第五問題研究史 I

杉浦 光夫（津田塾大）

§0 はじめに

この報告では、ヒルベルトの第五問題の研究史を述べる。この I においては、ヒルベルトの問題意識から出発し、L.E.J.ブラウアーの先駆的研究を経て、フォン・ノイマンによる画期的な研究によって、ヒルベルトの問題意識から離れて、位相群の中で（解析的）リー群を、位相多様体であるような位相群（局所ユークリッド群）として特徴付けるという形に新しく第五問題が定式化された次第を述べる。

この新しい定式化の下での第五問題は、コンパクト群の場合にはフォン・ノイマン，アーベル群の場合にはポントリャーギンによって、肯定的に解決された。

ここまでが 1940 年以前に得られた第五問題の主要結果で、この I ではここ迄を扱う。第二次大戦後の第五問題の新しい発展は II で扱う。

筆者は 1954 年に第五問題に関する報告 [24] を書いたが、それは直前に行われた山辺の最終解決をニュースとして伝えることを主な目標にしたもので，不備な点が多い。今回新たに文献を読直してこの報告を書いたので，以前の [24] は絶版と

する。

§1. ヒルベルトの研究

ヒルベルトは第五問題を、「リーの連続変換群の理論は，問題の函数に対する微分可能性の仮定なしで，どこまで到達できるか？」という形に表現した。[6] ヒルベルトがこの問題を提出したのは彼自身の「幾何学の基礎について」[7]という研究に触発されたと考えられる。この論文では、平面ユークリッド幾何学と双曲型平面非ユークリッド幾何学を、その運動群に関する三つの公理で特徴づけている。ここでは運動の平面への作用は連続とされているが，微分可能性や解析性は全く用いていない。

ヒルベルトは、ここでは平面幾何学を展開すべき舞台としての「平面」を即物的に数平面R^2またはその部分集合をとり、それをΠとする。その各点Aの「近傍」として，あるジョルダン閉曲線の内部でAを含むものをとる。10年程後に、ハウスドルフ『集合論綱要』([31])は，近傍系による位相空間の定義を与えるが、ヒルベルトのこの試みはその先駆と言えるであろう。ΠからΠへの同相写像で向きを変えないもののある集合Gで次の三つの公理をみたすものの元を運動と呼ぶ。特に一点Mを不変にする運動をMを中心とする回転と呼ぶ。

公理 I. 「平面」Πの運動の全体の集合Gは群を作る。

Mと異なる一点Aをとるとき，Mを中心とするすべての回転によるAの像全体の集合をMを中心とする真円と呼ぶ。

公理 Ⅱ どの真円も無限個の点から成る。

Πの三点 A, B, C の近傍 α, β, γ をとるとき，$A^* \in \alpha$, $B^* \in \beta$, $C^* \in \gamma$ ならば三点 $A^* B^* C^*$ は ABC の近傍 $\alpha \beta \gamma$ 内にあるという。三つの近傍 α, β, γ が共に任意に小さくとれるとき，近傍 $\alpha \beta \gamma$ は任意に小さくとれるという。

公理 Ⅲ 三点 $A\ B\ C$ の任意に小さい近傍 $\alpha \beta \gamma$ 内の三点 $A^* B^* C^*$ を三点 $A' B' C'$ の任意に小さい近傍 $\alpha' \beta' \gamma'$ 内の三点 $A^* B^* C^*$ に移す運動があるとき，三点 ABC を丁度 $A' B' C'$ に移す運動がある。

このとき，ヒルベルトは次の定理を証明した。

定理 公理Ⅰ, Ⅱ, Ⅲをみたす平面幾何学は，ユークリッド幾何学であるか，ボヤイ・ロバチェフスキーの双曲型非ユークリッド幾何学である。

証明の細部に立入る余裕はないが，その方針に触れておく。ここではこの幾何学における円周と直線にあたる「真円」と「真直線」の諸性質を導き，最終的にはこの幾何学で二辺夾角の合同定理が成立つことを証明するのがこの論文の大筋である。「真直線」を定義するには、先ず半回転と線分の中点を定義し、それを用いて次のように定義する。「真直線とは

二点を基にして、順次中点をとることと、そうして得られた点を中心とする半回転を行って新たに得られる点の全体に、この集合の集積点をすべて付加して得られる集合である。」この定義から、真直線について次のような諸性質が得られる。「真直線は連続曲線である。」，「真直線は自分自身と交わらない。」，「二つの真直線は高々一つの点を共有する。」「真直線はその上に中心を持つ任意の円周と交わる。」，「任意の二点を通る真直線が必ず存在する。」。そしてこれらの性質を用いて合同定理が証明される。これから、この幾何学は平行線公理が成立つとき、ユークリッド幾何学で、そうでないとき双曲型非ユークリッド幾何学となることがわかる。

すなわちヒルベルトは、平面の運動群の性質に基づいて平面ユークリッド幾何，双曲型非ユークリッド幾何を特徴付けることに成功したのである。その際注意すべき点として彼は運動の両連続性はフルに用いているが，その微分可能性は全く用いていないことが挙げられる。こうしてヒルベルトは，平面運動群という極めて特別な例についてであるがリーの連続変換群に対し作用の連続性のみを用い，微分可能性を用いずに重要な幾何学的結論を導くのに成功したのである。この論文の発表は1902年であるが，1900年当時既にヒルベルトは、その構想を持っていてそれが第五問題提出の重要な動機

となったと考えられる。

§2 低次元群の研究――ブラウアーその他

ヒルベルトの研究に続く第五問題の研究としては、L.E.J.ブラウアーの1909・1910年の研究[1]I, IIがある。ここでは1次元および2次元多様体に連続的に作用する変換群が変換の作用の微分可能を仮定しないで研究されている。このような変換群について、作用の微分可能性（解析性）を仮定した場合の研究は既にリーによってなされていた。

例えば1次元多様体に作用するリー変換群は、数直線上の平行移動群，アフィン変換群，1次分数変換群の三つの変換群の一つと相似であることをリーは証明した§10。リーの立場は局所的である。ここで二つのリー変換群が相似であるとは、変数（作用する空間の座標）と径数（リー変換群の座標）双方についての局所微分（解析的）同相写像によって、一方から他方の作用に移ることを言うのである。このとき変換群は局所同型で、その引き起す無限小変換のリー環は同型となる。例えば円周の回転群（$SO(2)\cong U(1)$）は、回転角を座標にとれば数直線の平行移動群と相似で$SO(2)$は$\mathbb{R}$と局所同型である。リーの研究では微分可能性の仮定が本質的で，リー変換群の無限小変換（一階同次偏微分作用素）の間の括弧積がどうなるか

が決め手となる。

ブラウアー[1]は、Iの冒頭でいくつかの定義を与えている。最も基本的なのは、n次元（位相）多様体の定義で基本的にはn次元数空間R^nの有界領域の一対一連続像と考えられている。ただしこれだけでは不十分という認識があり、連結でないものも許容し、さらに境界を付加したり、適当な同一視によって商空間を作ったりすることを認めている。当時はワイルが「リーマン面の理念」[29]において初めて面（2次元多様体）や1次元複素解析多様体の正確な定義を与える直前であったので、ブラウアーの与えた多様体の定義は漠然としたものであった。そこには局所座標の概念がなく、また微分可能多様体の概念もない。

またブラウアーは、n次元多様体Mに作用するr次元連続群Gを、次のように定義した。GはMからMへの全単写連続写像の作る群で、G自身はあるr次元多様体HからGへの全単写連続写像ϕの像で、ϕは各閉集合上一様連続となっているものとする。

基本的な多様体の定義が明確でないので、このブラウアーの論文は現代的な観点からはいくつか問題点がある。しかしこの状態の中で、ブラウアーは相当立入った研究を行った。例えば1次元多様体に作用する1次元連続群は実数の加法群

Rの連続準同型像となり、従って無限小変換から生成されることが証明されている。次にブラウアーは、1次元多様体に作用するn次元連続群の作用を調べ、$n=1,2,3$の場合に作用の標準的な形を定めている。この過程でリーの指摘した三つの型の群が自然に現われる。そして$n\geqq 4$のとき、n次元連続群は、1次元多様体に(effectiveに)作用することはできないことが示される。

そして1次元多様体Mに作用するn次元連続群Gはn個の1次独立な無限小変換を持ち、それらがリー環を張ることから、リーの理論[11]Ⅲ. p.365−369を用いてGの作用はあるリー変換群Hの作用と相似となることがわかる。このときGは解析的リー群Hと局所同型だからそれ自身解析的リー群となる。

こうしてブラウアーは1次元多様体に作用する連続群に対して、第五問題が肯定的に解決されることを示したのである。しかし彼の解では、証明にリーの理論を用いている。この点が、リーの理論を全く用いないヒルベルトの結果と異なっている。

[1]Ⅱにおいて、ブラウアーは2次元多様体に作用する連続群について研究している。その末尾にこの論文の結果によって2次元多様体に作用する連続群を数え上げることができる

のでそれを次の論文で実行すると予告している。しかしこの数え上げの論文は結局発表されなかったようである。また[1] Iの§1の終りの方で、2次元多様体に作用する連続群でリー群でないものは存在しないという言明がなされているが、そのことの証明は [1] I, II では与えられていない。

このブラウアーの研究を受継いだ研究として、ケレキャルト[9]がある。ここではブラウアーの平面トポロジーに関する一つの定理（Translationssatz）[2] を用いて、ケレキャルトは連結な2次元連続群は $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, $\mathbb{T}^2$, 直線上のアフィン変換群の単位元成分（$\mathbb{R}^\times_+$ と $\mathbb{R}$ の半直積）の四つしかないことを示した。これらはすべてリー群であるから連結な2次元連続群はすべてリー群である。

またモストウ[16]は2次元多様体に推移的に作用するリー群の分類を行った。そこではリー環の生成元の形に応じて、30個の subcase に分けて考察されている。subcase I, 1 はリー環が2次元可換リー環の場合で、$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, $\mathbb{T}^2$ の三つの局所同型な群が含まれる。

またモンゴメリ[14]およびモンゴメリ・ジピン[15]ではそれぞれ3次元および4次元の局所ユークリッド位相群は、すべてリー群であることが証明されている。この二つの論文が現われた1940年代後半には多様体論、トポロジー、位相群論等

が十分発達していたので、それらを活用して完全な証明が与えられている。

§3 新しい出発点――フォン・ノイマンの研究

1920年代は、リー群研究の歴史において重要な転回期であった。すなわちリー以来専ら局所的な考察に限定されていた理論が、ワイル[30]によって打破され、リー群を大域的な存在として取扱うという視点が確立したのである。ワイルはコンパクト半単純群の研究において、このような大域的な視点が有効であることを群全体での積分や基本群の考察を活用して、指標公式を証明することによって明示した。このワイルの大域的リー群論に示唆されて1925・26年にシュライヤー[22][23]は位相群の概念を導入し被覆群の一般論を作った。さらにワイルは有限次元既約表現の分類定理(最高ウエイトとの対応)を証明するために、コンパクト・リー群上の積分作用素に、ヒルベルト・シュミットの理論を適用し、コンパクト・リー群上の調和解析の基本定理(ペーター・ワイルの定理[17])を証明した(杉浦[25]参照)。なお1933年にハールが(第二可算公理をみたす)任意の局所コンパクト群に対し、右または左不変測度(ハール測度)の存在を証明したのでペーター・ワイルの理論は可算基を持つ任意のコンパクト群に適用可能となった。[5]

このような一般論の進歩によって、リーの局所理論を対象

として提出された第五問題も大域的な立場から見直されることになった。その先鞭をつけたのがフォン・ノイマンの研究[27][28]であった。その主要な結果は次の三つの定理である。

定理1（[27]定理1）複素一般線型群$GL(n, \mathbb{C})$の閉部分群Gは、リー群である。

定理2（[28]）実数の加法群$\mathbb{R}$の平面$\mathbb{R}^2$への連続変換群としての作用で実解析的でないもの、C^1級でないものが存在する。

定理3（[28]定理1）位相多様体であるようなコンパクト位相群（コンパクト・局所ユークリッド群）は、リー群である。

定理1は、$GL(n, \mathbb{C})$の部分群Gについて閉集合であるという位相についての条件を付加するとき、Gはリー群になるという解析性についての結果が導かれるという点で第五問題に連なる。またこの定理はE.カルタン[32]によって線型群$GL(n, \mathbb{C})$でない一般のリー群の閉部分群に拡張され、リー群論の基本定理の一つとなっている。またこの定理1はフォン・ノイマンのこの方面でも最も重要な結果である定理3の証明にも用いられた。

定理1の証明は、行列変数の指数函数，対数函数の性質に

基づく初等的なものである。

$GL(n, \mathbb{C})$の閉部分群Gに対し、フォン・ノイマンはその無限小環$\mathfrak{J}$を定義した。Gの点列$(A_p)_{p\in N}$である0に収束する正数列$(\varepsilon_p)_{p\in N}$が存在して、極限

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p-E)=U \quad (E\text{は単位行列})$$

が存在するようなものをすべて考え、このとき生ずる極限U全体の集合を$\mathfrak{J}$とする。このとき$\mathfrak{J}$は実ベクトル空間で、$U, V\in\mathfrak{J} \Rightarrow UV-VU=[U, V]\in\mathfrak{J}$となる。即ち$\mathfrak{J}$は$n$次複素行列全体の作る実リー環$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$の部分リー環である。このとき行列の指数函数$\exp$は$\mathfrak{J}$における$0$のある近傍を$G$における単位元$E$のある近傍の上に写す解析的同相写像である。これによってEのある近傍で定義される局所座標（標準座標）に関し積の演算は解析的になる。$(\exp X)^{-1}=\exp(-X)$だから逆元をとる写像も標準座標に関し解析的になる。

定理2、定理3は、第五問題の研究史における転回点となった。リーの理論では、群の作用を受ける空間の変数と群の元を表わす径数は対等に扱われていた。しかし第五問題ではこの二つには本質的な差があることを初めてフォン・ノイマンは特別な場合に示したのであった。変換群G自身も、右または左移動によってGの変換を受ける空間と考えることができるが、

この場合の作用は、単純推移的で非常に特別なものである。一般の多様体Mに位相群Gが連続に作用する場合，Gの作用が推移的ならば，MはGの閉部分群Hによる商空間G/Hとなり，Mの構造はGで規制される。例えばGがリー群ならばG/Hも解析的多様体となる。しかしそうでない場合には，Mの構造はそれに非推移的に作用する群からは，あまり強い規制を受けない。

フォン・ノイマンは，このような事情を利用して，定理２の例を作った。彼は２次行列を用いてこの例を示している。こゝで記法を簡明にするために，２次元数空間$\mathbb{R}^2$を$\mathbb{C}$と同一視する。今、$\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$を連続函数とし，実数の加法群$\mathbb{R}$の$\mathbb{C}$上への連続作用を，各$a \in \mathbb{R}$に対し$F_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$なる同相写像

$$F_a(z) = \exp(ia\varphi(|z|))z, \quad z \in \mathbb{C}$$

によって定義する。明らかに$F_a \circ F_b = F_{a+b}$，$F_0 = I$（恒等写像）である。$r_0 > 0$を一つ定めたとき，$\varphi(r) = \max\{r - r_0, 0\}$と置けば，$F_a(z) = z \ (|z| < r_0)$で，$F_a \neq I \ (a \neq 0)$だから一致の定理によって$F_a (a \neq 0)$は$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$の解析写像ではない。すなわちこの例は，$\mathbb{R}^2$の連続変換群であるがリー変換群でない例を与えている。

F_aがC^1級でない例はもう少し面倒であるが、次のようにして得られる。今$z = x + yi$を$(x, y) \in \mathbb{R}^2$と同一視している

のであるが、この座標 (x, y) の代りに別な座標 (u, v) をとり、(u, v) の函数として F_a が C^1 級となったと仮定する。このとき $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ は (u, v) の函数として C^1 級になる。これからフォン・ノイマンは、この場合には $\varphi(r)$ は有界変動であることを示した。従って $\varphi(r)$ として有界変動でない連続函数（例えばワイヤストラスの到る所微分不可能な連続函数 $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ $(0<b<1,\ ab>1+\frac{3}{2}\pi)$ をとり、$\varphi(r)=1+w(r)$ とおく）をとれば、$F_a\ (a \neq 0)$ は C^1 級でない。

一方フォン・ノイマンは、群自身の群演算に対しては、位相的な条件から解析的な結果が導かれる重要な場合があることを定理1, 3によって示した。

以下 G をコンパクト位相群とする。G のハール測度は全体積有限だから、全体積 $=1$ と正規化しておく。このハール測度の存在によって、ペーター・ワイルの理論が G に適用可能となる。フォン・ノイマンはペーター・ワイルの論文の一部を繰返して、$L^2(G)$ における右正則表現の有限次元既約表現への分解を与える $L^2(G)$ の正規直交基底の存在を示している。しかしそれはペーター・ワイルの論文の基本定理（[17], P.751）に含まれているからそれを用いた方がわかり易い。

コンパクト群 G の既約ユニタリ表現（すべて有限次元）の同値類の集合を $\hat{G}$（G の双対）とし、各 $\lambda \in \hat{G}$ に対して、一

つづつユニタリ行列による表現 $A^\lambda \in \lambda$ をとっておく。A^λ の次数を $d(\lambda)$ とし，A^λ の (i, j) 成分を a_{ij}^λ と記す。このときシューアの直交関係から，函数系

$$\mathcal{L} = \{ \sqrt{d(\lambda)}\, a_{ij}^\lambda \mid \lambda \in \hat{G}, 1 \leqq i, j \leqq d(\lambda) \}$$

は、$L^2(G)$ の正規直交系であるが，ペーター・ワイルの基本定理は，「$\mathcal{L}$ が $L^2(G)$ の完全正規直交系である」という内容の定理である。G の右正則表現 R は

$$(R_g f)(x) = f(xg),\ x, g \in G,\ f \in L^2(G)$$

によって定義される。行列の積の定義からすぐわかるように

$$R_g a_{ij}^\lambda = \sum_{k=1}^{d(\lambda)} a_{ik}^\lambda\, a_{kj}^\lambda(g), \quad 1 \leqq i, j \leqq d(\lambda)$$

であるから，行列 A^λ の各行の成分 $(a_{i1}^\lambda, \cdots, a_{id(\lambda)}^\lambda)$ の張るベクトル空間 V_i^λ は，R で不変で $R \mid V_i^\lambda \cong A^\lambda$ となる。従って右正則表現 R は G の各既約表現 A^λ を $d(\lambda)$ 回づつ重複して含む。

ペーター・ワイルは，上の基本定理からコンパクト群 G 上の任意の連続函数は表現函数（$\mathcal{L}$ の元の有限一次結合）で，G 上一様に近似できるという近似定理を導いた。G はコンパクト・ハウスドルフ空間だから正規空間であり，G の相異なる二点 g, h はある連続函数 f で分離される。すなわち $f(g) \neq f(h)$ となる。従って近似定理から g, h は表現函数でも分離される。そこである既約ユニタリ表現 A^λ で $A^\lambda(g) \neq A^\lambda(h)$ となる。

このことを、コンパクト群Gは十分多くの既約ユニタリ表現を持つと表わす。

こゝまでがペーター・ワイルの理論をコンパクト群に適用して得られる一般論である。フォン・ノイマンは一歩進めて、コンパクト群Gが局所ユークリッド的であれば、即ちGがn次元位相多様体であれば、Gは忠実な有限次元表現Bを持つことを証明した。像$B(G)$は、ある$m=d(B)$に対する$GL(m, \mathbb{C})$のコンパクト部分群であるから、定理1により、リー群であり、Bはコンパクト空間からハウスドルフ空間への一対一連続写像だからB^{-1}も連続であり、Bは同相写像である準同型写像だからGと$B(G)$は位相群として同型であり、Gはリー群である。

忠実な表現Bの存在証明の粗筋は次の通りである。

先ず局所ユークリッド的コンパクト群は、コンパクト位相多様体だから第二可算公理をみたし、ヒルベルト空間$L^2(G)$は可分である。従ってその完備直交系は高々可算個の元から成る。そして以下Gが有限群の場合を除外することにすれば、それは丁度可算個の元から成る。そこで上の完備直交系$\mathfrak{A}$において、$\hat{G}=\mathbb{N}$と同一視することができる。

このとき各自然数$m \in \mathbb{N}$に対して、Gの有限次元表現$B^{(m)}$を

$$B^{(m)} = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(m)} = \begin{pmatrix} A^{(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(m)} \end{pmatrix}$$

によって定義する。$B^{(m)}$の次数 $d(B^{(m)}) = L(m)$ は $L(m) = \sum_{n=0}^{m} d(A^{(n)})$ である。$B^{(m)}(G) = G^{(m)}$は、$GL(L(m), \mathbb{C})$ のコンパクト部分群だから、定理1によりリー群である。$\dim G^{(m)} = P_m$ とおきリー群$G^{(m)}$のリー環を$\mathfrak{g}^{(m)}$とする。$G^{(m+1)}$は、$G^{(m)}$と同型なリー部分群を含むから、不等式

$$(1) \qquad P_m \leqq P_{m+1}$$

が成立つ。フォン・ノイマンは(1)のリー群論を用いない初等的な証明を与えている。他に彼は、不等式

$$(2) \qquad P_m = \dim G^{(m)} = \dim (G/K^{(m)}) \leqq \dim G = n$$

であることを示した。フォン・ノイマンはこれをP_m次元数空間$\mathbb{R}^{P_m}$のある領域$\widehat{K}^{(m)}$から、Gにおける単位元1のある近傍Uの上への一対一連続写像αを構成することによって証明した。不等式(1)(2)によって

$$P_1 \leqq P_2 \leqq \cdots \leqq P_m \leqq \cdots \leqq n$$

であるから、上に有界な単調増加数列$(P_m)_{m \geqq 1}$はある$P \leqq n$に収束する。(P_m)は整数列だからこれは次の(3)を意味する。

(3) ある$\bar{m} \in N$が存在して、すべての$m \geqq \bar{m}$に対し、$P_m = P \leqq n$である。

次にフォン・ノイマンは、K.メンガーの「次元論」[12]にある一般分解定理(ルベーグの敷石定理の拡張)およびその逆を用いて、

$$(4) \qquad \dim G^{(\infty)} \leqq P$$

を証明した。右正則表現 $B^{(\infty)}$ は忠実な表現で、G はコンパクト $L^2(G)$ のユニタリ群はハウスドルフ空間だから $B^{(\infty)}$ は G から $G^{(\infty)}$ への同相写像である。従って (4) から

(5) $$n = \dim G \leqq P$$

が導かれ、(3) と合せて次の (6) が得られる。

(6) $P = n$, $\forall m \geqq \bar{m}$ に対し $P_m = n$ である。

このことから、求める次の結果が得られる。

(7) 自然数 $\bar{m}$ が存在して、すべての $m \geqq \bar{m}$ に対し $B^{(m)}$ は G の忠実な表現である。

(7) の証明の方針は次の通りである。先ず先に述べたように P_m 次元数空間 R^{P_m} のある領域 $\tilde{K}^{(m)}$ から、G における単位元 1 のある近傍 U の上への一対一連続写像 a が存在する。$m \geqq \bar{m}$ とし $a, b \in U$ で $B^{(m)}(a) = B^{(m)}(b)$ であるとすると、$a = a(x_1, \cdots, x_n)$, $b = a(y_1, \cdots, y_n)$ となり、$a = \exp(x_1 U_1^{(m)} + \cdots + x_n U_n^{(m)})$, $b = \exp(y_1 U^{(m)} + \cdots + y_n U_n^{(m)})$ と表わされる。ここで $(U_i^{(m)})$ は $G^{(m)}$ のリー環の基底である。U を十分小さくとっておくと、上の指数函数による表示は一意的で $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ となる。従って $a = b$ となり次の (8) が証明された。

(8) 写像 $B^{(m)}$ $(m \geqq \bar{m})$ は、1 の近傍 U 上では一対一である。

$B^{(m)}$ は準同型写像だから次の (9) も成立つ。

(9) 任意の $c \in G$ に対し、$U \cdot c$ 上で $B^{(m)}$ $(m \geqq \bar{m})$ は一対一で

ある。

Gはコンパクトだから有限個の元 $a_1, \cdots, a_r$ が存在して

(10) $$G = \bigcup_{i=1}^{r} U \cdot a_i$$

となる。(9)から各近傍 $U \cdot a_i$ の元 a で $B^{(m)}(a) = E_{L(m)}$ ($L(m)$次単位行列) となるものは高々一つである。従って次の(11)が成立つ。

(11) 表現 $B^{(m)}$ の核 C_m は有限群である。

$B^{(m)}$ の定義から

(12) $$m < n, \quad B^{(n)}(a) = E_{L(n)} \Rightarrow B^{(m)}(a) = E_{L(m)}$$

であるから，包含関係

(13) $$m < n \Rightarrow C_m \supset C_n$$

が成立つ。C_m は有限群だから単調減少列 $(C_m)_{m \geq \bar{m}}$ はある $\bar{m} \in \mathbb{N}$ から先では一定になる:

(14) すべての $m \geq \bar{m}$ に対し，$C_m = C_{\bar{m}}$ である。

任意の $a \in C_{\bar{m}}$ と任意の $m \geq \bar{m}$ に対し (14)より $a \in C_m$ でもあり，$B^{(m)}(a) = E_{L(m)}$ だから $B^{(\infty)}(a) = B^{(\infty)}(1)$ となる。正則表現 $B^{(\infty)}$ は忠実表現だから $a = 1$ を得る。

これで次の (15) が証明された。

(15) すべての $m \geq \bar{m}$ に対し，$C_m = \{1\}$ である。

C_m は表現 $B^{(m)}$ の核であるから次の(16)が成立つ。

(16) すべての $m \geq \bar{m}$ に対し，コンパクト群 G の表現 $B^{(m)}$ は

忠実である。従ってコンパクト群 G は $GL(L(m), \mathbb{C})$ のコンパクト部分群と同型になるから、定理Iによりリー群である。これで定理3が証明された。

§4 ポントリャーギンの研究

§3の初めに述べたように1930年代になると、位相群の研究が盛んになり、ハールやフォン・ノイマンの仕事が発表されたが、それに続いてポントリャーギンの局所コンパクト・アーベル群についての有名な研究[18]が発表された。この仕事のルーツについては、杉浦[26]で詳しく述べたので、ここでは第五問題に関係する部分を紹介するに留めよう。

ポントリャーギンはこの論文の第一基本定理で、第二可算公理をみたす任意のコンパクト・アーベル群とその指標群である離散アーベル群の間の双対定理を証明した後で、連結局所コンパクト・アーベル群の構造定理を第二基本定理として証明している。それは次のような内容である。

第二基本定理　第二可算公理をみたす任意の連結局所コンパクト・アーベル群 Ω は、コンパクト部分群 Δ と $\mathbb{R}^r$ と同型なベクトル群 N の直和である。Δ は Ω の最大コンパクト群で、Ω の任意のコンパクト部分群を含み Ω によって一意的に定まる。ベクトル群 N のとり方は一通りと限らないが、そ

の次元 r は Ω によって一意的に定まる。

この定理の証明のために、ポントリャーギンは二個の補助定理を先づ証明している。その大略を次に紹介しよう。

Lemma 11　Ω を第二可算公理をみたす連結局所コンパクト可換群とするとき、Ω の高々可算個の元から成る離散部分群 A であって、剰余群 Ω/A がコンパクトとなるものが存在する。

証明（[20] 第V章 §35 Lemma 1）$U=-U$ を、Ω における 0 の任意の対称な近傍で閉包 $\overline{U}$ がコンパクトとなるものとする。今 Ω の元の有限集合 $\Delta_r=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ であって次の二条件 (a) (b) をみたすものを考える：

(a) $\sum_{i=1}^{r} n_i a_i \in U \ (n_i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n_i=0 \ (1\leqq i\leqq r)$.

(b) $a_i \in U' = \overline{U}-U$ （U の境界）$(1\leqq i\leqq r)$.

そして Δ_r から生成される Ω の部分群を D_r とする。このとき次の二つの場合が生ずる：

(イ) Ω/D_r はコンパクト、　(ロ) Ω/D_r はコンパクトでない。

(イ)の場合には、$A=D_r$ として Lemma 11 が成立つ。仮定 (a) から $U\cap D_r=\{0\}$ となるから、D_r は Ω の離散部分群となるからである。特に Ω ＝コンパクトの場合には、$A=\{0\}$ で Lemma 11 が成立つ（これは $r=0$, $\Delta_0=\phi$, $D_0=\{0\}$ の場合である）。

Ω がコンパクトでないとき、(a) (b) をみたす $\Delta_1=\{a_1\}$ が

存在することは、Lemma 12 として証明される。

一般にある自然数 r に対し(ロ)が成立つとき $\Omega^* = \Omega/D_r$ に Lemma 12 を適用すると、(a)(b) をみたす $\Delta_1^* = \{d^*\}$ が存在する。$f: \Omega \to \Omega^*$ を標準準同型とし、$f(a_{r+1}) = d^*$ となる a_{r+1} をとり、$\Delta_{r+1} = \Delta_r \cup \{a_{r+1}\}$ とおけば、Δ_{r+1} は (a)(b) をみたすことがすぐわかる。こうして(ロ)の場合には、Δ_r を Δ_{r+1} に拡張できる。

しかしこの拡張は無限回続けることは不可能で、必らず有限回の拡張の後に(イ)の場合となってしまうのである。それを帰謬法で証明するために、無限列 $\Delta_\infty = \{a_n \mid n \in N\}$ であって (a) (b)をみたすものが存在すると仮定して矛盾を導く。仮定(b)から Δ_∞ はコンパクトな $U' = \bar{U} - \bar{U}$ に含まれるから Δ_∞ の点列 $\{a_{n_k} \mid k \in N\}$ で一点 a に収束するものが存在する。このとき $a_{n_k} - a_{n_{k+1}} \to a - a = 0$ $(k \to \infty)$ となるから十分大きい k に対して $a_{n_k} - a_{n_{k+1}} \in U$ となるが、これは仮定(a)に反し矛盾である。こうしてある $s \in N$ に対し Ω/D_s = コンパクトとなり、$A = D_s$ として Lemma 11 が成立つ。

Lemma 13. T が連結な局所コンパクト可換群で、離散部分群 A による剰余群 $T/A = T'$ がトーラス群($(R/Z)^r$ と同型)とするとき T はベクトル群 M とトーラス群 Λ の直和となる。

証明　$r=\dim T'$ とし、$N=R^r$ とすると N の離散部分群 $(\cong \mathbb{Z}^r)$ B であって $T'\cong N/B$ となるものが存在する。このとき N は群 T および T' の普遍被覆群である。シュライヤー [23] の被覆群の理論によって B の部分群 B' が存在して、$T\cong N/B'$ となる。B' は $N=R^r$ の離散部分群なので、ベクトル空間 $N=R^r$ の基底 $(e_1,\cdots e_r)$ を適当にとるとき、

$$B'=\left\{\sum_{i=1}^{k} m_i e_i \,\middle|\, m_i\in\mathbb{Z}\ (1\leqq i\leqq k)\right\}$$

の形となる（ブルバキ「位相」第7章 §1 定理1）。従ってこのとき

$$T\cong N/B'\cong \mathbb{T}^k\oplus \mathbb{R}^{r-k}$$

となる。

Lemma 14　Ω を第二可算公理をみたす連結局所コンパクト可換群で、U は Ω における 0 の近傍とする。このとき U に含まれるコンパクト部分群 Γ が存在して $\Omega/\Gamma\cong\mathbb{T}^k\oplus\mathbb{R}^{r-k}$ となる。

証明　A を Lemma 13 で与えられる Ω の離散部分群で $\Omega/A=\Omega'$ がコンパクトとなるものとする。A が離散群だから 0 の十分小さい近傍 W をとるとき

$$(1)\qquad W\cap A=\{0\}$$

となる。今 0 の対称近傍 $V=-V$ で、$\overline{V}$ はコンパクトで、$\overline{V}\subset U$, $4\overline{V}\subset W$ となるものが存在する。

今、Ωが連結だから $\Omega'=\Omega/A$ も連結である。第一基本定理により、コンパクト可換群 Ω'はある離散可換群 G (Ω'の指標群)の指標群となる。Ω'が連結だから Gは0以外の有限位数の元を含まない(この論文の Appendix 2, Theorem 1c)。Gは可算可換群だから有限生成アーベル群の増加列 $\{H_n \mid n\geq 1\}$ が存在して $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ となる。

いまΩ'におけるH_nの零化群を、$\Phi_n=(\Omega', H_n)$ とおけば、Φ_nはコンパクト群Ω'の閉部分群で、やはりコンパクトである。$f:\Omega\to\Omega'=\Omega/A$ を標準準同型写像とし、$f(V)=V'$ とおく。V'はΩ'における0の近傍で、$V\cap A=\{0\}$ だから fのVへの限定 $f|V$ は一対一写像である。$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n=\{0\}$ だから、十分大きな自然数 m に対し

(2) $$\Phi_m \subset V'$$

となる。また指標群の理論により

(3) $$\Omega'/\Phi_m = H_m \text{ の指標群}$$

となる(定理3として証明されている)。H_mは有限生成アーベル群で、0以外の有限位数の元を含まないからある自然数kに対し

(4) $$H_m \cong \mathbb{Z}^k$$

となる。 (3)(4)から

(5) $$T=\Omega'/\Phi_m \cong \mathbb{T}^k \quad (\text{トーラス群})$$

となる。いま

(6) $\quad \Gamma' = f^{-1}(\Phi_m) \quad \Gamma = \Gamma' \cap \overline{V}$ とおく。

Γ' は Ω の閉部分群で準同型定理から

(7) $\quad \Omega/\Gamma' \cong \Omega'/\Phi_m$

である。さらに次式が成立つ。

(8) $\quad f(\Gamma') = \Phi_m = f(\Gamma)$

(8) の証明、Γ' の定義から $f(\Gamma') \subset \Phi_m$。また f は全写だから、Φ_m の任意の元 x' に対し $x' = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(\Phi_m) = \Gamma'$ が存在するから $f(\Gamma') \supset \Phi_m$ であり、第一の等式が成立つ。また $\Gamma \subset \Gamma'$ 故 $f(\Gamma) \subset f(\Gamma') = \Phi_m$ である。逆に任意の $a' \in \Phi_m$ をとるとき、$\Phi_m \subset f(V)$ だから $a' = f(a)$ となる $a \in V$ が存在する。従って $a \in f^{-1}(a') \in f^{-1}(\Phi_m) = \Gamma'$ であるから、$a \in \Gamma' \cap V \subset \Gamma' \cap \overline{V} = \Gamma$ である。そこで $\Phi_m \subset f(\Gamma)$ も言えて、(8) が証明された。

(1) により $f|W$ は W から $f(W)$ の上への同相写像だから、$\Gamma \subset \overline{V} \subset W$ に対し、Γ と $f(\Gamma) = \Phi_m$ は同相であり、従って

(9) $\quad \Gamma$ はコンパクトである。

(10) $\quad \Gamma$ は Ω の部分群である。

(10) の証明、任意の $x, y \in \Gamma$ に対し $x - y \in \Gamma$ を言う。$f(x-y) = f(x) - f(y) \in \Phi_m = f(\Gamma)$ だから、ある $z \in \Gamma$ が存在して $f(x-y) = f(z)$ となる。従って $f(x-y-z) = 0$, $x-y-z \in \mathrm{Ker} f = A$

となる。一方 $x-y-z\in 3\overline{V}\subset\overline{W}$ だから(1)により $x-y=z\in\Gamma$ となる。

$$(11)\qquad \Gamma'=f^{-1}(\Phi_m)=\Gamma+A$$

(11)の証明　$\Gamma\subset\Gamma'$ 故 $f(\Gamma)\subset f(\Gamma')=f(f^{-1}(\Phi_m))\subset\Phi_m$ で，$f(A)=\{0\}$ 故

$$(12)\qquad \Gamma+A\subset\Gamma'$$

逆に $\Gamma'=f^{-1}(\Phi_m)$ の任意の元 x をとると (8) により $f(x)\in\Phi_m=f(\Gamma)$ だから $f(x)=f(\gamma)$ となる $\gamma\in\Gamma$ が存在し $f(x-\gamma)=0$ 故 $x-\gamma=a\in\mathrm{Ker}\,f=A$ となるから，$x=\gamma+a\in\Gamma+A$ で

$$(13)\qquad \Gamma+A\supset\Gamma'$$

となる。(12)(3)から (11) が得られる。(11)と(5)から

$$(14)\qquad \Omega/(\Gamma+A)\cong\Omega'/\Phi_m\cong\mathbb{T}^k$$

となる。

次に $\Omega/\Gamma=\Omega''$ とおき，$g:\Omega\to\Omega''$ を標準準同型写像とし，$g(A)=A'$ とおく。このとき，次式が成立つ。

$$(15)\qquad g^{-1}(A')=\Gamma+A$$

(15)の証明．$g(A+\Gamma)=g(A)=A'$ だから $A+\Gamma\subset g^{-1}(A')$ である。逆に $g^{-1}(A')$ の任意の元 b をとれば $g(b)\in A'=g(A)$ となるから，$a\in A$ が存在して $g(b)=g(a)$，$g(b-a)=0$，$b-a=\gamma\in\mathrm{Ker}\,g=\Gamma$ となるから $b=\gamma+a\in\Gamma+A$ となる。

(15)により，同型定理から

(16) $$\Omega/(\Gamma+A) \cong \Omega''/A'$$
である。(14)(16)から、

(17) $$\Omega''/A' \cong \Omega'/\Phi_m = \text{トーラス群}$$
である。このとき次の(18)が成立つ。

(18) A'はΩ''の離散部分群である。

(18)の証　$g(V)=V''$とおくと、V''はΩ''における0の近傍であるがこのとき

(19) $$A' \cap V'' = \{0\}$$

なぜならば $A'\cap V''$の任意の元 $x=g(a)=g(v)$, $a\in A$, $v\in V$ に対し、$g(a-v)=0$ だから、$v_1=a-v \in \mathrm{Ker}\, g = \Gamma \subset \overline{V}$ となり $a=v+v_1 \in 2\overline{V} \subset W$, $a\in W\cap A=\{0\}$, $x=g(0)=0$.

(19)により(18)が証明された。

そこで(17)(18)とLemma 13により次の(20)が成立つ。

(20) $$\Omega/\Gamma = \Omega'' = \text{ベクトル群} \oplus \text{トーラス群}$$

(9)(10)(20)により、Lemma 14が証明された。この論文では(10)(18)等の証明が欠けているので[20][13]によりその証明を補った。

Lemma 15　第二可算公理をみたす任意の連結局所コンパクト可換群Ωに対し、コンパクト部分群Δで剰余群Ω/Δがベクトル群となるものが存在する。このときΩの任意のコンパクト部分群Δ'はΔに含まれる。従ってΔはΩの最大コンパ

クト部分群である。

証明　U を Ω における 0 の近傍で、閉包 $\bar{U}$ はコンパクトとなるものとする。Γ を Lemma 14 のコンパクト部分群とするとき、

(1)
$$\Omega' = \Omega/\Gamma = \text{ベクトル群 } M \oplus \text{トーラス群 } \Lambda$$
となる。いま $f: \Omega \to \Omega'$ を、標準準同型写像とし、$\Delta = f^{-1}(\Lambda)$ とおく。$f(\Delta) = \Lambda$ だから準同型定理により

(2)
$$\Delta/\Gamma \cong \Lambda$$
であり、Γ, Λ は共にコンパクトだから

(3)　　Δ はコンパクト部分群である。

そしてこのとき、同型定理により $f: \Omega \to \Omega'$ を標準準同型写像とするとき

(4)
$$\Omega/\Delta = f^{-1}(\Omega')/f^{-1}(\Lambda) \cong \Omega'/\Lambda \cong M \quad (\text{ベクトル群})$$
となる。

いま Δ' を Ω の任意のコンパクト部分群とする。$f(\Delta')$ は Ω' のコンパクト部分群である。今 (1) の右辺の直和分解における第一成分 M への射影を p とすると、p は $\Omega' \to M$ の準同型であり、$p \circ f = \varphi$ は $\Omega \to M$ の連続準同型写像である。実数論のアルキメデスの定理によりベクトル群 M のコンパクト部分群は $\{0\}$ のみである。従って $\varphi(\Delta') = \{0\}$, $f(\Delta') \subset \Lambda$ となるから

(5)
$$\Delta' \subset f^{-1}(f(\Delta')) \subset f^{-1}(\Lambda) = \Delta$$

となる。

オ二基本定理の証明 [20]

いま Δ を Ω の最大コンパクト部分群とする。その存在は、Lemma 15 で保証されて居り、

(1) $$\Omega/\Delta = \text{ベクトル群}$$

である。Ω はオ二可算公理をみたすから、Ω における 0 の近傍の可算基 $\{U_n \mid n \geq 1\}$ が存在する。これは単調減少列であるとしてよい。そこで

(2) $$\Omega = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots, \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

となる。また Ω は局所コンパクトだから各 $\overline{U_n}$ はコンパクトとしてよい。

次に n に関する帰納法によって、Ω の部分群の列 $\{\Omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(\Omega_0 = \Omega)$ であって、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、次の a) b) c) d) をみたすものが存在することを示そう：

a) $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ b) $\Omega_n \cap \Delta \subset U_n$

c) $\Omega_n + \Delta = \Omega$ d) Ω_n は Ω の連結閉部分群

$\Omega_0 = \Omega$ は b) c) d) をみたす。いま b) c) d) をみたす Ω_n が存在したとき、a)–d) をみたす Ω_{n+1} を構成する。このとき先ず

(3) $\Delta_n = \Omega_n \cap \Delta$ は Ω_n の最大コンパクト部分群 Γ_n と一致する。実際 Δ_n は Ω_n のコンパクト部分群だから $\Delta_n \subset \Gamma_n$,

一方 $\Gamma_n \subset \Omega_n \cap \Delta = \Delta_n$ も成立つから $\Delta_n = \Gamma_n$ である。

このとき同型定理と条件 c) および Lemma 15 により

(4) $\Omega_n/\Delta_n = \Omega_n/\Omega_n \cap \Delta \cong (\Omega_n + \Delta)/\Delta = \Omega/\Delta \cong R^r$

となる。すなわち Ω_n/Δ_n の構造は n に依存しない。

Lemma 14 により 0 の近傍 U_{n+1} に含まれるコンパクト部分群 Δ'_{n+1} が存在して

(5) $\Omega_n/\Delta'_{n+1} =$ ベクトル群 $\oplus$ トーラス群 Λ

となる。ここでトーラス群 Λ は，Ω_n/Δ'_{n+1} の最大コンパクト部分群である。いま $f_n : \Omega_n \longrightarrow \Omega_n/\Delta'_{n+1}$ を標準準同型写像とすれば，Lemma 15 の証明からわかるように，$f_n^{-1}(\Lambda)$ は Ω_n の最大コンパクト部分群 $\Delta_n = \Gamma_n$ と一致する：すなわち

(6) $\Delta_n = f_n^{-1}(\Lambda)$.

が成立つ。いま $\Omega'_{n+1} = f_n^{-1}(M)$ とおくとき，$M \cap \Lambda = \{0\}$ だから

(7) $\Omega'_{n+1} \cap \Delta_n = f_n^{-1}(M \cap \Lambda) = f_n^{-1}(\{0\}) = \Delta'_{n+1}$

である。いま

(8) $\Omega_{n+1} = \Omega'_{n+1}$ の単位元連結成分，$\Delta_{n+1} = \Delta'_{n+1} \cap \Omega_{n+1}$

とおく。このとき Ω_{n+1} は条件 a) d) をみたす。また 7), 3) により

(9) $\Delta_{n+1} = \Delta'_{n+1} \cap \Omega_{n+1} = \Omega'_{n+1} \cap \Delta_n \cap \Omega_{n+1} = \Delta_n \cap \Omega_{n+1} = \Delta \cap \Omega_n \cap \Omega_{n+1} = \Delta \cap \Omega_{n+1}$

である。従って(8)により $\Omega_{n+1}\cap\Delta=\Delta_{n+1}\subset\Delta'_{n+1}\subset U_{n+1}$ であり，Ω_{n+1} は条件 b) をみたす。また(6)により

(10) $$\Omega'_{n+1}+\Delta_n=f_n^{-1}(M)+f_n^{-1}(\Lambda)=f_n^{-1}(M+\Lambda)=f_n^{-1}(\Omega_n/\Delta'_{n+1})=\Omega_n$$

となる。一方 $\Delta_n=\Omega_n\cap\Delta$ だから

(11) $$\Delta'_{n+1}=f_n^{-1}(\{0\})=f_n^{-1}(M\cap\Lambda)=f_n^{-1}(M)\cap f_n^{-1}(\Lambda)=\Omega'_{n+1}\cap\Delta_n=\Omega'_{n+1}\cap\Omega_n\cap\Delta$$
$$=\Omega'_{n+1}\cap\Delta$$

である。そこで(10)(11)から

(12) $$\Omega'_{n+1}/\Delta'_{n+1}=\Omega'_{n+1}/(\Omega'_{n+1}\cap\Delta_n)\cong(\Omega'_{n+1}+\Delta_n)/\Delta_n=\Omega_n/\Delta_n$$

となる。一方

(13) $$\Omega'_{n+1}/\Delta'_{n+1}\cong\Omega_{n+1}/\Delta_{n+1}$$

が成立つ。

そこで(13)(12)(4)により

(14) $$\Omega_{n+1}/\Delta_{n+1}\cong\Omega'_{n+1}/\Delta'_{n+1}\cong\Omega_n/\Delta_n\cong\Omega/\Delta=\mathbb{R}^r$$

となる。いま $f:\Omega\to\Omega/\Delta$ を標準準同型写像とするとき，(14)により

(15) $$f(\Omega_{n+1})=(\Omega_{n+1}+\Delta)/\Delta\cong\Omega_{n+1}/\Omega_{n+1}\cap\Delta=\Omega_{n+1}/\Delta_{n+1}\cong\mathbb{R}^r$$

である。従って $f(\Omega_{n+1})$ は，$\Omega/\Delta=\mathbb{R}^r$ の部分群で $\mathbb{R}^r$ と同型であるから，ユークリッド空間の次元の不変性により，$f(\Omega_{n+1})=\Omega/\Delta$ となる。従って任意の $\alpha\in\Omega/\Delta$ に対して，$\beta\in\Omega_{n+1}$ が存在して $f(\alpha)=f(\beta)$ 即ち $\alpha-\beta=\gamma\in\operatorname{Ker}f=\Delta$ となるので、

(16) $\qquad \Omega = \Omega_{n+1} + \Delta$

が成立つ。従って Ω_{n+1} は c) をみたす。以上によって、すべての自然数 n に対し条件 a) b) c) d) をみたす Ω の部分群 Ω_n が存在することが証明された。そこで

(17) $\qquad N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$

とおくと、N は Ω の閉部分群である。そして条件 b) により、$N \cap \Delta \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ で、

(18) $\qquad N \cap \Delta = \{0\}$

が成立つ。次に条件 c) により、任意の $\alpha \in \Omega$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し $\alpha = \beta_n + \gamma_n$ となる $\beta_n \in \Omega_n$, $\gamma_n \in \Delta_n$ が存在する。$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクトな Δ の点列だから、ある元 $\gamma \in \Delta$ に収束する部分列 $(\gamma_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ を持つ。このとき点列 $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\alpha - \gamma_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は $\alpha - \gamma = \beta$ に収束する。各 $k \in \mathbb{N}$ を固定するとき条件 a) により

(19) $\qquad \beta_{n_l} \in \Omega_{n_k} \qquad (\forall l \geqq k)$

である。Ω_{n_k} は閉部分群だから、(19) で $l \to \infty$ として

(20) $\qquad \beta \in \Omega_{n_k} \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$ 即ち $\beta \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{n_k} = N$

となる。そこで $\alpha = \beta + \gamma$ から

(21) $\qquad \Omega = N + \Delta$

が証明された。(18) (20) から $\Omega = N \oplus \Delta$ で (1) によって、$N = \Omega/\Delta$ はベクトル群である。Δ は Ω の最大コンパクト部分

群として、Ωにより一意的に定まる。また$\dim N=\dim(\Omega/\Delta)$も$\Omega$によって一意的に定まる。以上で第二基本定理が証明された。

なお、第二基本定理は、G＝連結という仮定をG/G'＝コンパクト（G'はGの単位元成分）という仮定に拡張された。ただしこのとき、結果は$\Omega=N\oplus\Delta\oplus F$と有限アーベル群$F$がつく（[20]参照）。

第五問題にとって重要なのは、この第二基本定理を用いて証明される第三基本定理である。それは連結かつ局所連結な局所コンパクト・アーベル群の構造を与えるものであり、それから直ちに局所ユークリッド的な（つまり位相多様体である）アーベル群は、リー群であることがわかる。

第三基本定理

第二可算公理をみたす連結かつ局所連結な局所コンパクト・アーベル群Ωは、有限または可算無限個の1次元トーラス群とベクトル群の直和である。

この定理の証明に用いたLemma 17はコンパクト・アーベル群が局所連結とならないための十分条件を与えたものであるが、その証明には一部誤りがある。またそれを訂正して局所連結となるための必要十分条件を与えたポントリャーギンの著書[20]第V章§36 c)の証明にも不完全な所がある。し

かし第三基本定理の結果は正しいことは、著書の第二版[21]の定理として、連結性を仮定しない場合の定理が定理49として証明されていることからわかる。ただしこの第二版は、1954年の発行なので、それを1930年代の研究の証明として掲げることは、いささか時代錯誤的なので証明を省略する。

第三基本定理の系

アーベル群Ωが第三基本定理の仮定の他に、さらに有限次元であれば(特に局所ユークリッド的ならば)、Ωは有限個のトーラス群Tと実数の加法群Rの直和と同型であり、リー群である。

こうして、位相群Ωがリー群となるための必要十分条件が局所ユークリッド的であること(Ωが位相多様体であること)が、アーベル群の場合には証明されたのである。

このようにポントリャーギンは、局所コンパクト・アーベル群の構造定理から第五問題(フォン・ノイマンの意味の)を、アーベル群について解決した。そしてこの観点から、フォン・ノイマンのコンパクト群に対する結果の新しい証明を与えた。これはペーター・ワイルの定理を用いる点ではフォン・ノイマンと同じであるが、ノイマンの証明の後半をコンパクト群の構造定理として精密化し、位相の可算基を持つ有限次元コンパクト群Gは、局所的には局所リー群Lと完全不連結コンパク

ト群Zの直積に同型であることを示したのである。そこでp進体の単数群のような完全不連結コンパクト群Zの存在が、Gがリー群となるために障害となるのである。従ってそれを排除するために、局所連結という条件を導入すればGはリー群となるのである。

この結果をポントリャーギンは1934年にパリのC.R.ノート[19]として先づ発表し、次いで著書[20]で詳細な証明を発表した。著書での主要定理は、次のようなものである。

定理 55

Gを第二可算公理をみたす有限次元コンパクト群とする。このときGは局所リー群であるLと、完全不連結コンパクト正規部分群Zを含み、積$U=LZ$はGにおける単位元eの近傍となる。自然な写像$(l,z)\longrightarrow lz$により、直積$L\times Z$とUは同相であり、Lの元とZの元は可換である。つまりGは局所には局所群として直積$L\times Z$と同型である。特にGが連結のとき，ZはGの中心に含まれる。

定理 56

Gが第二可算公理をみたすコンパクト群とする。さらにGが局所連結かつ有限次元とすればGはリー群である。

証明. Gが有限次元コンパクト群とすると、定理55によりGは局所的には局所リー群Lと完全不連結コンパクト正

規部分群Zの直積となる。このとき次の(1)が成立つ。

(1) もしZが無限群ならば、Gは局所連結でない。

このときGが局所連結であると仮定して矛盾を導く。Gが局所連結ならば、Gにおけるeの近傍 $U=LZ$ は、連結なeの近傍Vを含む。今、仮定によりZは無限コンパクト群だから、eに収束するZの点列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(z_n\neq e)$ がある。従って特に $Z\cap V\ni x\neq e$ となるxがある。

定理55により、Uの任意の元には $u=lz$ $(l\in L, z\in Z)$ と一意かつ連続的に分解される。このとき $z(V)$ は $e=z(e)$ を含むZの連結部分集合であり、一方Zは完全不連結だから $z(V)=\{e\}$ となる。一方上の $x\in Z\cap V$ に対しては $z(x)=x\neq e$ となる。これは $z(V)=\{e\}$ に反し矛盾である。これで(1)が証明された。(1)の対偶をとるとGが局所連結ならばZは有限群となる。このときUは、Lと同相な有限個の集合の直和となるから、LはUの開集合となる。従ってL自身がGにおけるeの近傍となるので、Gは局所リー群であるような位相群だからGはリー群である。

ポントリャーギンは、定理55を証明するために、コンパクト群の列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とその間の準同型写像 $g_n: G_{n+1}\to G_n$ から、(G_n) の(射影)極限という概念を導入した。ペーター・ワイルの定理から、任意のコンパクト群はコンパクト・

リー群の列の射影極限となる。このようにリー群の射影極限となるような局所コンパクト群を考察することは、後に岩澤健吉[8]とA. M. グリースン[4]によって取上げられ、第五問題解決の鍵となった。

こうして30年代に、フォン・ノイマンとポントリャーギンによって、コンパクト群とアーベル群については局所ユークリッド的(位相多様体であること)であればリー群になることがわかった。より抽象的には、局所連結かつ有限次元ならばよいのである。

所でフォン・ノイマンもポントリャーギンも共に、ペーター・ワイルの定理を用いて居り、コンパクト群および局所コンパクト・アーベル群は十分多くの有限次元ユニタリ表現を持つことを用いている。つまり $g \neq e$ となる群 G の元 g に対し $U(g) \neq 1$ となる有限次元ユニタリ表現 U が存在するという事実(このとき G は極大概周期的であるという)を用いている。

所で1936年にH. フロイデンタール[3]は、次の定理を証明した。

定理

連結な局所コンパクト群 G が極大概周期的ならば、G はベクトル群 $\mathbb{R}^n$ とコンパクト群 K の直積と同型である。

この定理は、十分多くのユニタリ表現の存在を基礎に第五問題を研究しようとする路線は、コンパクト群とアーベル群の外には本質的に出られないことを示している。この困難をどのように突破するかが40年代以後の第五問題研究の中心課題となったのである。その模様は次のIIで報告する。

References

[1] L.E.J.Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, I,II, Math. Ann. 67(1909), 246-265, 69(1910), 181-203.

[2] L.E.J.Brouwer, Beweis des ebenen Translationssatzes, Math. Ann. 67(1912), 37-54.

[3] H.Freudenthal, Topologischen Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Ann. of Math. 37(1936), 57-77.

[4] A.M.Gleason, The structure of locally compact groups, Duke Math. J. 18 (1951), 85-105.

[5] A.Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 147-169.

[6] D.Hilbert, Mathematische Probleme, Gött. Nachr., 1900, 253-297, Ges. Abh. III, 290-329.

[7] D.Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. 56(1902), 381-422. 寺阪英孝訳：ヒルベルト幾何学の基礎，現代数学の系譜7，共立出版，1970.

[8] K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. 50(1949), 507-558.

[9] B.Kerékjártó, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg 8(1931), 107-114.

[10] S.Lie, Über Gruppen von Transformationen, Gott. Nachr. 1874, 529-542.

[11] S.Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I,II,II, Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[12] K.Menger, "Dimensionstheorie", Teubner, Leipzig, 1928. (p.251-266)

[13] 壬生雅道，位相群論概説，現代数学3，岩波書店，1976.

[14] D.Montgomery, Analytic parameters in three-dimensional groups, Ann. of Math. 49(1948), 118-131.

[15] D.Montgomery and L.Zippin, Four dimensional groups, Ann. of Math. 55 (1952), 140-166.

[16] G.D.Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Math. 52(1950), 606-635.

[17] F.Peter und H.Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppen, Math.Ann. 97(1927), 737-755.

[18] L.S.Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35(1934), 361-388.

[19] L.S.Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert, C.R. Paris 198(1934), 238-240.

[20] L.S.Pontrjagin, "Topological groups", Princeton Univ. Press, Princeton, 1939. (OriginalRussian edition appeared in 1938.)

[21] L.S. ポントリャーギン, 連続群論 上 下, 柴岡・杉浦・宮崎 訳, 岩波書店, 1957·58 ([20]の第二版, ロシア版, 1954)

[22] O.Schreier, Abstrakt kontinuierlichen Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 4(1925), 15-32.

[23] O.Schreier, Die Verwandschaft stetiger Gruppen im grossen, Abh. Math. Sem. Hamburg 5(1926), 233-244.

[24] 杉浦光夫, ヒルベルトの第五の問題, 月報(後の「数学の歩み」)第1巻 第5号 25-35, 1954, 連合機関紙, 新数学人集団他.

[25] 杉浦光夫, ワイルの群論, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報 4 (1992), 68-97

[26] 杉浦光夫, ポントリャーギン双対定理の生れるまで — 位相幾何から位相群へ, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 11 (1996), 100-134.

[27] J. von Neumann, Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen, Math. Zeit. 30(1929), 3-42.

[28] J. von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 170-1901

[29] H,Weyl, "Die Idee der Riemannschen Fläche", Teubner, Leipzig, 1913.

[30] H.Weyl, Theorie der Darstellungen kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I,II,III und Nachtrag, Math. Zeit. 23 (1924), 271-304, 24(1925), 328-395, 789-791.

[31] F.Hausdorff,"Grundzüge der Mengenlehre", Teubner, Leipzig, 1914.

[32] E.Cartan, "La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs", Mémorial Sc. Math. XLII, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

訂　正

研究所報11の杉浦論文に乱丁がある。すなわち103ページと104ページが入れ替っている。102, 104, 103, 105ページの順に読んで頂きたい。