数学者 Jacobi の『力学講義』

中根美知代

1．はじめに

今日私達は解析力学で，ラグランジュ形式とかハミルトン・ヤコビ形式と称する形式をしばしば用いる．ここで名前が出てくる，ラグランジュ・ハミルトン・ヤコビは数学者として著名であるが，19 世紀の解析力学の研究史上でも重要な仕事をした．この 3 人の仕事を歴史的に考察することは，解析力学史のもっとも主要な部分を論じることになるといっても過言ではない．ハミルトンの力学に関する研究が私なりに一段落した今，引き続いてヤコビをとりあげようとするのは，歴史を研究する者としては自然な行き方であろう．

実は，力学史を始めるかなり前から，私はヤコビの『力学講義』（注 1）に特別な思い入れを持っていた．15 年前に出会った V．I．アーノルド著『古典力学の数学的方法』（注 2）のなかで，アーノルドがヤコビの『力学講義』の素晴らしさを力強く論じていたことが，印象に残っていたからである．アーノルドは，もちろんヤコビ以外の数学者の仕事にも言及しているが，ヤコビについての記述はとびぬけて生き生きしている．『力学講義』は名著にちがいない，これが私の思いこみである．幸いなことに，『力学講義』のかなりの部分を読んだ今も，この期待は裏切られていない．

私の場合は歴史的な研究を志すのだから，『力学講義』を部分的に分析し，ハミルトンの論文の分析結果とあわせて，新しい結果をいくつか得ることから始めていった．つぎの段階として，他の研究者の結果とつき合わせてみたくなるのだが，ヨーロッパでも北米でも，力学通史のなかでヤコビを位置づける程度で，ヤコビの力学研究そのものの分析を志す研究者な

ど見かけないという．では，このテーマは無意味なものかと尋ねると，そうではないといわれる．世間の評価はとにかく，自分なりに納得できるまではやってみようと考えていた矢先，私は妙な疑惑に捕らわれた．

楕円関数論・代数関数論・アーベル関数論の歴史のなかではヤコビの名前は必ず登場する．一方で，ある研究者の力学を論じるとき，その人が純粋数学の仕事をしていたとしても，その部分を切り離して論じるのはあたりまえのようになっているから，この分野のヤコビの寄与を彼の力学と結びつけようと試みる者はない．しかし，楕円関数論のヤコビと力学研究者ヤコビとを別人のようにあつかっていいのだろうか．仮に『力学講義』で，ヤコビが純粋数学的な問題に触れていたとしても，自分の問題意識にしたがって部分的に読んでいるだけなら，純粋数学の部分は読まないことになってしまう．これでヤコビの力学研究の本質がつかめるのか．

そこで今回は，『力学講義』の全体像をつかむことを第一の目的とするという，やや非常識かつ無謀と思われる課題に取り組んだ．『力学講義』に一通り目を通した上で，ヤコビの力学研究の新しい分析視点を提示したい．また，ラグランジュやハミルトンとの比較の上で，ヤコビの力学研究を特徴づけも試みる．

2．ヤコビのキャリア（注3）

ヤコビの一生や彼の楕円関数論や数論の研究，教育上の成果は手近な本で日本語でも読むことができる（注4）．今回は，こうした分野の著作が見落としがちな力学研究に焦点をあて，彼のキャリアを簡単に振り返っておこう．

1804年，ベルリン郊外のポツダムで生まれたヤコビは，ベルリン大学で哲学と数学を修め，1825年に学位論文を提出し，数学者として出発する．数学者ディルクソンとともに哲学者ヘーゲルが学位論文の審査員だった．

26年ケーニッスベルグ大学に職を得，以降 44年まで，ヤコビはこの地で精力的に研究に取り組む．29年には，パリへ旅行し，ルジャンドル・フーリエ・ポアソンらと交流し，途中ゲッチンゲンではガウスと会ったりもしている．ケーニッスブルグでのヤコビは一貫して代数関数論・楕円関数論の研究に取り組んでいたが，36 年から 38 年にかけて，ハミルトンの力学

の論文に出会って以来，研究の重点を一時的に力学とそれに関連する数学の分野，変分法と偏微分方程式論に移している．以降は，集中的に力学関連の課題に取り組むことはなかったが，42 年には英国科学振興協会のマンチェスターでの大会で力学に関する一般的な原理を発表したり，天体力学の昇交点消去の問題を扱ったりしている．今回とりあげる『力学講義』は 42 年から 43 年にかけての冬学期になされたものである．有名なヤコビ行列式は 41 年に発表されている．

44 年，ヤコビはプロイセンアカデミーの会員としてベルリンに招かれる．43 年以来糖尿病の悪化が伝えられるが，研究意欲は衰えることなく，楕円関数論・アーベル関数論に関する著作を発表していった．46 年から47 年にかけて力学上の成果も２，３発表しており，47 年から 48 年にかけてベルリン大学で『解析力学講義』を行ったとの記録が残されている（注5）．なお，大学での講義は彼の義務ではなかった．

49 年，ウィーン大学に教授として招聘される．ヤコビは整数論の講義を行なう一方で，友人ハンセンとともになした天体力学の仕事を残した．51 年インフルエンザのため死去．

以上の経歴から，力学研究もまた彼の一生を貫く重要な課題だったことが見てとれるだろう．

３．『力学講義』の概観

『力学講義』の目次は，論文末に示した通りである．大体どんなことが書いてあるか，他の力学の教科書と比べてどんな特徴を持っているか，ヤコビの記述の順序を追いながら，筆者の捉えた範囲で述べておく．

１）力学の原理

『講義』は力学の原理を論じることから始められている．ヤコビは，力学の出発点をニュートンの運動方程式とし，まず３つの原理を演繹的に導く．これらは

１．重心の運動保存の原理（＝外力が働かない場合，慣性中心は等速直線運動をする）

２．活力保存の原理（＝今日の力学的エネルギー保存則に相当するもの）

3．面積保存の原理（＝今日の角運動量保存則に相当するもの）

である．つぎに

4．最小作用の原理

が挙げられる．これは，ラグランジュが『解析力学』（注6）で提起した形式

$$\delta \int mvds = 0, \qquad (1)$$

（ここで m は質点の質量，v は速度，ds は線要素）

を

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2} = 0, \qquad (2)$$

（ここで　h は任意定数）

と書き換えたもので，ヤコビの“最小作用の原理”といえば，通常これを指す．ここで U はポテンシャル関数を表しているが，当時は今日のものと符号が逆になっている．

最小作用の原理を導入した後，ヤコビは第8講で力学形式の構造を大きく入れ換える．すなわち，ハミルトンの原理

$$\delta \int_0^t Ldt = 0, \qquad (3)$$

（T は運動エネルギー．ここで $L=T+U$，ただし今日の書き方では $L=T-U$）

を力学の基礎に据え，ここからニュートン方程式・ラグランジュ方程式，さらにハミルトンの正準方程式を導いていくのである．ここでのポテンシャル関数は時間 t を陽に含んでいると仮定されている．これを原理とすることにより，非保存力系のひとつの場合，すなわち上述したポテンシャル関数に対してもこれらの方程式を導くことができる．今日，たとえばランダウ・リフシツの『力学』（注7）に見られるような，ハミルトンの原理を第1原理とする力学体系の原型はここにある．

ヤコビは5つめの原理として

5．最終乗式の原理

を挙げる．原理を提示したのち，さまざまなタイプの微分方程式に「ヤコビの最終乗式」をどのように適用して積分を求めていくかが第10講から第18講にかけて述べられている．最終乗式は微分方程式を解くための一手法であるが，ヤコビはこれを，活力保存の原理や面積保存の原理と協調するものとして原理と位置づけている．

ラグランジュになく，ヤコビにあるもの，そして，ヤコビにありながら，現代のランダウ・リフシツやアーノルドの教科書では原理として扱われていないのが，最終乗式である．このことを指摘した力学の歴史的研究は，筆者の知る限り，ない．

2）ハミルトン形式の導入

正準座標系（p, q）を導入し，運動方程式を正準形

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \tag{4}$$

（ここで $H = T - U$, ただし今日では $T + U$）

で記述すること，作用積分がわかれば方程式の解が求まるが、作用積分 S はハミルトン・ヤコビ形と呼ばれる非線形1階偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0, \tag{5}$$

をみたすことは，すでにハミルトンが 34 年の“動力学における一般的方法”（注8）および 35 年の“同第2論文”（注9）で提示している．『力学講義』では，これ体系的に整理したものが示されている．

ヤコビは，ハミルトンの原理の極値を与えるものが運動方程式の解（＝運動の軌跡）であるとし，これを非線形1階偏微分方程式の解に帰着するが，ハミルトンの結果を拡張し，ポテンシャル関数が時間を陽に含む場合にも適用できるように構成している．この拡張は，つぎのような意義がある．変分問題では，作用積分内の非積分関数が一般の関数（厳密には2回連続微分可能な関数だが，ヤコビの理解はそこまで達していない）の場合を考察することになる．運動エネルギーを x を t で微分したものの関数，ポテンシャル関数を t と x の関数としておけば，その和（今日のいい方では差）は一般の関数と自然にみなすことができる．こうすることにより，純粋数学的な変分問題も非線形1階偏微分方程式に帰着できることが示せる．『力学講義』第19，20講では変分法でのハミルトン・ヤコビ形式を射程にいれて力学のハミルトン・ヤコビ形式を提示しているのである．

ヤコビは，一旦はポテンシャル関数が時間を陽に含む場合にまでハミルトンの成果を拡張した後，その特別な場合として，ポテンシャル関数が時

間に依存しない場合の定式化を第21講で示し，実際にはこちらを使って力学の問題を解いている．またハミルトン自身も実行していることであるが，運動方程式は必ずしも正準形式である必要はなく，ニュートン方程式の解も1階偏微分方程式に帰着でき，ヤコビは具体的な力学の問題を例示するときは，ニュートン方程式で運動を記述することからはじめている．

ハミルトンの仕事に対するヤコビのもっとも重要な発見は，常微分方程式系でかかれる運動方程式を直接解くよりも，1階偏微分方程式を解くほうが容易に解が求められる場合（＝変数が完全に分離する場合）があることに気づいたことであろう．当時は，偏微分方程式をいかに常微分方程式に帰着してそれを解くかが大きな問題であったから，これは注目すべき発想の転換である（注10）．そのうえで彼は，偏微分方程式を変数分離形に帰着するための変換を試みる．一例として楕円座標系が導入された．座標変換を実際に示したうえで，力学の問題から導かれる偏微分方程式を解いているため，ヤコビの主張はきわめて強力なものになっている．

ハミルトン自身は，公刊した論文のなかでは1回だけ偏微分方程式を解いて運動方程式の解を求めているが，それは単純な2体問題であったにもかかわらず，変数を分離する発想がないため，直接運動方程式を解くのと同程度の手間がかかっていた（注11）．

3）力学の問題に現われる方程式の解の構造

前述した経緯から得られた楕円座標系を導入した後，ヤコビは楕円座標系を用いていくつかの問題を解決している．また，ハミルトン・ヤコビ形をした偏微分方程式の性質を利用して，アーベルの定理（アーベル積分の加法定理）の別証明も与えている．

このあとヤコビは，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の構造，ハミルトン形式がもつ積分の数学的な特徴に触れて，講義を終える．

ヤコビ自身が序文で「運動方程式の積分を扱う際，その方程式が特殊な形式をしているために得られた利点を研究する」と述べているように，個別の力学の問題を離れ，力学に現れたあるタイプの方程式がもつ数学的特性を論じるのが，第31講から第36講の目的である．ラグランジュの『解析力学』では，個々の問題に対して，いわゆるラグランジュ方程式を立て，その解を求めている．ハミルトンも，個別の問題に対して，作用積分をどのように定義するかを論じている．しかし，彼らには，力学の問題に対し

て立てた方程式を「あるタイプの方程式」とみなし，その解の特性あるいは構造といった視点はない．これもまた，ヤコビの『力学講義』の大きな特徴の一つであろう．

4．ヤコビの力学研究の現状と今後の課題

『力学講義』に言及している分野の歴史的研究のなかで，ヤコビの仕事はどのように論じられているか，見ていこう．

まず，力学史においては，ヤコビがハミルトン形式を「幾何学化」したと評価されている（注12）．その例として，最小作用の原理の新しい形式の提示，力学形式を変分形式に読みかえることなどがこれまで指摘されてきた．

「幾何学化」という言葉が適切かどうかは議論の余地があるが，ヤコビが力学と数学との関係について，彼独自の価値観を持っていたことは疑いないと思う．筆者自身が発見した例として，変分問題におけるオイラー・ラグランジュの方程式の扱い方がある．変分

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot{x})dt, \qquad \dot{x}=\frac{dx}{dt}, \tag{6}$$

の極値曲線を与える方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{7}$$

で，ここに関数 f のかわりに $L=T+U$（今日の書き方では $T-U$）とおき，x と $\dot{x}$ の t に関する微分を質点の位置とそこでの速度とみなせば，力学のラグランジュ方程式が得られるという今日的な理解は，筆者が知る限りヤコビによるものである．ラグランジュは極値曲線の方程式も，力学のラグランジュ方程式も導いており，両者が類似の形式を持っていることに当然気づいていたと察せられるが，この両者を結びつけることはしなかった．

以上見たような問題の立て方が，ヤコビの力学研究を分析するうえで，普通のものである．

偏微分方程式論についても，ヤコビが偏微分方程式を直接解く新しい解法を提示し，さらに常微分方程式を偏微分方程式に帰着させて解く可能性を示唆したという事実と，そのアイデアは力学から導かれたということが

指摘されている程度である(注13). 具体的にどうやって力学から導いたのかまで踏み込んだ議論は，筆者の知る限り，ない.

変分法のハミルトン・ヤコビ理論についても，原点が力学にあることと，ヤコビの弟子たちがいかに理論を数学的に拡張したかを論じている著作がある程度である. 2階の変分を吟味して極値を判定する方法を提示したのは 1836 年論文(注14)で，これも力学と関係がある. この論文自体がきわめて難解なため，これを解釈し、弟子の仕事と歴史的につなぎ合わせるのが精一杯の状態である(注15).

『力学講義』にはあまり触れられていないが，楕円関数論・アーベル関数論等に関しても，個別の学説史の通論のなかでヤコビの業績に触れ，その歴史的価値を論ずることが行われている程度だと思う. ただし，この方面に関しては，筆者は，責任のあることを述べられないが.

今，『力学講義』の全体の構想を見直したとき，このような個別の理論の歴史の中でヤコビを評価するという先行研究のやり方に対して，疑問を感じずにはいられない. 『力学講義』でヤコビが学生に伝えたかったものは，力学・変分法・偏微分方程式論というように区分できるだろうか. 新しい力学形式の誕生，それによって生まれた新しい数学形式の紹介とその数学的特性を包括的に論じる，というのがヤコビの目的ではなかったか.

さらにいえば，ヤコビはある問題を解くために，すなわち定理を導くために，今日からみれば別の分野に属する手法をしばしば使っていたのではないだろうか. たとえば，ヤコビの最終乗式は微分方程式論に関するものだが，そのアイデアは楕円関数から来たもので，それが力学の一つの原理として定着した，あるいは，彼の力学の問題の考察が楕円関数の進歩に決定的な役割を果たした，というような仮説をたてて，それを検証していくという方向での研究がもっとなされるべきだと思う.

だが，それを実行しようとすると，大きな困難が横たわっていることに気づく. 私達は，歴史研究にとりかかる以前には数学の専門分野を修めており，その知識が使える範囲で歴史研究をしようとする. たとえば，楕円関数論に詳しい人は力学には疎いどころか無関心というのが普通である(注16). しかし，今提示したような課題に取り組もうとするならば，必要とあれば，新たな数学の分野をその時点で勉強するという意気込みが欠かせないものになる. 数学史をやろうとしたとき，語学や哲学を新たに勉強するよりも，新しい数学的手法を身につけるほうが，心理的な抵抗はは

るかに大きいのではないか．ヤコビ個人に踏み込み，どうしてこのような理論を発見したかとか，なぜこのような拡張を成し得たということを論じた研究がほとんどないことの原因は，ここにありそうだ．

5．数学の一分科としての『力学講義』

最後に，以上の考察をふまえたうえで，『力学講義』自体を力学の歴史のなかでどう位置づけるかを論じて行きたい．

ヤコビ自身の力学の捉え方は，運動する質点群，それ自身を解析するのではない．その軌跡を幾何学的に考察する，あるいはその方程式の解を研究するのが目的なのである．逆にいうと，個別の力学の問題が解けた時点で彼の解析が終わったわけではなく，そのタイプの方程式の数学的構造に考察を進めていく．解析力学の応用として，剛体や流体の運動の解析を試みるような方向をとることも可能であったが，ヤコビはこの方面については，ほとんど論じていない．こうした事実から，ヤコビは力学のある部分を数学の一分科として捉えられることの可能性を指摘し，それを『力学講義』と題して論じたのではないだろうか．

勿論当時の数学者は，力学に深い関心を持っていた．実際に力学現象を方程式で記述し，それを解くのは物理学者とともに数学者もやっていた．ラグランジュも，ハミルトンもそうである．しかし，彼らの力学研究は，運動方程式を物理的な条件のもとで解き，その解が得られれば，考察は完了していた．彼らには運動していく物体を考察するという意識があった．彼らを数学者と呼ぶのならば，彼ら数学者は，物理学の一分科として力学を，数学のほかに研究していたのである．

ヤコビの『力学講義』はハミルトン形式を普及させた．以降，熱学や電磁気学をハミルトン形式で記述することが盛んに行われるようになる．一方で，後進の数学者によりハミルトン形式の純粋に数学的な考察も進められるようになった．こうした事情についての考察は，他日を期したい．

自己の力量を見誤り，準備不十分なままで演壇に立ってしまったが，研

究集会でいただいた貴重なご意見・ご教示をもとに，幾分かの改訂を加え，本報告を書き上げることができた．参加された方に深く感謝したい．

12月に，デカルト生誕 400 年記念講演会での講演のため来日された，パリ第 7 大学のクリスチャン・ウゼル教授と面会する機会を得，そこでお話しいただいたことも本報告には取り込んである．ベルリン・アカデミーでヤコビの手稿を整理されたヘルベルト・ピーパーさんには，同アカデミーを案内していただいた．彼は現在，ヘルムホルツの手稿を整理中という．また，現在変分法のハミルトン・ヤコビ理論の歴史的研究に取り組んでおられるトロント大学科学技術史研究所のクレイグ・フレイザー教授とは，恒常的に連絡を取り合い，有益な示唆を受けた．ここに記して感謝したい．

文献と注

1) C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, (1866), Berlin, Clebsch ed. reprinted by Chelsea in 1969.

2) V.I. アーノルド『古典力学の数学的方法』（1980）安藤・蟹江・丹羽訳，岩波書店．

3) この章の記述にあたっては，C.J.Scriba, "JACOBI, Carl Gustav Jacob," *Dictionary of Scientific Biography* vol.7, pp.50-55. C.C.Gillispie (ed.), (1973) Charles Scribner's Sons. New York, およびヤコビの研究業績の一覧表 "Verzeichniss sämmtlicher Abhandlungen C.G.J.Jacobi," =in *Jacobi's Werke*, vol.7, pp.425-440, を参考にした．ヤコビの本格的な伝記としては，Leo Koenigsberger, *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, (1904), Leibzig. が挙げられる．また，ディリクレによる追悼講演 L.Dirichlet, "Gedachtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi," Gehalten in der Akademie der Wissenschaften am 1. Juli 1852 = in *Jacobi's Werke*, vol.1, pp.3-28.も参考になる．

4) 最近出版され，入手しやすいものとしては，たとえば，F.クライン『19 世紀の数学』弥永昌吉監修，共立出版（1995年，原著は1926年），高木貞次『近世数学史談』岩波文庫（1995 年，初版は1931 年共立社）．

5) H.Pulte, "C.G.J.Jacobis Vermächtnis einer 'konventionalen'

analytischen Mechanik: Vorgeschichte, Nachschriften und Inhalt seinerletzen Mechanik-Vorlesung", *Annals of Science*, 51(1994), 497-516.
6) J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*, 2 vols. 1788 Paris, Œuvres vol.11, 12.
7) イ・イェ・ランダウ，イェ・エム・リフシツ，『力学』，(1974)，広重・水戸訳，東京図書．
8) W.R. Hamilton, "On a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.*, Part 2, (1834), pp.247- 308. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.103-161.
9) W.R. Hamilton, "Second Essay on a General Method in Dynamics," *Phil. Trans.* Part 1,(1835), pp.95-144. = in *Mathematical Papers*, vol.2, pp.162 -211.
10) たとえば，S. S. Demidov, "The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18th and 19th Centuries," *Archive for History of Exact Sciences*, vol.26, (1982), pp.325-350.
11) 前出8) でなされている．
12) たとえば，R. Dugas, *A History of Mechanics*, (1988, First edition 1955) Dover.
13) たとえば，前出 10)，T. Hawkins, "Jacobi and the Birth of Lie Theory of Groups," *Archive for History of Exact Sciences*, vol.42, (1991)，pp.187-278，等でとりあげられている．
14) C.G.J.Jacobi, "Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen," *Jl. für die reine u. angew Math.* vol.17, (1837), pp.68-82.=in *Werke*, vol.4, pp.41-55.
15) たとえば，H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, (1980), Springer-Verlag には，ヤコビとその学派の変分法の仕事として，2階変分に関するものとハミルトン・ヤコビ理論に関するものが述べられている．
16) たとえばデュドネ編『数学史』(1985年，岩波書店)の第7章楕円関数とアーベル積分の項目(執筆分担者はC.ウゼル，浪川幸彦訳)には，この分野と力学の関係が論じられている．ウゼルによれば，この話題をあつかった先行研究はないそうである．

力学講義　目次

１．はじめに．

２．運動方程式．その抽象的な形式．力の関数．

３．重心の運動の保存の原理．

４．活力保存の原理．

５．面積保存の原理．

６．最小作用の原理．

７．最小作用の原理のより深い考察．ラグランジュの未定乗数．

８．ハミルトンの積分と運動方程式の第２ラグランジュ形式．

９．運動方程式のハミルトン形式．

１０．最終乗式の原理．オイラーの乗数の３変数への拡張．その場合の最終乗式の立て方．

１１．最終乗式の理論で用いられる行列式の特徴．

１２．多変数の系の乗数．

１３．関数行列式．乗数のための偏微分方程式を立てる場合へのその応用．

１４．乗数を定義する方程式の第２形式．順次還元された微分方程式系の乗数．特殊な積分を利用した乗数．

１５．高階の微分を含む微分方程式系の乗数．自由な質点系への応用．

１６．乗数を求める例．抵抗のある媒質中あるいは真空中で，固定された中心から質点が受ける引力．

１７．束縛のある運動方程式系のラグランジュの第１形式での乗数．

１８．束縛のある運動方程式系のハミルトン形式での乗数．

１９．ハミルトンの偏微分方程式とその等周問題への応用．

２０．ハミルトンの偏微分方程式から導かれた積分方程式が，常微分方程式系を実際にみたすことの証明．自由な運動の場合のハミルトン方程式．

２１．t が陽に現われない場合の研究．

２２．ラグランジュの方法による２つの独立変数を含む１階偏微分方程式の積分．２つの固定された部分にのみ依存する力学の問題への応用．平面上，あるいは曲面上の測地線上の質点の自由な運動．

２３．重心保存の原理をみたす場合，個々の問題に対する偏微分方程式の還元．

２４．太陽のまわりの惑星の運動．極座標での解．

２５．固定した２点に関する問題の惑星間の距離の導入による解法．

２６．楕円座標系．

２７．平面上・空間内の楕円座標系の幾何学的意味．楕円の表面積の求積法．曲線の求長法．

２８．３軸楕円体上の最短曲線．地図投影法．

２９．２つの固定中心から質点に作用する引力．

３０．アーベルの定理．

３１．１階偏微分方程式に関する一般的研究．積分可能条件のいろいろな形式．

３２．積分可能条件の一般的形式に関する直接証明．p を q の関数として定めるような任意定数に等しいとおかれた，関数 H の導入．

３３．２つの線形偏微分方程式の共通の解について．

３４．先の結果を１階偏微分方程式の積分，特に力学の場合に応用すること．力学の微分方程式において，得られた２つの積分から３つめの積分を導くことに関する定理．

３５．力学の問題においてハミルトンの方法によって得られる積分に関する２つのクラス．それらに対して（ϕ，ψ）の値を定めること．

３６．摂動論．

補遺．１階非線形偏微分方程式の積分．（クレプシュ による）

参考

ヤコビに関する資料はきわめて充実している．公刊された論文はもとより，死後クレプシュにより起こされたものも一部全集には収録されている．また，ベルリンのブランデンブルグ・アカデミー（いわゆるベルリン・アカデミー）では，手稿類がきわめて使いやすく整理されており，ヤコビ生誕 200 年をめざして新しい全集を編纂する予定もあるという．パスポートさえあれば，誰でも見ることができ，コピーもしてもらえる．ただし，係員のほとんどはドイツ語しか話してくれない．