式系に帰着するかを論じてきた．Jacobi の方針は彼らとまったく反対の方向をとるものなのであった．

4. Hamilton-Jacobi 理論と楕円座標

Jacobi の方法をとるにあたってもっとも重要なことは，上手に座標変換をおこなって偏微分方程式を変数が完全に分離する形にすることであろう．解こうとしている偏微分方程式に対してどのような変換を施すかが，この方法を有効

に使えるかどうかの分かれ道となる．しかしJacobiは，個々の方程式に対して適当な変換を見いだすのは実際には難しいという．そして「逆のやり方をしなくてはならない．注目すべき変換とその変換を幸運にも使うことが出来る問題を広い範囲から拾い集めねばならない」として，Hamilton-Jacobi理論と楕円座標を組み合わせた成果を,『力学講義』第26講から第30講で発表した．2つの固定中心による引力の問題も，この枠のなかで論じられている．以下，Jacobiの成果を検討していこう．

4-1．第26講　楕円座標

Jacobiは，天下りにλについてのn次方程式

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}=1, \qquad (a_1<a_2<\cdots<a_n) \qquad (4-1-1)$$

を取り上げることから，議論をはじめている．この方程式のn個の解を大きい順に$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{\mathrm{n}}$と記号づけた後，Jacobiは関係式

$$4(dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2)=M_1d\lambda_1^2+M_2d\lambda_2^2+\cdots+M_nd\lambda_n^2 \qquad (4-1-2)$$

を証明する．ここで

$$M_i=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+n})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\cdots(a_n+\lambda_i)}$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

である．

Jacobiはここで，質量1の質点の活力Tの概念をn次元に拡張すると（4-1-2）式より

$$8T=4(\dot{x}_1^2+\cdots+\dot{x}_n^2)=M_1\dot{\lambda}_1^2+M_2\dot{\lambda}_2^2+\cdots+M_n\dot{\lambda}_n^2$$

となることを指摘する．そこで，ある関数Wが存在して，

$$8T=4(\dot{x}_1^2+\cdots+\dot{x}_n^2)=4\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\Big)^2=4\Big(\frac{\partial W}{\partial x_1}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\partial W}{\partial x_n}\Big)^2$$

となることが示される．一方，

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i}=\frac{1}{4}M_i\dot{\lambda}_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i}=\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \qquad (4-1-3)$$

となるから

$$\dot{\lambda}_i=\frac{4}{M_i}\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

となる．これより，

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial W}{\partial x_i}\Big)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M_i}\Big(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\Big)^2 \qquad (4-1-4)$$

が得られる．以上が Jacobi の手続きである．

なぜこのような計算が提示されているのか，第26講では明確にされていない．以下の講義を先取りして説明しておこう．$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$は楕円座標と呼ばれる，1組の座標となっている．(4-1-4)式は，デカルト座標$x_1, \cdots, x_n$でかかれたWの方程式が$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$座標においてどのように変換されるかを示したものになっている．Jacobi はこの関係式を積極的に使い，いくつかの問題を解いていくのである．

また，Tはそもそもは運動エネルギーであったけれども，Jacobi のこの手続きではTは物理的な意味を持っている必要はない．Jacobi が要請したのは，それが，$\dot{x}_i$の２次形式となっていることだけである．すなわち，Tが２次形式でありさえすれば，(4-1-3)式，(4-1-4)式が成り立つのである．Hamilton-Jacobi の理論が力学にとどまらず，純粋数学の諸問題へ応用される可能性が，ここで示唆されたのだった．

4-2. 第27講　楕円座標の幾何学的意味

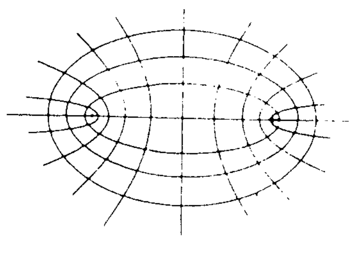
Jacobi はここで 方程式(4-1-1) が幾何学的にどのような意味を持つか，説明する．$n=2$の場合を考える．

$$\mathrm{E}: \frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1} = 1 \quad (a_1 < \lambda_1 < +\infty)$$

は楕円を

$$\mathrm{H}: \frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2} = 1 \quad (-a_2 < \lambda_2 < -a_1)$$

が双曲線を表していることがわかる．



焦点を共有する楕円と双曲線

a_1, a_2 を一定にし，λ_1, λ_2を変化させると，これは共通焦点の楕円の族と双曲線の族を表す．同じ族の曲線どうしは交わることはなく，ある族の任意の曲線は他の族のすべての曲線と直交するので，これらは通常の座標系と同じ性質を持っている．

そこで(x_1, x_2) にかえて，(λ_1, λ_2) を座標系として扱うことができる．これらは，楕円座標と呼ばれ，アイデア自体は Lamé （Lamé[1837]）が導入したものであるが，このように定式化したのが Jacobi であることから，Jacobi の楕円座標

とも呼ばれている．

Jacobi は方程式

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_i}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_i}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_i}=1 \qquad (i=1,2,3)$$

が$-a_1<\lambda_i<\infty$のとき楕円面を，$-a_2<\lambda_i<-a_1$のとき１葉双曲面を，$-a_3<\lambda_i<-a_2$のとき２葉双曲面を表すことを指摘し，この３つの面を組み合わせることにより，３次元の楕円座標 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を構成している．この座標で楕円体は$\lambda_1=const.$として表される．(4-1-2) 式で$n=3$とおくことにより，楕円体上の曲線要素は，

$$\frac{1}{2}d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},\qquad \frac{1}{2}d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}$$

となることが示せる．Jacobi はこの性質を用いて，楕円体上の最短曲線について考察を進めていく．

4-3. 第28講　３軸楕円体上の最短曲線

３軸楕円体上の最短曲線を求める問題については，Jacobi は 1839 年(Jacobi [1839]) にすでに結果を発表しているが，ここでは別の手法による解法を提示している．Jacobi は，楕円体上の最短曲線とは，楕円体上にとどまることが強制されている，ポテンシャル関数を持たない質点の運動の軌跡と捉える．このような質点の運動を規定する Hamilton-Jacobi 方程式を楕円座標でかくと

$$T=2\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\Big(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\Big)^2+2\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\Big(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\Big)^2=h$$

となる．ただし，hは全エネルギーに対応する定数である．この方程式は変数λ_2,λ_3が完全に分離するので，Wを容易に求めることができ，

$$W=\sqrt{\frac{1}{2}h}\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\}$$

を得る．ここで β は任意定数である．

$$t-\tau=\frac{1}{2h}W,\qquad ds=\sqrt{2h}dt$$

に注意すると，最短曲線の長さsは

$$s=\frac{1}{2}\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\}$$

となる．ここでτ, βは任意定数である．

4-4. 第29講　２つの固定中心に向かう引力

Jacobi は，２つの固定中心による引力の問題にとりかかる．まず，運動が (x_1, x_2) 平面上でなされていると仮定し，質量 m, m_1の２つの引力中心が $(0, -\sqrt{a_2 - a_1}), (0, \sqrt{a_2 - a_1})$ の位置に固定されているとする．質量１の質点の位置を (x_1, x_2) とする．この運動に対する Hamilton-Jacobi の方程式

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 = 2U + 2h$$

を楕円座標でかくと

$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}h \quad (4-4-1)$$

となる．ここで h は全エネルギーを表す定数である．ポテンシャルエネルギー Uは，楕円座標で

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - (m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

と表せる．これより方程式(4-4-1)は変数が完全に分離する形になり，

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}$$

が容易に得られ，これから運動方程式の解が求まる．ここで，α，β は任意定数である．これまで，一平面上の運動ですら完全な解が求まらなかったこの問題は，Hamilton-Jacobi の理論で鮮やかに解かれたのであった．

続いて Jacobi は，Lagrange の第２論文を拡張した場合，すなわち，質点が２つの固定中心とその２点を結ぶ直線上の任意の個数の点から引かれる場合にも，ポテンシャル関数の取り方を工夫すれば，この方法が適用されることを指摘した．ここで扱われているのは質点が空間内を運動する場合であるが，質点と引力中心を結ぶ軸で定められる面の上での２次元的な運動と，この面がその軸のまわりに回転しているとの条件を組み合わせて論じられており，まったく一般の場合が考察されているわけではない．

最終的にJacobi は，質点が空間内で運動する場合の，２つの固定中心による引力の問題をとりあげる．この場合 Hamilton-Jacobi 方程式は

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2U + 2h$$

となる．ここで円柱座標系を導入し

$$y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi$$

とおくと，方程式は

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2U + 2h$$

となる．ここでUにおいてφが現れないならば，

$$W = W_1 + \alpha\varphi$$

とおくことができる（注4）．U は中心力場のポテンシャル関数であるから，この仮定は自然であろう．

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha$$

となるから，W_1に関する偏微分方程式は

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 = 2U - \frac{\alpha^2}{r^2} + 2h \qquad (4-4-2)$$

となる．こうして，３次元の問題を２次元に帰着することができた．Jacobi は (x, r) 座標が，(x_2, x_1) 座標に相当すると述べたうえで，

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{x_1^2} = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2 - a_1}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2-a_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{1}{a_1+\lambda_1} - \frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}$$

を求め，(4-4-2) 式の右辺に代入し方程式を導いた．これもまた変数が完全に分離する形になり，この解は

$$W_1 = \int d\lambda_1\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}$$
$$+ \int d\lambda_2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}$$

となる．ここで $f = a_2 - a_1$である．新しい任意定数 β'，α'，τ を導入し

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\partial W_1}{\partial \beta}, \quad \alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \varphi, \quad t - \tau = \frac{\partial W}{\partial h}$$

とおくことにより，２つの固定中心による引力の問題の解が，３次元の場合も得られた．こうして Jacobi は，Euler 以来未解決だった難問を解いた数学者として，歴史上に位置づけられることになった．確かにここで用いられているのは，Euler も Lagrange も知り得なかった Hamilton-Jacobi の理論である．ただし，この解決を Hamilton-Jacobi 理論の成果と呼ぶことの是非については，終章で検討したい．

4-5．第30講　Abel の定理

この報告の目標であった，２つの固定中心による引力の問題は第 39 講で一応解決した．しかし『力学講義』には同様の手法，すなわち Hamilton-Jacobi 方程式と楕円座標の組み合わせによって解決出来る問題がもう一問提示されている．超楕円積分の場合の Abel の定理の証明である．Jacobi は『力学講義』に先だって，この定理の証明を与えているが，ここでなされているのは，Hamilton-Jacobi 方程式

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=2h$$

を楕円座標を使って表し，その積分を求めることにより得られた証明である．Jacobi は，Lagrange は２つの固定中心による引力の問題を考察することにより，Abel の定理の証明の特別な場合に達したと述べているが，この報告では深く立ち入らないことにする．

5．おわりに

Hamolton-Jacobi の理論とは，常微分方程式を非線形１階偏微分方程式に帰着して解く方法と一般的には考えられている．２つの固定中心力の問題の解決にあたって，Hamilton-Jacobi 理論が決定的な威力を発揮したことは間違いない．しかし，非線形１階偏微分方程式が容易に解けるためには，それを変数が完全に分離する形に帰着せしめる変数変換が不可欠である．逆に言うと，そのような変数変換が見つからない以上，Hamilton-Jacobi 理論は，有効性を発揮できないのである．Jacobi の功績は，このことを自覚的に捉えたことであろう．この問題の解決にあたっては，Hamilton-Jacobi 理論とともに，Jacobi の楕円座標の導入が決定的な役割を与えている．Jacobi がこの問題の解けた要因は，この２つであった．

楕円座標を積極的に活用するアイデアは，力学だけから出てきたとするより，

楕円関数論・楕円積分論といった数論的な考察をするうちにJacobiが思いついたとする方が自然である．２つの固定中心による引力の問題という力学の課題の解決に数論から持ち込まれた楕円座標が不可欠ならば，力学と数論とを結びつけうるひとつの視点がこの問題で示されたことになる．

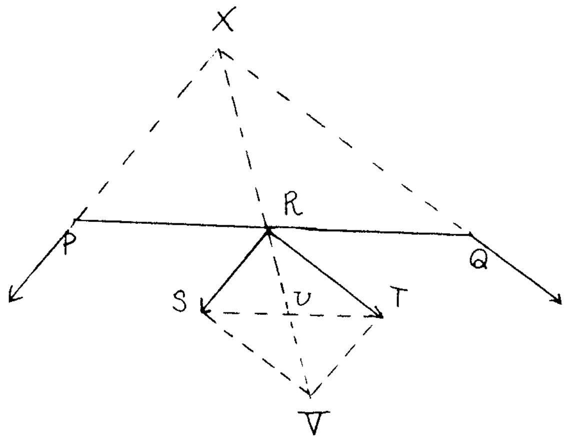
第26講から第30講からうかがわれるように，Jacobiの関心は，Hamilton-Jacobi理論で力学の問題を解くことから離れて，この２つの組み合わせが使える問題に向いていた．ただし，Hamilton-Jacobiの理論自体，力学から生まれたものであるから，方程式を導くにあたってはTを運動エネルギーとする関係式$p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$が不可欠のものとして使われている．Jacobiは運動エネルギーに相当する項を２次形式とみなしてもこの関係が成り立つことに気づき，Hamilton-Jacobi方程式から力学的な描像をぬぐい去った．Tに相当するものを純に粋数学的な２次形式と扱うことにより，Hamilton-Jacobi方程式で記述できる問題が，力学の課題にとどまらず，数論的な課題，幾何学上の課題というように拡張されたのである．これらの問題を楕円座標による変換と組み合わせて解くというのが，Jacobiの問題関心であった．このなかのひとつとして，２つの固定中心力による引力の問題が例示されているにすぎない．

Jacobiの力学研究において，彼独自の新しい概念が持ち込まれたというところはほとんどない．Jacobiの寄与はHamiltonの力学形式の整備に終始している．この整備がどういう意味を持って行われたかを考察するのが，Jacobiの力学を研究するうえでの論点となる．Jacobi個人の問題関心からすれば，それは，力学を離れた問題，おそらく数論にまで関連してくることだろう．『力学講義』のこの部分は，Jacobiの視点を集約している箇所なのかもしれない．

注

(注1) Whittaker[1977] には，別の方法による証明が与えられている．

(注2) 右の図において，P，Qを2つの引力中心，Rをその中点，Xを質点の位置とする．$|XP| = p, |XQ| = q, |XR| = r$ とおく．XがP方向に引きつけられる力を平行移動したものの大きさを $|RS| = 2\alpha p$, Q 方向に引きつけられる力の大きさを $|RT| = 2\alpha q$ とする．$\triangle XPS$ と $\triangle RST$は相似であるから，UをSTの中点とすると$RU = 2\alpha r$となる．RSとRTを合成した力をRVとすると，これは平行四辺形$RSVT$の対角線となる．したがって $|RV| = 2|RU| = 4\alpha r$ となる．



(注3) Cayley が，1766 年の問題に対して，角運動量保存則に相当する積分をつけ加えることにより，見通しのよい結果を提示した．(Cayley[1858])

(注4) このようにおけることを Jacobi は『力学講義』第20講で証明している．

文献

Arnold, V.I.,
[1980] 『古典力学の数学的方法』（1980）岩波書店．
Cayley, A.,
[1858] "On Lagrange's Solution of the Problem of Two Fixed Centres," *Quarterly Mathematical Journal*, **2** (1858), pp.76-83.
Euler, L.,
[1764-1766] "De motu corporis ad duo centra virium fixa atracti," *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **10**, (1764 publ.1766), pp. 207-241; and **11** (1765 publ.1767), p.152,p.184; Opera Omnia(2) **6**, pp.209-246 and pp.247-273.
[1766-1767] "De motu corporis ad duo centra virium fixa atracti," *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **11**, (1764 publ.1766) 152-184; Opera Omnia(2) **6**, pp.209-246 and pp.247-273.
Hamilton,W.R.,
[1834] "On a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.*, Part 2, (1834), pp.247-

308. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.103-1-161.
[1835] "Second Essay on a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.* Part 1,(1835), pp.95-144. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.162 -211.
Houzel, C.,
[1985] "楕円関数と Abel 積分," デュドネ編『数学史』第８章（1985），岩波書店，pp.457-581.
Jacobi, C. G. J.,
[1837] "Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen," *Journ. Reine Angew Math.*, **17**, (1837), pp.97-162.=in *Werke* **4**, pp.57-127.
[1839] "Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den veschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution," *Journ. Reine Angew Math.* **19** (1839), 309-313; Werke **2**, pp.59-63.
[1866] *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.
Lagrange, J. L.,
[1766-69] "Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, *Miscellanea Taurinensia* **4** (1766-1769): Oeuvres **2**, pp.65-121.
[1788] *Mécanique Analytique*, 2 vols. 1788 Paris = Œuvres **11, 12**.
Lamé, G.,
[1837] "Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, *Mem. Savants Etrangers. Acad. Sci. Paris, Sci. Math. Phys.* (2) **5**, pp.147-183.
Legendre, A. M.,
[1825-1828] *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, **1**(1825), **2**(1826), **3**(1828).
Whittaker, E.T.,
[1977] 『解析力学（上)』(1977) 講談社.