

幾何学的トモグラフィ

お茶の水女子大学理学部情報科学科 金子 晃

§0. 序

幾何学的トモグラフィとは、R.J. Gardner により導入された言葉で、一様物体、すなわち密度が一定の物体に対する少量データのトモグラフィの数学的研究がその主な内容であるが、Gardner はこれに古典的には積分幾何学に分類されるような諸問題 – その中には戦前の東北大で盛んであったような幾何学も含まれている – をも包摂して、一つの分野として確立しようとする意欲を示している。ここでは狭い意味でトモグラフィと密接に関連した（ただし応用上意味があるかどうかは心許ないが）一様物体のトモグラフィに関連した研究を主に Gardner [10] に従ってざっと紹介する。（ちなみに文献 [10] は凸体の幾何学に関する歴史書のような趣もあり、新旧併せて五百余篇の文献を載せている。）

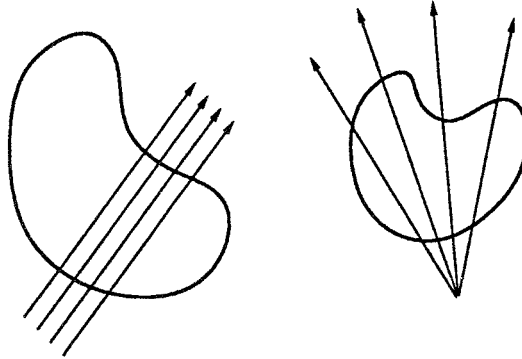


図 1

ここでトモグラフィと云っているのは、物体を透過した X-線の減衰率の観測から元の物体の密度分布を再構成するという伝統的なもので、数学的には線積分の値から函数を再構成する Radon の問題と同値であるが、一様物体の場合にはその密度を 1 とすれば、線積分の値はすなわちこの直線が物体により切り取られる部分の長さに他ならない。従って、問題はこの情報（弦函数）をどの程度与えたらもとの図形の外郭が再構成できるかという、純粋に幾何学的なものに帰着する。平行ビームの場合は、同じ弦函数を持つ線対称な図形を元の図形の Steiner symmetral と呼び、トモグラフィ以前に幾何で用いられていたため、その歴史は非常に古く、Steiner 以前に既に 1780 年代に L'Huilier の論文に現れているとのことである。

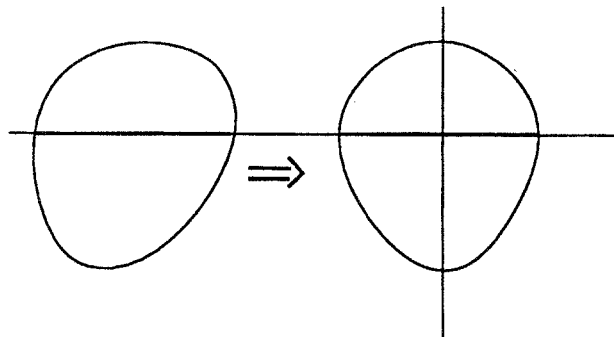


図 2

このように、この種の研究はかなり古い歴史を持っているが、話題としては特殊であった。しかし本物のトモグラフィの発展とともに次第に盛んになり、80年代に入ってから研究者の数も増え始めた。そして95年にはGardnerによる上記タイトルの概観論文がAMS Noticesに現れ、更に教科書がCambridge UPから出版されたので、一応は現代的研究分野として認められたと思ってよいであろう。

Lorentz [22] (1949) は測度論的な興味から、平面の（必ずしも凸とは限らない）幾何図形 F に対して、その y -軸方向の投影 $P(x)$ （すなわち、 F を直線 $x = \text{const}$ で切ったときの切り口の長さ）、及び x -軸方向の投影 $Q(y)$ に相当する二つの函数を与えたときに、以下の結果を示した（原論文は測度論的なので可測集合を a.e. の意味で扱っているが、ここでは普通の図形のように考えて頂いても構わない）。今、 $p(x)$ を $P(x)$ の rearrangement、すなわち、単調減少な函数で $\forall \alpha$ について $\{P(x) > \alpha\}$ と $\{p(x) > \alpha\}$ が常に同じ測度を与えるようなものとし、同様に $q(x)$ を $Q(x)$ の rearrangement とする。記号法がやや異なっているが、後出の図 3 を参照して頂きたい。このとき、

1) 元の F が矛盾無く存在するための条件は、 $\forall x$ において $\int_0^x p(t)dt \leq \int_0^x q^{-1}(t)dt$ が成り立っており、かつ $x = \infty$ では等号が成り立つことである。

2) 元の F が一意に決まるための条件は、 $\forall x$ において $p(x) = q^{-1}(x)$ が成り立っていることである。

Hammer [13] (1961) は、これとは独立に凸体の幾何学の立場から、与えられた平面図形（応用上は一様物体中に生じた凸な穴を想定している）を何個の方向の平行投影データ、あるいは何点からのファンビームデータ（ X 線像）から再構成できるかという問題を提起した。ただしトモグラフィはまだコンピュータでなかったらしく、この言葉は出てこない。

Gardner-McMullen [11] (1980) は、一般の位置にある 4 方向の投影データから凸図形が決定されることを示した。ここでうまくない 4 方向は、正多角形の対角線のなす方向のセットの部分集合とアフィン同値となることも示されている（後出の図 12 参照）。

Volčič [26] (1986) は共線でない任意の 3 点での弦函数、すなわちこれらの点を光源とするファンビームによる切り口の長さが与えられたとき、凸図形が決定されることを示した。また、光源が 2 点 P_1, P_2 の場合には、これらを通る直線が K と交われば、凸図形 K が決定できることも示した。

点光源の場合には、これが一つでも内部にあると、ファンビーム、すなわちこの点から発する半直線と物体との交わりの長さがわかれば、凸図形、あるいは一般にこの点を中心とする星形状は決定されてしまうので、数学的には全く面白くない。そこで実用とは無関係だが、ファンビームと考えずに、与えられた点を通る（両方向に延びた）直線が図形により切り取られる長さを与えて凸図形を決定するという問題が考えられており、同じく Volčič により図形内の二点が凸図形を決定できることが示されている。

Hammer の問題については再構成アルゴリズムはこれからの研究課題である。Lorentz の問題については、その離散化版の再構成アルゴリズムは組み合わせ論的な取り扱いも可能で、以前からいろいろ提案されている。黄 [15] は一意性のある場合に限り最も実用的なアルゴリズムを与えた。小生はまだ見たことはないが、この問題は以上のような研究を全く知らない人たちによりモザイクで再構成図を作るゲームになっているということである。

凸でない一般の図形については、予め与えた有限個の方向では決定できないものが（星形状で）必ず存在することが知られている ([8])。ファンビームについても同様であるが、反例はより複雑な図形となる。Natterer [23] の不完全データを扱った最終章には、凸でない図形に対し、有限個の方向に対する最小二乗法を用いた再構成アルゴリズムが一定程度有効であることを示す数値実験例が載っているが、この数学的正当化（解釈）もまだなされていない。

以下、これらの中のいくつかについてより詳しく解説してゆこう。

§1. 一般図形の二方向投影からの再構成問題

序でも述べたように、この問題は Lorentz の 1949 年の論文 [22] に始まる。George G. Lorentz (1910 -) はドイツの数学者で、函数解析の方では Lebesgue 空間 $L_p(\Omega)$ を一般化した Lorentz 空間 $L_{(p,q)}(\Omega)$ の導入で知られている。これは（一般には n 次元の、或いは更に任意の測度空間上の）可測函数 $f(x)$

に対し、その分布 μ_f と rearrangement $f^*(t)$ を

$$\mu_f(s) = \text{meas}(\{|f(x)| > s\}), \quad f^*(t) = \inf\{s > 0; \mu_f(s) \leq t\}$$

で定まる一変数函数とすると、

$$\|f\|_{(p,q)} := \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

をノルムとして定まる (準) Banach 空間である。特に $L_{(p,p)} = L_p$ となる。rearrangement は F. Riesz 1930 により導入されたもので、同じ分布を持つ函数の中で単調減少な標準的なものを与える操作であり、解析学で種々の不等式を手際よく証明するための高級な手法として良く用いられてきた。その有用性の根拠は L_p ノルムが rearrangement で不変なこと $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ にある。Lorentz の理論はこれを一般化したものである。

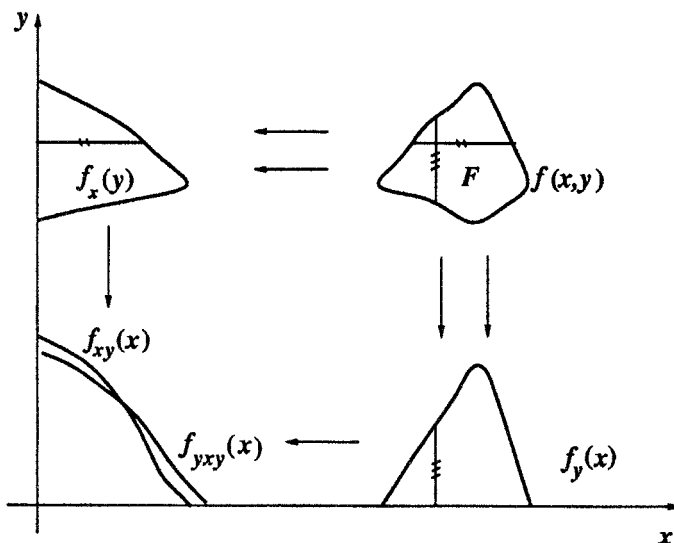


図 3

Lorentz の上記の仕事は 1950 年であるから、我々がこれから紹介する仕事の方が一年早い。従ってそこで用いられている rearrangement の考えは上記の有名な仕事の練習台であったかもしれない。(ただしこれから述べる記号は Kuba-Volčič [21] (1988) によるもので、Lorentz 自身の論文では序で述べたように renormalization の定義はまだ原始的である。) さて F を平面の可測集合とし、 $f(x, y)$ をその定義函数とする。 F の y 軸、及び x 軸に沿う投影 (projection) を

$$f_y(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_x(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

で定める。直観的に云えばこれらはそれぞれ図形 F が直線 $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ から切り取る線分の全長であるが、原論文では F はまともな図形の形をしているとは限らないことに注意されたい。これらを更に、それぞれ x 軸、及び y 軸に沿って投影する。

$$f_{yx}(y) := \lambda_1\{x; f_y(x) \geq y\}, \quad f_{xy}(x) := \lambda_1\{y; f_x(y) \geq x\}$$

ここに λ_1 は一次元の Lebesgue 測度を表す。この両者を比較したいのだが、この前者は x の函数ではなく後者とカテゴリーが異なるので、グラフがほぼ同じになるよう前者を x の函数に変換するため y 軸に沿って再度投影したもの

$$f_{yxy}(x) := \lambda_1\{y; f_{yx}(y) \geq x\}$$

を用意する。これらの函数（のグラフ）の関係は図3を参照されたい。

Lorentz は [22] において、二つの投影データ $f_y(x), f_x(y)$ からもとの F を再構成する問題を設定し、自ら次のような解を与えた：

定理 1) 元の F が矛盾無く存在するための条件は、a.e. x において $\int_0^x f_{xy}(t)dt \geq \int_0^x f_{yx}(t)dt$ が成り立ち、かつ $x = \infty$ においては等号が成り立っていることである。

2) 元の F が一意に決まるための条件は、a.e. x において $f_{xy}(x) = f_{yx}(x)$ が成り立っていることである。

1) の証明は必要性は難しくない。積分論の良い練習問題である。十分性の証明の方は、rearrange されたグラフ下の図形をそれらの共通部分から出発して、それぞれはみ出した部分を測度 0 の集合を除いて互いに合同な正方形の無限列に分割し、それらを帰納的に一つずつ投影データに矛盾を生じないように配置して行くというものである。得られた図形は一般には連結にならない。また、選ぶべき正方形は大きい方から順に取り出せる訳ではないので、実行可能なアルゴリズムとはなりにくい。

図4は矛盾する投影データの例である（非常に説得力があるだろう）。

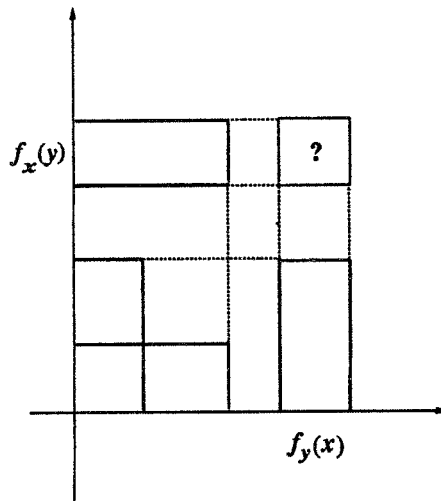


図 4

2) の証明の方が少しややこしい。証明の要点は、もし $f_{xy}(x) < f_{yx}(x)$ となる点があると、そのギャップを利用して F に図5に示されたような部分集合の対 P, Q が存在することを示すことにある。このとき、 P, Q を図のような R, S と交換しても x 軸及び y 軸方向の投影データが変わらないことは明らかであろう。このような組 P, Q, R, S を switching component と呼ぶ。その正確な定義は

$$\exists(a, b) \quad Q = P + (a, b), R = P + (a, 0), S = P + (0, b), \\ P, Q \in F, R, S \notin F \quad (\text{あるいは } P, Q \notin F, R, S \in F)$$

である。ただし Lorentz の論文にはこのように明確な形では書かれていない。

Lorentz の存在証明は無限手続きを含んでおり、離散化が容易な再構成アルゴリズムを与えるものではなかったため、これを与えるための研究がこの後も続いた。それらを通して、図形 F に一意性が成り立つための条件は次のようにいろいろと言いつ換えられることが明らかになって来た。

定理 次は同値である。

0) F は二つの軸方向の投影に関して一意性を持つ。

1) F は switching component を持たない。

2) F は measurably inscribed な長方形の和集合となる。すなわち, F は

$$X \times Y \subset F, \quad CX \times CY \subset CF$$

なる $X \times Y$ の (無限重複) 和として書ける。

3) F の $x = c$ による切り口を y 軸に投影したものを F_c と書くとき, $\lambda_1(F_c) \leq \lambda_1(F_{c'})$ ならば必ず $F_c \subset F_{c'}$ となる。(x 軸への投影に関しても同様である。)

switching component の概念を明確にしたのも Kuba-Volčić [21] である。最後の言い換えは Kuba [20] と Huang(黄) [15] により後述の離散化版の再構成アルゴリズムに関連して独立に明確にされたものであるが, 実は Lorentz の原論文にも定理の証明中に implicit には含まれている (一般の集合では, 包含関係ももちろん a.e. の意味となる)。

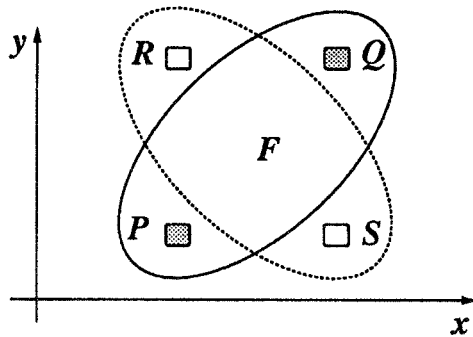


図 5

図 5 は一意性を持たない集合の典型例であるが, 一意性を持つ集合の例を図 6 に示した。結構複雑なものもあるであろう。最後の例では, くり抜かれた円板の片方が上下に一定以上ずれると一意性がくずれてしまう。図 7b 参照。

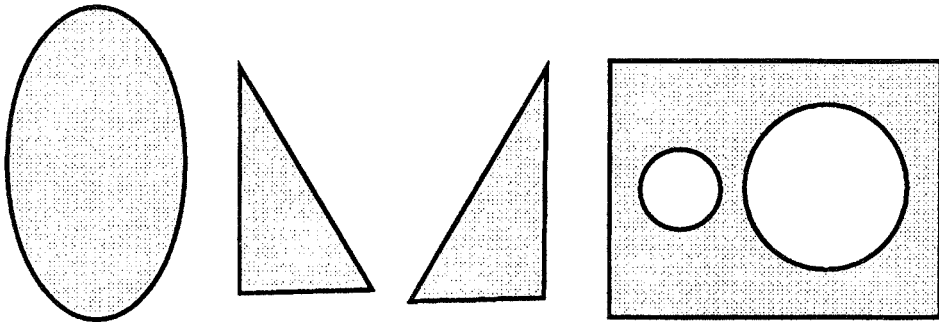


図 6

上述の Kuba-Volčić の論文では, 一意性が有るときに元の集合 F が

$$F = \{(x, y); f_y(x) \geq f_{xy}(f_x(y))\}$$

という式で再構成されることが示されているが, これをプログラムで実現するのはそう直接的ではない。実際にアルゴリズムを実現するには離散化も必要となる。 F の定義関数をピクセルを用いて離散化する

と、0 と 1 を要素とする行列が得られる。(アルゴリズムを実行するには F をどのみち有界とせねばならないので、速くの方の 0 を無視して適当なところで切れれば有限行列となる。)すると再構成問題は、各行及び各列に含まれる 1 の個数がわかっているときに元の行列を見出す、という組み合わせ論的な問題となり、古くから研究されて来た。しかしそちらの方では Lorentz の結果に当たることは知られてはなかったようで、すべての場合を包摂した再構成アルゴリズムは非常に複雑となり、「途中で行き詰まったら解無し」といったアルゴリズムさえ論文になるくらいであった。

最近 Kuba [20] と Huang [15] は独立に、一意性が成り立つときに限った再構成アルゴリズムで実用的なものを与えた。特に Huang のものは、一意性の条件の言い替え 3) を用いて、縦方向の一番長い柱から順に決定して行くもので、容易にプログラムを書き実行できて面白い。Huang-Takiguchi [16] においてこの手続きの安定性も示されているので、離散化やその他の誤差をあまり気にしないで適用できる点もありがたい。図 7a は一意性がある場合、図 7b は一意性が無い場合に両方向への投影データの rearrangement の離散化の共通部分を用いて Huang のアルゴリズムを適用してみたものである。後者では近似再構成像は必ずしももとの図形には収まらないことがわかる。

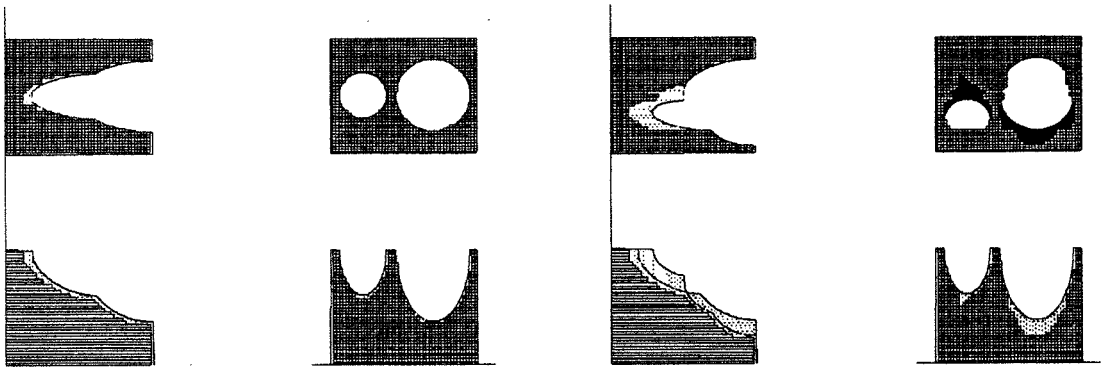


図 7a

図 7b

ちなみに Lorentz は [22] の末尾に、問題の一般化としていろいろ面白いことを提起しているが、その最後で「あらゆる方向の投影データを用いれば図形が決定できるのではないか」と述べている。どうやら Lorentz も Radon の論文を知らなかったようである。

§2. 一般図形の有限個の方向への投影データからの再構成問題

応用上は無理して二方向投影だけから物体を決定するというよりも、もう少し沢山の方向を使って確実に決定するということが重要であろう。一樣物体の場合には、「空間の次元に依存した N があり、適当な N 方向の投影データですべての図形が決定できる」のではないかという推測もあり得るが、事実はその反対である。Gardner [8] はどんな有限個の方向が与えられても、その方向への同一の投影データを持つ二つ以上の異なる図形が存在することを示した。一般に密度一様でない物体については、密度関数の Fourier 像 $\hat{f}(\xi)$ に超平面状の divisor を与えることにより一意性の反例を作るのが普通である(例えば Helgason[14] を見よ)。divisor の個数が増えると \hat{f} の $|\xi| \rightarrow \infty$ での増大度も大きくなり、従ってこのような反例は高周波成分を大きく含むものとなる(即ち、特異性の大きい函数となる)と説明されている。しかし Gardner の反例は普通の図形の定義函数でそのようなものを与えている点で興味深い。

その構成法の要点は次の通りである。まず、座標軸方向の投影に関する switching component の概念を一般化し、与えられた方向の集合 $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ に対し、互いに交わらない有限個の点集合の対 F, G が S -switching component であるとは、 S に属する方向を持つ任意の直線が F, G と常に同じ個数の点で交わることに定める。 S -switching component の存在は方向の個数 m に関する帰納法で簡単に示すことができる。

このようなものが存在すれば、 F, G に属する各点を中心として半径 r の十分小さい円板を描けば、 S に属する方向への投影データがすべて一致する二つの図形

$$F_r := \bigcup_{x \in F} B_r(x) \quad \text{と} \quad G_r := \bigcup_{y \in G} B_r(y)$$

が得られることは明らかであろう。円板の代わりに十分小さいどんな図形をとっても同じことである。

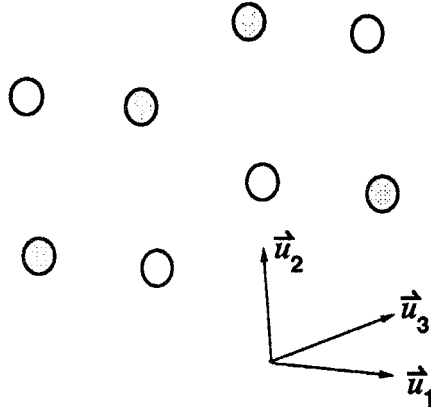


図 8 (Gardner[10] より)

上の例は連結でない図形であったが、これを少し修正すれば星状形 (star shaped) の図形でも反例が作れる。 $F \cup G$ のすべての点を見込める点 O を一つ選び、それを原点とする。($F \cup G$ の任意の 2 点を通る直線の総和の外に点 O をとればよい。) 点 O を内部に含む三角形 T を、辺の方向が O と $F \cup G$ のどの点を結ぶ直線とも一致しないように選ぶ。その相似縮小 rT を $F \cup G$ の各点に平行移動したものを作り、その任意の一つと元の rT の和集合の凸包 (ch で表す) が他の三角形と交わらぬように r を小さく選んでおくと

$$\bigcup_{z \in F \cup G} \text{ch}[rT \cup (rT + z)] \setminus \bigcup_{x \in F} (rT + x) \quad \text{と} \quad \bigcup_{z \in F \cup G} \text{ch}[rT \cup (rT + z)] \setminus \bigcup_{y \in G} (rT + y)$$

は、ともに星状形で、かつ S に属する方向の投影データが一致する。(三角形の代わりに円板でよければもう少し分かり易いが、それでは残念ながら星状形にならないことに注意されたい。)

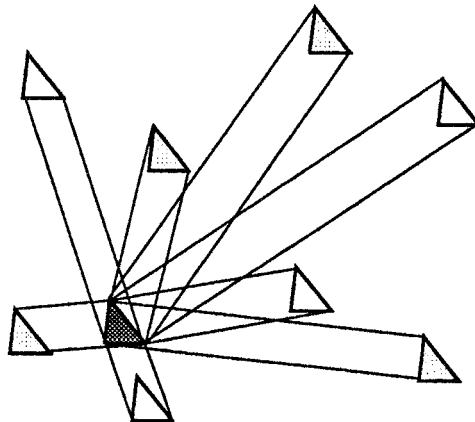


図 9 (Gardner[10] より)

星状形は次の節で述べる凸図形に次いで良い形状であるから、これでは何も期待できないという印象である。しかし Natterer の有名な教科書 [23] の最後の章には、最小二乗法を用いた凸でない一様物体の次のような再構成実験の例が載っている。

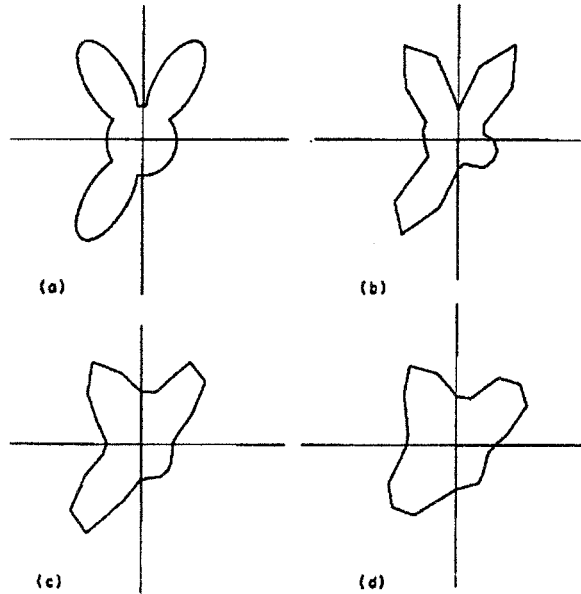


図 10 (Natterer[23] より)

- (a) 原図 (b) $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ の 4 方向投影による再構成図
 (c) 同じく $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ の 3 方向投影による再構成図
 (d) 同じく $\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ の 3 方向投影による再構成図

これを見ると何か期待できそうな感じを持つのは私だけであろうか？例えば凸でない場合にへこむ回数を制限すれば、決定可能な方向の数は有限になるのではなかろうか？

§3. 凸体に対する平行ビームトモグラフィの研究

以上の議論は、一様物体を凸なものに限ると大分様子が異なってくる。(switching component の入れ換え操作を一回施すと、普通は凸性はおろか連結性もくずれてしまうことに注意。)

凸な図形に限ったトモグラフィの再構成問題は、序にも述べたように Lorentz とは独立に、P.C. Hammer 1961 が凸体の幾何学に関するシンポジウムの報告集に付された未解決問題集の中で提起したものである ([13])。彼は平行ビームとファンビームの両者について同時に問題として提出したが、ここではまず平行ビームの場合のその後の解答を紹介する。

最初の結果は Hammer の問題提起とは独立に Giering [12] がその翌年に与えた次の結果である。

Giering の定理 どんな凸図形に対しても、それを他の凸図形と投影データで識別できるような三方向が存在する。

非常に紛らわしいが、この方向は最初に与えられた図形に依存するのであって、三方向が Hammer の問題の答だと云っているのではない。なお、上の形の主張が成り立つためには三方向が最低必要であることは Giering の仕事からもわかるが、どんな二方向をとっても識別不可能であるような凸多角形の具体例を与えたのは Gardner [7] である。

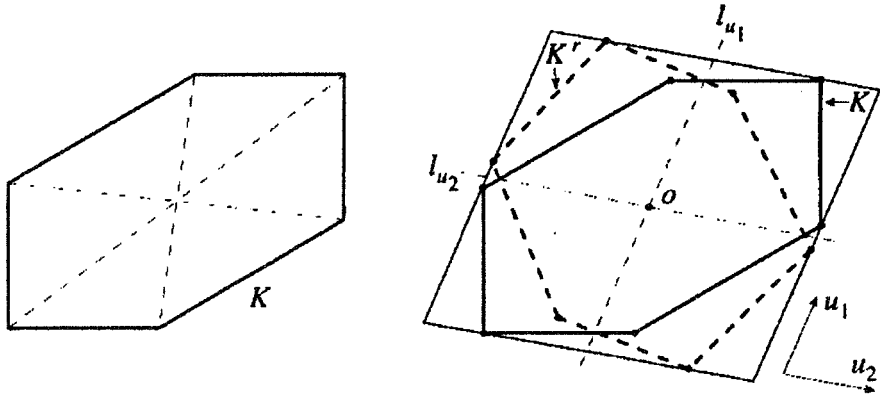


図 11 (Gardner[10] より)

図形がわからないと方向が決められないというのではトモグラフィにならないが、凸多角形に限れば三方向を一つずつ投影データを見ながら順に決めてゆける (successively determined) ということを Edelsbrunner-Skiema [3] が示した。

図形を特定しない解答は Gardner-McMullen [11] が与えたもので、

定理 1) どんな 3 方向を与えても、それらの方向への投影函数が等しい複数の凸図形が存在する。

2) $n(\geq 4)$ 方向への投影函数が凸図形を決定できないとき、それらの方向はある正多角形の辺の方向のなす集合の部分集合とアフィン同値となる。従って特に、4 方向を (その傾きの値が) 代数的独立となるように選べば、凸図形はそれら 4 方向の投影データにより一意に定まる。

正多角形の辺の方向が何故だめかは、図 12 を見れば納得されよう。

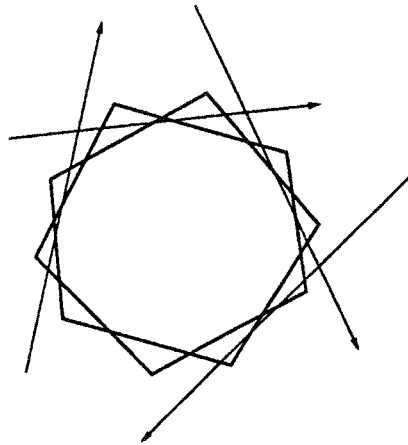


図 12

アフィン変換は長さを変えるが長さの比は変えない、また 4 方向の傾きのなす複比

$$\frac{s_1 - s_3}{s_1 - s_4} : \frac{s_2 - s_3}{s_2 - s_4}$$

はアフィン変換で保たれるので、一つの反例はアフィン変換しても反例となるのである。これ以外の方向が大丈夫なことは次のようにして示される：

- 1) もし有限個の方向の集合 $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ に対して、同じ投影データを持つ二つの集合があったとすると、それらを図 13 のように重ねて描けば、お互いに相手の外に飛び出している部分の重心が S -regular な凸多角形となる。ここで凸多角形 D が S -regular とは、 S に属する任意の方向 \vec{u} について、 D の各頂点 x に対し、直線 $x + R\vec{u}$ と ∂D の x 以外の交わりはまた D の頂点となっていることをいう。
- 2) 凸多角形 D に対し、その各辺の中点を取って新しい凸多角形を作る操作を $M(D)$ とする。 D が S -regular なら $M(D)$ も S -regular となる。
- 3) 凸 n 角形 D_0 から出発し、 $D_k = \text{sec}(\pi/n)M(D_{k-1})$ で帰納的に D_k を定義するとき、 D_{2k} は正多角形とアフィン同値な図形に (Hausdorff の距離で) 収束する。(この美しい収束定理は Darboux [2] 以来何度も再発見されてきたという。)

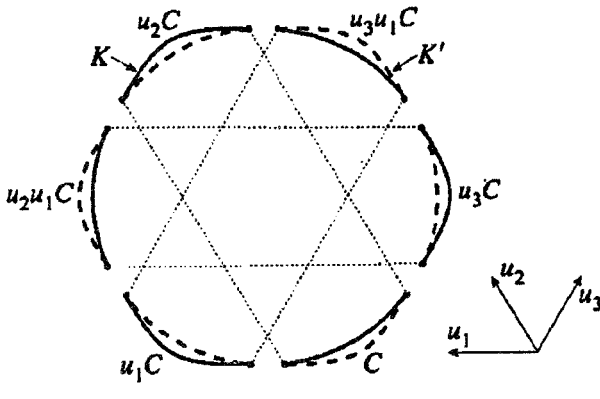


図 13 (Gardner[10] より)

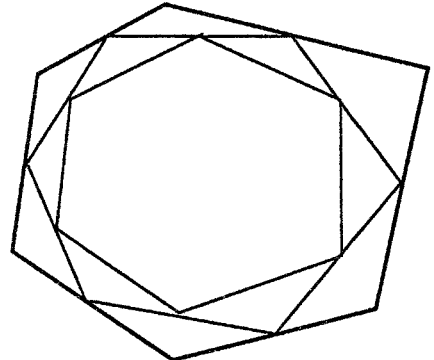


図 14

以上により、 S がある正多角形とアフィン同値な多角形の対角線の方向の部分集合となることがわかり、従ってこれから別の正多角形とアフィン同値な多角形の辺の方向の部分集合となることも結論される。一意性の反例があると云っても、図 12 のようなものばかりなら、X 線トモグラフィによる同定としてはかなりやったと云うべきではないかと思われるかもしれない。しかし事実は Volčič [25] が示したように、悪い方向の組に対しては反例は互いに合同でないものが連続の濃度存在するのである。

以上の議論にも拘わらず、ほとんどの凸体は二方向だけの投影データで決定されるのである。すなわち、

定理 (Volčič-Zamfirescu [27]) 凸図形の全体を Hausdorff の距離

$$\text{dis}(F, G) = \max\{\max_{x \in F} \text{dis}(x, G), \max_{y \in G} \text{dis}(y, F)\}, \quad \text{ここに} \quad \text{dis}(x, G) = \min\{|x - y|; y \in G\}$$

により距離空間とみなすとき、二方向だけの X 線投影データで決定されるようなものは稠密な G_6 集合 (即ち、高々可算個の開集合の共通部分) となる。従って反例は高々第一類の集合となる。

この形の主張は一般の次元でも X 線平行ビームについて成り立つことが彼らにより示されている。(方向の個数は次元によらずいつでも二個でよい。) 逆に、この少ない反例を具体的にどうやって判定するかは以外と難しい。一般の集合に対して Lorentz が与えたような二方向投影による一意性のための簡明な判定条件を凸図形の場合に見いだす問題は未解決である。

§4. 凸体に対するファンビームトモグラフィの研究

この場合はまず Falconer [4] が二光源 P_1, P_2 を結ぶ線分が凸図形 K の内部と交わるとき、一部の例外を除いて K が一意に決定されることを示した。彼の論法は他の諸結果と異なり構成的な点が注目に値する。次いで Volčič [26] (1986) が Falconer の結果を改良しそれを用いて次のような肯定的と云える解答を与えた。

定理 共線でない任意の 3 点での弦函数、すなわちこれらの点を光源とするファンビームによる切り口の長さが与えられたとき、凸図形は決定される。

すなわち、光源が共線でなければ、平行光線の場合のような例外事態は起こらない。平行光線は光源が無遠慮で共線をなすものと考えれば、ファンビームと比したときの事態の悪さが納得されよう。上の定理の証明は初等幾何学的な推論によるもので、Cavalieri の原理の拡張である次の二つの原理を巧みに用いる：

- 1) 交わりを持たない二つの図形 A, B がそれらの外にある点光源 p からのファンビームに対して同一の弦函数を持てば、光源に遠い方の図形 A の面積は近い方 B のそれより真に大きい。
- 2) この状況下で更に、 A, B が上半平面に、光源が下半平面にあるように平面の座標を導入するとき、

$$\iint_A \frac{dx dy}{y} < \iint_B \frac{dx dy}{y}$$

が成り立つ。また、光源が x 軸上にあるときは等号が成り立つ。

この重み付き測度自身は平凡なものであるが、この問題での有用性を示したのは Volčič である。Volčič の原論文は非常に読みづらいが、Gardner が教科書に書き直したものはわかりやすい。

序にも述べたように、半直線ビームの代わりに全直線を考えて弦函数を定義すると問題はやや異なったものになる。光源が常に図形の外にあることが予めわかっているならば両者に差はないが、そうでなければ問題はより複雑となる。Volčič [26] が扱っているのはむしろこちらの方である。彼は、この問題に対して、どの 3 点も一直線上に無いような 4 点が凸図形を決定することを示した。また 2 点光源 P_1, P_2 の場合に凸図形 K が判別できるための十分条件として次の三種を与えた：

定理 次のいずれかが成り立てば、 K は 2 点 P_1, P_2 における全直線的な弦函数データにより他の凸図形と識別される。

- 1) P_1, P_2 を通る直線が K の支持直線となる。
- 2) P_1, P_2 ともに K の内点である。
- 3) P_1 も P_2 も K の内点ではなく、 P_1, P_2 を通る直線 ℓ は K の内点を含み、かつこれが含まれる $\ell \setminus \{P_1, P_2\}$ の連結成分が指定されている。

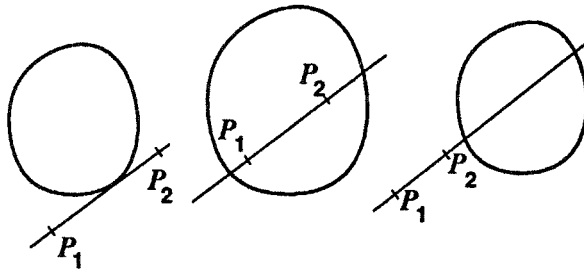


図 15

この証明は基本的には先に紹介した定理のための準備として得られる。ファンビーム（半直線）のときには、最後の 3) で連結成分の指定は不要であった。平行ビームのときと異なり、これらの結果が最良かどうかについては分かっていないものが多い。特に、ファンビームのときに 2 点 P_1, P_2 を通る直線

と K が交わらなくても二光源だけで凸図形が決定できるかどうかはまだ未解決である。図 16 には原点を光源とする全直線的な弦函数が a.e. 方向に対して一致するが一致しない方向（この場合は x 軸方向）も存在するというような二つの凸図形の例が示されている。平行ビームや（半直線的）ファンビームでは凸図形でこのようなものは存在しない。全直線的な弦函数の複雑さを示す例であろう。

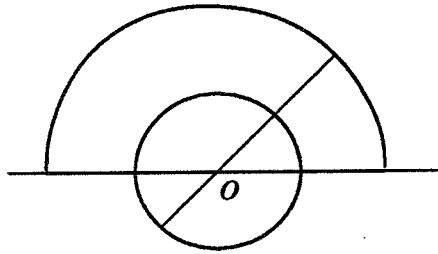


図 16

ファンビームの場合も凸の条件をはずすと、光源の数をいくら増やしても図形を決定できないことが最近明らかにされた。ただし、この場合の反例は相当にややこしく、“図形”とは呼びがたい集合になる。図 17 に三光源の場合の反例を示す。外枠の三角形内にある、白い三角形達の和集合を A 、黒い三角形達の和集合を B とすると、この二つは外枠の三角形の三頂点からのファンビームによる投影データがいずれも一致する。この図形は中心の白い三角形から三つの頂点に関する相似縮小の繰り返しにより生成されたものである。

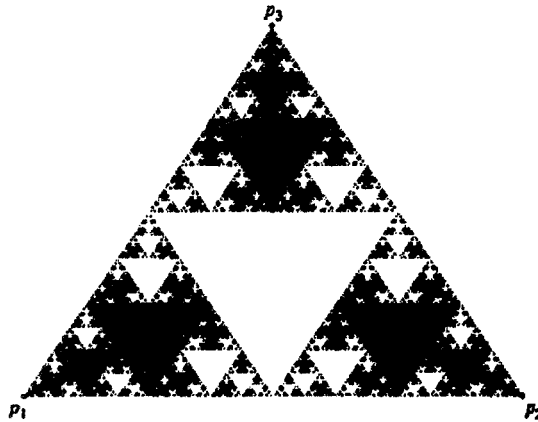


図 17 (Gardner [10] より)

平行ビームの場合の Gardner-McMullen の結果もそうであったが、Volčič の結果も、識別可能性を述べているだけで、図形の再構成の方法については何も示していない。従って再構成アルゴリズムの観点からは、幾何学的トモグラフィはまだ殆ど未解決であるとも言える。

参考文献

- [1] Chang S.K.: The reconstruction of binary patterns from their projections, *Comm. ACM* 14 (1971), 21-25.
- [2] Darboux M. G.: Sur un problème de géométrie élémentaire, *Bull. Sci. Math.* 2 (1878), 298-304.
- [3] Edelsbrunner H. & Skiena S.S.: Probing convex polygons with X-rays, *SIAM J. Comp.* 17 (1988), 870-882.

- [4] Falconer K.J.: X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.* **46** (1983), 241–262.
- [5] Fishburn P.C., Lagarias J.C., Reeds J. A. & Shepp L. A.: Sets uniquely determined by projections on axes I. Continuous case, *SIAM J. Appl. Math.* **50** (1990), 288–306.
- [6] Fishburn P.C., Lagarias J.C., Reeds J. A. & Shepp L. A.: Sets uniquely determined by projections on axes II. Discrete case, *Discrete Mathematics* **91** (1991), 149–150.
- [7] Gardner R.J.: Symmetrals and X-rays of planar convex bodies, *Arch. Math.* **41** (1983), 183–189.
- [8] Gardner R.J.: X-rays of polygons, *Discrete. Comp. Geom.* **7** (1992), 281–293.
- [9] Gardner R.J.: Geometric tomography, *Notices of AMS* **42** (1995), 422–429.
- [10] Gardner R.J.: *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [11] Gardner R.J. & McMullen P.: On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.* **21** (1980), 171–175.
- [12] Giering O.: Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen, *Sber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Nat. Kl.* (1962), 225–253.
- [13] Hammer P.C.: Problem 2 in *Convexity, Proc. Symp. Pure. Math.* **7** (1963), 498–499.
- [14] Helgason S.: *The Radon Transform*, Birkhäuser, 1980.
- [15] Huang L.: The reconstruction of uniquely determined plane sets from two projections in discrete case, *Preprint UTMS* **95–29**, 1995.
- [16] Huang L. & Takiguchi T.: The reconstruction of uniquely determined plane sets from two projections, *Preprint UTMS* **96–3**, 1996.
- [17] Kőlzow D., Kuba A. & Volčič A.: An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections, *Discrete and Comp. Geometry* **4** (1989), 205–237.
- [18] Kuba A.: Reconstruction of two-directionally connected binary patterns from their two orthogonal projections, *Comput. Vision, Graphics, Image Process.* **27** (1984), 249–265.
- [19] Kuba A.: Reconstruction of measurable plane sets from their two projections taken in arbitrary directions, *Inverse Problems* **7** (1991), 101–107.
- [20] Kuba A.: Reconstruction of unique binary matrices with prescribed elements, *Acta. Cybernetica* **12** (1995), 57–70.
- [21] Kuba A. & Volčič A.: Characterization of measurable plane sets which are reconstructable from their two projections, *Inverse Problems* **4** (1988), 513–527.
- [22] Lorentz G.G.: A problem of plane measure, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 417–426.
- [23] Natterer F.: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [24] Ryser H.J.: *Combinatorial Mathematics*, The Math. Assoc. of Amer. 1963.
- [25] Volčič A.: Ghost convex bodies, *Boll. Unione Mat. Italiana* **4-A** (1985), 287–292.
- [26] Volčič A.: A three point solution to Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.* **34** (1986), 349–359.
- [27] Volčič A. & Zamfirescu T.: Ghosts are scarce, *J. London Math. Soc.* **40** (1989), 171–178.