オイラーの関数概念，特に代数関数の概念とその変遷について
ヤコビ関数論ノート（III）

高瀬正仁

1．はじめに

近代数学史研究に本格的に取り組む決意を固め，おおまかな見取り図を作成し，ガウスの著作『整数論』とアーベルの論文「楕円関数研究」に手がかりを求めて読み始めたのは昭和57年（1982年）の春四月のことであった．以来，すでに十五年という歳月が流れたことになる．この年の春休みには東北大学で春の学会があったことが思い出されるが，同時に開催された現代数学史研究会において，ぼくは「プラトン主義者としてのヘルマン・ワイル」という標題のもとに，多様体概念の形成史と，それに対する批判をテーマにして講演した．終了後，上村義明先生に声をかけられて，「多様体については今日の話でよくわかったから，この次は関数について話をしてほしい」と言われた．ぼくは勢い，わかりました，と返事をした．これが，上村先生との初対面の折に交わされた一番初めの会話であった．

そのとき上村先生は，関数というのは昔から不思議で，あれはどうもよくわからん，としきりに繰り返していたが，関数概念にはたしかに不可解なところがあり，一筋縄ではいかないという感じがつきまとうのは否めないとぼくも思う．今世紀に広く流通した概念規定によれば，関数とは「一価対応」のことにほかならないが，この概念はさながら近代数学の大海に投げかけられた一枚の大きな風呂敷のようであり，この簡潔で抽象的なひとことの中には，数学史上に登場したさまざまなタイプの関数がことごとくみな包摂されていると考えられている．オイラーの「解析的表示式」は近代数学史上，最

初に行なわれた関数の概念規定として名高いが，これは一価対応のひとつの類型とみなされるのが通例である．論理的な視点に立脚する限り，この見方は誤りではない．ディリクレの段階に至ると，「完全に任意の関数」というものが公然と語られるようになる．ところがこれは一価対応そのものである．ヴァイエルシュトラスとリーマンの「代数関数」になると事情は一段と複雑さを増すが，いわゆるリーマン面の概念の導入により，代数関数もまた一価対応の範疇におさまるという主張がなされることになる．

だが，関数概念の表現様式に完全な普遍性を求めるのは不可能なのではないか，とぼくは思う．関数概念は進化するのではなく，さまざまな数学的状勢に要請されて変容を重ねていくにすぎない．新たな数学的現象がぼくらの前に立ち現われるとき，ぼくらはそのつど，解明作業を押し進めていくうえでもっとも相応しい様式を備えた関数概念の表明を迫られるのである．個々の関数概念にはみな独自の存在理由が伴っているのであるから，関数概念それ自体の変遷過程を観察しても，この概念のよりよい理解を助けてくれる事柄はなにも見つからない（これは自戒の気持ちを込めた所見である）．ぼくらは視点を大きく変換し，ひとつひとつの表現様式の背景に広がっている特有の数学的状勢を認識するよう，努めなければならないのではあるまいか．

ぼくは初め，関数とは何か，という一般的な疑問から出発し，次第に上記のような考えを抱くに至ったが，6年ほど前にヤコビとエルミートの論文の中にヤコビ関数論の萌芽を発見したことがいわば決め手になって，着想は確信に移行した．ガウスとアーベルに始まる代数関数論は，リーマンとヴァイエルシュトラスの手でヤコビの逆問題が解決された時点で最高潮に達したが，この問題の解決はヤコビ関数の認識を可能にする．そこで，本来ならばヤコビ関数を対象とする等分と変換の理論，すなわち，何らかの意味において一般化された虚数乗法論へと通じている理論が展開されるはずで，現にヤコビとエルミートはその方向に向かって第一歩を踏み出していたのである．この試みはヤコビとエルミートのみで中断してしまい，リーマンとヴァイエルシュトラス以降の代数関数論は代数曲線論へと移行し，さらに代数幾何学の形成へと進んでいった．だが，それはそれとして，もしひとたびヤコビとエルミートの段階に立ち返るなら，そのときぼくらの眼前に忽然としてヤコビ関数が現われる．この具体的な数学的対象の本然の姿を諒解するために，ぼくらは必然的に関数概念の歴史的省察を要請されるのである．かつてヴァイエル

シュトラスとリーマンは代数関数（正確に言えば，一変数の代数関数）の本性をとらえようとして，それぞれ独自の仕方で一変数複素解析関数の一般理論を構成したが，まさしくそのように，今度はヤコビ関数を理解することを目的として，固有の関数理論を見つけたり，作ったりしなければならない（既製の関数理論の中にすでに存在しているならばそれでよいが，もし存在しないなら，新たに作らなければならないであろう）．いずれにしても，それは多変数複素解析関数の一般理論になるはずである．現にヴァイエルシュトラスは，ヤコビ関数論の基盤を整備しようとしたのであろう，アーベル関数論を構想するとともに，そのための関数理論を求めて実際にこの方角に向けて歩みを進めたのである．「ヴァイエルシュトラスの予備定理」など，いくつかの基礎的な寄与が想起される場面である．

こうしてヤコビ関数の考察は多変数解析関数論に対して，そのもっとも基本的な契機として作用することであろう．その様子の観察に深く立ち入ることは本稿の目的ではないが，ここではオイラー，ディリクレ，コーシー，ヴァイエルシュトラス，リーマン，ワイルなどによる既製の関数概念のあれこれを回顧したうえで，多様体とその上の一価対応というワイルの関数概念はヤコビ関数論には相応しくないこと，および，リーマンの関数概念をそのまま多変数の理論に移すのがよいのではないかという考えを示唆するところまでの叙述を試みたいと思う．

2．オイラーの関数概念

1748年のオイラーの著作『無限解析入門』は全二巻から成るが，関数とは「解析的表示式」のことであるとするオイラーの有名な関数概念は，この著作の第一巻の冒頭に確かに記述されている．オイラー全集の第一シリーズは「数学著作集」にあてられていて，『無限解析入門』の第一巻はその第８冊目の全体を構成する．「関数」という言葉それ自体はオイラー以前にも存在し，ニュートンやライプニッツの諸論文にすでに登場すると言われているが，概念規定の試みはオイラーをもって嚆矢とするというのが通説である．その論拠を検証するためにはニュートン，ライプニッツ，ベルヌイ一族などの手で書かれた原典群の綿密な調査が不可欠であろう．しかしここではひとまず通説に従って，関数概念の経歴の出発点をオイラーに求めることにしたいと思う．

オイラーの関数概念の根底には一貫して「量」の概念が流れている．初めに登場するのは「定量」で，

定量とは，一貫して同一の値を保持し続けるという性質をもつ，明確に定められた量のことをいう．

と規定される（第１条）．続いて，

変化量とは，一般にあらゆる定値をその中に包摂している不確定量，言い換えると，普遍的な性格を備えている量のことをいう．

という言葉が語られて（第２条），その次に「関数」の概念が現われる．それは，

ある変化量の関数というのは，その変化量といくつかの数，すなわち定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう．

というのであるから，「ある変化量の関数はそれ自身，変化量である」（第５条）ことになる．すなわち，オイラーの関数には，ある変化量から出発して他の変化量を次々と具体的に作り出していくという働き，言い換えるとさまざまな変化量の構成様式が備わっているのである．解析的表示式としてオイラーが例示しているのは，

$$a+3z,\ az-4zz,\ az+b\sqrt{aa-zz},\ c^{z}$$

などで，これらはみな，変化量 z の関数である．ここで，三つの文字 a, b, c は定量を表わしている．

オイラーの関数概念は自然界の力学的光景の観察の中から即物的に抽出されたものであろうと思う．自然界には動いていない量もあれば動いている量もあり，そのようなさまざまな量が相互に依存しあったりしなかったりしながら渾然として存在する．そこで，概念の抽出とは，この大海原に網を投げて漁をするような作業になり，網を引くごとに，定量，変化量，変化量の関数という解析学の基礎概念が次々と認識されていく．関数というのは，相互依存関係にある複数個の変化量のシステムに注目するときに取り出される概念である．そうして，これはオイラーに限らずコーシーにもディレクレにもリーマンにもあてはまることと思われるが，一般に関数というものの概念規定の試みはつねに，相互依存関係の様式を具体的に明示しようとする試みと理解するのが至当であろう．

オイラーの関数は一方では一価関数と多価関数に分かたれるが，他方では，代数関数と超越関数に二分される．代数関数というのは，いくつかの定量と

変化量を素材にして，それらに対して代数的演算のみを作用させることによって組み立てられる関数のことである．その際，もしそこに超越的演算が介在するなら，構成される関数は超越関数という名で呼ばれるのである．

本稿では代数関数に注目し，代数関数とはなにか，という問いに対してどう答えるかという論点に，たえず関心を集めていきたいと思う．まず上記のようなオイラーの素朴な概念規定によれば，zは変化量とするとき，zの倍数や冪は明らかにzの代数関数である．また，これはオイラーが挙げている例だが，

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-zz}}{aaz-2bz^3}$$

のような表示式もzの代数関数である．ところが「代数関数はしばしば，たとえば

$$Z^5=azzZ^3-bz^4Z^2+cz^3Z-1$$

のような方程式によって規定されるzの関数Ｚのように，具体的な形に表示されないことがある」（オイラー『無限解析入門』第７条）．すなわち，この代数方程式は代数的解法を許容せず，そのために変化量Ｚは（「zの関数Ｚ」と言われているにもかかわらず）変化量zの関数とはみなされないことになってしまうのである．オイラーは４次よりも高い次数をもつ代数方程式の根の公式を発見しようと試みてついに失敗に終わった経験をもつ数学者だが，そのオイラーの努力の意味は，代数関数の概念規定という場において初めて明らかになると言えるであろう．一般の代数方程式を対象とする根の公式が見つからない以上，オイラーによる代数関数の概念の妥当域は非常に限定されてしまい，普遍性をもたないと思う．だが，それでもオイラーは，「たとえこの方程式は［代数的には］解けないとしても，Ｚは変化量zと定量を用いて組み立てられるある表示式と等置されること，従ってＺはzのなんらかの関数であることははっきりとわかっている」（同上）と主張して，代数関数というものを「解析的表示式」として把握しようとする姿勢をくずさないのである．

オイラー以降，アーベルは代数関数論の展開に先立って，一般の代数方程式の代数的解法の可能性を明確に否定しなければならなかった．まさしくこの点において，代数方程式論は代数関数論の建設のために不可欠の基礎理論として機能するのである．もし二つの変化量x,yの間に，代数方程式を通じ

て記述される関係式が成立するとするなら，x は y の代数関数と言われ，y は x の代数関数と言われる．アーベルの理論の出発点はただこれだけであり，もはや解析的表示の可能性は問題にされない．たとえ根の公式の存在は一般的に否定されたとしても，オイラーのように，何らかの意味合いにおける解析的表示式をなお追い求めるのもひとつの道であろう．だが，アーベルははっきりとこの路線を拋棄したのである．それならやはり，アーベルはアーベルなりに果敢に決断をくだし，オイラーに別れを告げたと言えるのではないかと思われる．

3．コーシーの関数概念

解析的表示式の概念に依拠して代数関数を把握するのは困難だが，そればかりではなく，このオイラーの関数概念は三角関数や対数関数，指数関数などの認識の場面においても，論理的に見ていくぶん無理な感じを与えるように思う．ある量が与えられたとき，その量と，その正弦や余弦や指数冪との間の相互関係はそれぞれ明確に規定される．すなわち，二つの変化量の間の相互依存関係は明示されるのであるから，三角関数と指数関数が「与えられた変化量に対応して定まる変化量」として認識されることに疑いを挟む余地はない．指数関数を定めるのと同じ相互依存関係式の観察を通じて，対数関数もまた首尾よく取り出されるであろう．だが，これらの場合，新たな関数の認識の様式はもう解析的表示式ではなく，暗暗裡のうちに「一価対応」もしくは「相互依存関係それ自体」が関数を定めると諒解されているのである．

こうしてオイラーの関数概念の中にはすでに，新しい二つの関数概念の萌芽が内包されていると考えられると思う．まず一価対応という性格に着目すれば，そこからディリクレのいわゆる「完全に任意の関数」の概念が取り出される．この関数は解析的表示式による表示を前提にしないから，相互依存関係さえ表明されれば，その時点において関数が確定することになる．その意味では，三角関数，指数関数，対数関数などは，式による表示が与えられなくても，その前にすでに関数である．ディリクレはいったん解析的表示式を離れて「完全に任意の関数」の世界に踏み出すことを迫られて，しかる後に，両者を連結する架け橋の建設を試みた．それがディリクレのフーリエ級数論の骨子であり，この点において，すなわち実関数論においてみごとな成

果をおさめたと言えると思う．だが，ディリクレの関数概念は代数関数を把握するためには無力であり，この点において，ディリクレはまだオイラーを完全に凌駕した地点に進出したとは言えない．なぜなら，代数関数というものはつねに多価関数になるからである．

オイラーの関数概念の中に芽生えているもうひとつの新しい関数概念はコーシーによるもので，そこでは諸変化量の間の相互依存関係それ自体をもって関数が考えられている．

コーシーの著作『微分積分学要論』（小堀憲訳．共立出版．昭和44年（1969年））を見ると，オイラーの場合と同様に，まず「変数」と「定数」の概念が導入されて，

> つぎつぎと，異なる値をとることができると考えられる量を「変数」という．これに対して．1つの確定した値をとる量を「定数」という．
> （同書．1頁．「変数」「定数」と訳出されているが，「変化量」と「定量」とするほうが適切と思う．）

というふうに規定されている．続いて関数に移行して，

> いろいろの変数の間に，その中の1つの値を与えたとき，それからほかの変数の値を，ことごとく決めることができるような関係があったら，通例はこの中の1つのもので表わされた変数を考える．この1つのものを，「独立変数」と名づけ，その独立変数によって表わされるほかの変数を，この変数の「函数」と呼んでいる．
>
> いろいろの変数の間に，その中のいくつかのものの値が与えられたとき，それからほかのものの値が，ことごとくわかるような関係があるとき，このいくつかのものによって表わされる変数を考察する．このときに，このいくつかの変数は「独立変数」と名づけられ，また，これらの独立変数によって表わされる残りの変数は，これらの変数の「函数」と呼ばれている．代数学や3角法が提供するいろいろの式は，独立変数と考えられるものを含むときは，この変数の函数である．たとえば
>
> $$L(x),\ \sin x,\ \cdots$$
>
> はxの函数であり，
>
> $$x+y,\ x^y,\ xyz,\ \cdots$$
>
> は，xとy，またはx, yおよびz，$\cdots$の函数である．（同書．5頁．）

と言われている．そのうえ，

上の例のように，１つまたはたくさんの変数の函数が，同じ変数によって直接に表わすことができるとき，これらを「陽函数」と呼ぶ．しかし，変数と函数との間の関係，すなわちこれらの変数が満足しなければならない方程式だけが与えられていて，これらの方程式が代数的に解けないときには，この函数は変数によって直接に表わすことはできないから，「陰函数」と呼ばれている．（同書．６頁．）

という言葉も見られるのであるから，代数方程式の代数的可解性が一般に保証されないという事実を正しく認識していることもまた明らかである．コーシーの関数概念には代数関数を把握するのに十分な広さが備わっていると思う．それなら代数関数の定義がアーベルのようになるかといえば，奇妙なことに，そうはならない．コーシー自身による代数関数の概念規定は，

変数に，代数学における基本演算，すなわち加法，減法，乗法，除法および開法だけを行なって作られた函数を「代数函数」という．１変数の代数函数において，変数の累乗だけしか含まない式，いいかえると，整式と有理分数函数へ変形できるものが「有理函数」であり，そうでない場合には「無理函数」である．（同書．134頁）

というのであるから，取り上げられている代数関数は陽関数のみにすぎず，いかにも退嬰的な感じがするのは否めない．この代数関数の定義は，上掲書第28章「代数函数を含む不定積分について」の冒頭に記されているものだが，もともとコーシーの目標はこの章の標題に明示されている通りである．コーシーは加減乗除の四算法と冪根を取る操作のみを許して表示できるような代数関数だけを対象にして，その不定積分の算出法を提示したかったのであるから，陰函数になる代数関数を考える必要はなかったのである．関数概念は目的に合わせて設定すればよいという観点から見れば，これはこれで別段，問題はないと思う．だが，他方，コーシーはアーベルやガロアによる新しい代数関数論に関心がなかったこともまた確かである．それは，上記のように代数関数の定義を陽関数に限定して平然としている点に，はっきりと露呈しているように思われる．

４．リーマン面（１）

1851年のリーマンの論文「一個の複素変化量の関数の一般理論の基礎」の

第1章は，一個の実変化量の連続関数の概念規定から始まっている．

zは，取りうる可能性があるあらゆる実数値を次々と取っていく変化量としよう．それらのzの値の各々に対して，不定量wのただ一つの値が対応するなら，wはzの関数と呼ばれる．そうして，zが二つの定値間のすべての値の上を連続的に移動するとき，wもまた同じく連続的に変化するとするなら，この関数wはこの区間において連続であると言う．

この定義では明らかに，関数wの個々の値の間にいかなる法則も規定されていない［註）これがディリクレのいわゆる「完全に任意の関数」であり，その実体は「一価対応」にほかならない］．なぜなら，この関数がある定区間において定められたとき，その区間の外部への関数wの延長は完全に任意だからである．

量wが量zに依存する様式は数学的法則によって与えることが可能であり，その結果，zの各々の値に対して定まった量演算を遂行することにより，対応するwの値が見い出される．ある与えられた区間内のzのすべての値に対するwの対応する値がこのような依存法則によって定められる可能性は，かつてはある種の関数（オイラーの用語での連続関数）に対して与えられていたにすぎない．しかし最近の研究により，ある与えられた区間における任意の連続関数を表示できる解析的な式が存在することが示された［註）ここで言及されているのはフーリエ級数の理論である］．それ故，量wの量zへの依存の様式は，任意に与えられたものと定義してもいいし，あるいは，定まった量演算によって規定されたものと定義してもいいし，どちらでもかまわないことになる．このような二通りの概念は，我々がこれから言及する予定の諸定理の帰結として，同等になるのである．（上掲論文の第1章）

このような実変化量の関数理論の回顧に続いて，リーマンの言葉は複素変化量の関数へと移っていく．

しかし，量zの変化しうる範囲が実数値に限定されず，$x+yi$（ここで$i=\sqrt{-1}$）という形の複素数値も許容する場合には，状勢は一変する．

$x+yi$と$x+yi+dx+dyi$は互いに無限小だけ相違する，量zの二つの値としよう．そうしてそれらの値に対して，量wの値$u+vi$および$u+vi+du+dvi$が対応するとしよう．その場合，もし量wの量zへの依

存の仕方が任意なら，比 $\frac{du+dv\,i}{dx+dy\,i}$ は一般に，dx および dy の値とともに変化する．なぜなら，$dx+dy\,i=\varepsilon\, e^{\varphi i}$ と置けば，

$$\begin{aligned}&\frac{du+dv\,i}{dx+dy\,i}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dy\,i}{dx+dy\,i}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}\end{aligned}$$

となるからである．だが，w が z の関数として，初等的な量演算の組み合わせによって定められるとするなら，その定め方がどのようであっても，微分商 $\frac{dw}{dz}$ の値はいつも，微分 dz の値に依存しない．それ故，明らかに，このようにするのでは，複素量 w の複素量 z への依存様式をすべて表示するのは不可能なのである．

上に強調された特徴は，量演算を通じて何らかの仕方で定められる関数のすべてに共通しているものであり，我々はそれを，引き続いて行なわれる研究のための基礎として採用する．以下の研究では，そのような関数を，表示式とは独立に考察しなければならないのである．量演算によって表示可能な依存様式という概念の一般妥当性と十分性の立証はやめて，我々は次のような定義から出発する．ある複素変化量 w は，もうひとつの複素変化量 z とともに，微分商 $\frac{dw}{dz}$ が微分 dz の値に依存しないという様式に従って変化するとしよう．そのとき，量 w は量 z の関数と呼ばれる．（同上）

楕円関数を理解するためだけなら，一般理論の建設は必ずしも必要ではなく，いろいろな基礎理論が考えられると思う．アーベルは第一種楕円積分の逆関数から出発した．ヤコビも初めそのようにしたが，やがて二つのテータ関数による商表示を土台に据えるというアイデアを提出した．アイゼンシュタインのように無限二重積表示を基礎に置く道も可能である．だが，代数関数は一般に表示式をもたないのであるから，この新しい関数を理解して十全に認識するために（具体的に設定された目標は「ヤコビの逆問題」を解決することであった），リーマンは新しい関数理論を建設しなければならなかった．要点は二つあった．ひとつは，変化量の変域を拡大して，複素量域に及ぼすことであった．そのうえでリーマンは，「ある複素変化量 w は，もうひ

とつの複素変化量 z とともに，微分商 $\frac{dw}{dz}$ が微分 dz の値に依存しないという様式に従って変化する」という条件を課して，すなわち今日のいわゆるコーシー・リーマン型の微分方程式が満たされることを要請して関数を限定し，そのとき「量 w は量 z の関数と呼ばれる」と定義した．複素解析関数論の端緒がこうして開かれた．

リーマンの理論のもうひとつの要点はリーマン面（リーマンは単に「面」と呼んでいる）の概念の導入である．

> 引き続き行なわれる諸考察では，我々は量 x, y が変化する範囲を有限域に限定する．そうして点 O が占める場所として我々が思い描くのは，もはや平面 A 自身ではなくて，その上に拡がる面 T ［註）これがリーマン面である．ただし，任意の面を考えるのではなく，以下，いくつかの情景描写を通じて面の形状を限定する］である．点 O の占める場所が平面の同一の地点の上に幾重にも積み重なるという可能性を受け入れるために，我々は，相互に重なり合う面について語っても不快感を与えないですむような表現の仕方を選びたいと思う．すなわち，そのような場合については，相互に重なり合う面の諸部分がある線に沿って合流するという現象は見られないこと，その結果，面の折れ曲がりや，相互に重なり合ういくつかの部分への分解といった事態は起こらないと仮定するのである．（上掲論文の第５章）

変化量 z の（リーマンの言う意味での）関数 w は，オイラーの関数概念の場合と同様に，それ自身，変化量である．変化量には必然的に変域が伴うが，リーマンの関数ではそれが拡大されて，変化量の変域として複素平面（代数関数の場合には無限遠点を附加して考えることも必要になる）の上に多重に折り重なって拡がるリーマン面が設定されている．すなわち，変化量の変域と，その変化量の関数の変域が切り離されているわけで，そのおかげで従来の多価関数も一価性が回復する．この点において，ぼくらはリーマンのアイデアの核心を見ることができるであろう．それはそれとして関数概念をとらえる視点はオイラーの場合と同じであり，リーマンの関数はやはり「諸変化量の間の相互依存関係」の観察の中から取り出されているのである．オイラーの解析的表示式の場合にそうだったように，リーマンの関数概念にはディリクレとコーシーによる二通りの関数概念，すなわち「一価対応」と「諸変化

量の間の相互依存関係」が再び統合されている．そうしてあくまでもコーシーと同じ立場に立脚しながらも，ディリクレの限界を打ち破り，代数関数を一価対応としてとらえることが可能になるのである．ぼくらはリーマンとともに，きわめて明快な立脚点を獲得したと言えるのではあるまいか．

コーシー・リーマン型の微分方程式による関数の限定は，関数を表示する式の存在の有無と密接な関係で結ばれている．リーマンの論文「一個の複素変化量の関数の一般理論の基礎」が一意化定理とともに終わっていることにも，深い意味があるように思う．それは一意化定理の意味の究明と併せて考えていかなければならない事柄だが，この定理のおかげで，一般的に言ってリーマンの関数は解析的表示式を許容することが判明する．すなわち，複素変化量の関数の理論において，一意化定理はさながら実関数論の場合のフーリエ級数論のような役割を果たすのである．

5．リーマン面（2）

代数関数を変化量と見るときの変域，すなわち代数関数のリーマン面には，もう一歩，踏み込んだ抽象化を受け入れる余地が残されている．今，二つの複素変化量 x と y の間に何らかの代数的な関係が成立するとき，x は y の代数関数であり，y は x の代数関数である．それ故，この場合には変化量とその代数関数の占める位置が対称的になり，その結果，二つのリーマン面が現われる．ひとつは変化量 y の代数関数 x のリーマン面であり，もうひとつは，変化量 x の代数関数 y のリーマン面である．そうしてそれらは幾何学的に見れば同じものなのであるから，もう一段階，抽象の度合いを高めれば，ワイルの著作『リーマン面の理念』（1913年．ヒルベルト学派の思考を集約した作品と言われる）の冒頭に描写されているように，複素解析的多様体としてのリーマン面の概念が取り出されるのである．リーマンの「面」は複素平面から離れずに存在していたが，ワイルのリーマン面は完全に抽象的に記述された幾何学的なオブジェクトである．それでもリーマン面はリーマンの段階においてすでに，関数に先立って提出されたのであるから，リーマンの理論の本質はワイルの言うリーマン面の理念に宿っていると主張するのも，あながち理由のないことではない．

いずれにしても，関数からリーマン面を作るのではなくて，初めにリーマ

ン面という抽象的な場所を与えてそこから出発することにするならば，そのとき初めて，変化量という不思議な量の概念規定が可能になる．すなわち，変化量というのはリーマン面上の「一価対応としての関数」なのである．代数関数も変化量なのであるから，それ自身もやはり一価対応である．上記の記号を用いれば，二つの複素変化量 x と y はある同一のリーマン面上の一価対応であり，それらの間に成立すると言われた代数的関係式は，二つの一価対応を結ぶ関数関係の表示式として理解されるであろう．関数はもはや「変化量の関数」ではなく，抽象的に描かれた幾何学的な場所の上で定まる一価対応にほかならない．ワイルの視点に足場を求めるならば，「代数関数とは何か」という本稿の当初の問いに対する答は，「（コンパクトな）リーマン面上の一価対応」と記述するのが正解になると思う．コーシーが規定したような「変化量の関数」の概念は完全に後退したが，その代わりディリクレの関数概念の適用域は拡大されて，ここにおいてようやく代数関数を包摂する段階に到達したのである．

このような抽象化が実現されるのは，一変数の代数関数の場合のみに限定された出来事であり，ワイルは一変数の特性を利用してみごとな成功を収めたのである．ワイルが規定した一次元複素解析的多様体の概念はそのまま高次元に移されて，ここに多様体論の端緒が開かれた．しかし多変数の代数関数を対象とする場合には，リーマンからワイルへの道筋はたちまち破綻してしまう．岡潔は講演「多変数解析関数について」の中で複素多様体の概念を批判して，次のように語っている．

> さて次は複素多様体ですが，関数論をあそこへ初めてもっていったのはたぶんワイルです．そして，ワイルは一変数関数だけについて考え，何もこの解析平面においてのみ考えなくても，それと同じだけの性質をもっていたら，やれると予想してああいうものを定義したんだと思います．ところが一変数のときは，特にそれがコンパクトだったりしますと，複素空間で考えるのとだいたい同じことになると思いますが，二変数以後は決してそうではない．関数論のほうからいいますと，ここでは微分することができない［註）複素多様体上では解析関数の導関数というものは考えられない，という意味であろう］．それから積分することができない［註）複素多様体上では積分関数を作れない，という意味であろう］．そのうえ，格子分けすることができない．それではいったい何が

できるのかとききたい．代数のほうの観点からいきますと，そうとは違います［註）代数幾何や，いわゆる解析幾何を念頭に置いての発言と思われる］．あるものはできるでしょう．そしてまた不定域イデアルというふうまでいけば，多様体のほうへ移せるのですが，よほどそんなものが出てくるんでない限り関数論のほうとの連携は付かないのではあるまいかと思われます．しかも連携が付いたら，その後は，適当にコンパクトにした複素数空間で考えればよいので，そこへ移せた後，さらにくわしく多様体のところで調べねばならない問題はありそうにもない．数学のことだから，なんだそんな問題があったのかということになるかもしれませんが，ちょっと観念的に考えますと，それなら数空間のほうへ移して考えたらよいではないかということになるのです．（講演記録．掲載誌不明．４～５頁．引用にあたって言葉の表記を少々あらためた．）

このような岡潔の多様体批判は正当であろうとぼくは思う．岡潔が言うように，リーマンのリーマン面を複素平面から切り離して抽象的な多様体へと移行する道筋には，一変数の代数関数論の関数論的特性（すなわち，二つの複素変化量の間に成立するひとつの代数方程式から，リーマンの言う意味での二つのリーマン面が構成されて，しかもそれらは幾何学的に見て同じものになるという性質）が反映している．それ故，一変数の代数関数論の場合には，ワイルの言う意味におけるリーマン面の導入には確かに十分な必然性が感じられる．また，そのような場所に飛躍して初めて真意が諒解される基礎的事項も，この理論には数多く存在する．ところが多変数の代数関数ではその特性はまったく失われてしまうのである．それなら，少なくとも代数関数の関数論的性質に直接関連する問題を究明しようとする限り，複素数空間から離れて抽象的に設定された（高次元の）複素多様体へと移るべき理由はどこにもないと言わなければならないのではあるまいか．

６．ヤコビ関数論のための関数理論

上に引用した岡潔の講演記録を一読したのは20年も昔の出来事である．この講演の要点はふたつあった．ひとつは，既述のように，解析関数論を多様体上に移すことに対する批判であり，もうひとつは，その批判の根拠となる三つの不可能事，すなわち「微分することができない」こと，「積分するこ

とができない」こと，「それに格子分けすることができない」ことの提示である．これらの三つの理由のうち，ぼくは最後に挙げられている「格子分けすることができない」という言葉の意味合いを解しかねて，その後，長い間，悩まされた．この言葉に注釈を添えるのは昔も今もむずかしいが，解析関数論との関連に置いて「格子分け」という言葉から想起される唯一の数学的状勢は，楕円関数の等分理論であった．ところが6年ほど前，ヤコビとエルミートはさらに歩を進め，ヤコビ関数を対象とする等分理論への道を具体的に踏み出していることに気が付いた．これも「格子分け」の理論である．そうして岡潔は二変数以上の解析関数論を語っているのであるから，この場面においてただひとつだけ思いあたるのは，この「ヤコビ関数の等分理論」のみである．岡潔の念頭にあったのはこのヤコビとエルミートの理論だったのか，あるいは何かしら別の数学的状勢だったのかどうか，明確な判定は困難だが，ヤコビ関数の等分理論が岡潔の言葉によく符合することはまちがいないと思う．

ヤコビ関数はヤコビの逆問題の解決の中から認識される多変数の代数関数であり，その存在領域は，アーベル多様体上のコンパクトな内分岐領域である（ここでアーベル多様体という言葉を用いたが，これは便宜上の措置にすぎず，別段この言葉が不可欠というわけではない）．楕円関数論の黎明期にも，楕円関数という新しい関数を諒解するために種々の基礎理論が提案されたが，こんどはヤコビ関数を理解するために，それに相応しい新しい関数理論が要請されるであろう．ぼくの知見の及ぶ限りにおいて，これは，多変数解析関数論の一般理論の建設が希求される唯一の局面である．既製の関数理論の中にみいだされるならばそれでよいが，そうでなければ，新たに作り出さなければならないであろう．ここではこれ以上，語ることはできないが，「格子分け」ができない以上、ワイルのように抽象的な複素多様体へと飛躍する道は適切ではなく，リーマン自身によるオリジナルなリーマン面の概念をそのまま高次元に移す道を歩むのがよいと思う．実際に岡潔の理論はそのように進行したが，最後の段階で内分岐点の出現に行く手を阻まれた．それなら，今日もなお依然として，多変数解析関数論の一般理論は建設途上にあると言えるのではあるまいか．

［平成9年（1997年）3月15日］