ギリシアにおける
相似図形に関する定理の表現

斎藤 憲 (千葉大学文学部)

ここで問題にする相似図形に関する定理とは，その最も一般的な形では

- 相似平面 (立体) 図形は対応辺の比の 2(3) 重比を持つ

というものです．ギリシアの数学文献では，この命題は種々の図形に対して種々の形で述べられています．たとえば『原論』第 12 巻には

命題 12–2: 円は互いに直径の上の正方形のように対する．
命題 12–18: 球は互いにそれらの直径の 3 重の比にある．

ここにすでに，円と球での表現の相違が見られます．この表現の相違がエウクレイデス自身の意図によるものなのか，それともエウクレイデス以前のギリシア数学の発展の経緯を反映するものなのか，ということがここでの問題です．

私が以前から考えている仮説は次のようなものです．比例論発展の初期においては 2 重比という術語は存在せず，相似図形の比 — 面積比のことですが,『原論』等の理論的幾何学には面積という言葉は用いられません — は正方形の比に関連づけられていた．後にこの比が辺の比の 2 重比 (辺の比を 2 回繰り返した比) に関連づけられた[1]．

[1] 2 重比，3 重比の定義は次のとおり．

> **『原論』第 5 巻定義 9:** 3 つの量が比例するとき，第 1 の量は第 3 の量に対して第 2 の量に対する比の 2 重の比を持つといわれる．
> **『原論』第 5 巻定義 10:** 4 つの量が比例するとき，第 1 の量は第 4 の量に対して第 2 の量に対する比の 3 重の比を持つといわれる．そして何個の量が比

この主張は最近 (1995 年) の論文でも展開したのですが，その後に気がついたことを補足して，現時点での私の研究の状況を簡単に紹介します．

関連する資料を検討してみます．我々に伝わるギリシア数学の最も古い証明であるキオスのヒッポクラテスによる月形の求積の断片，これはシンプリキオスが伝えるものですが，次のような一節があります．

> 相似な円の切片どもの持つ比は互いに，それらの底辺の平方における比と同じである．このことを彼は直径どもが平方において球と同じ比を持つことを証明するによって証明した．(*CAG* 9:61 = 伊東 p.59)

ここで「平方において」という言葉は dynamis という単語の与格 dynamei です．これは『原論』では第 10 巻の通約不能量論以外では用いられない，やや古風な表現です．アルキメデスでは時折見られますが，彼の後期の著作ほど使用頻度が落ちることを佐藤徹氏は指摘しています (佐藤, p.291)

一方,『原論』では一般に相似平面図形の比は 2 重比に関連づけられます．

> **『原論』命題 6–19:** 相似な三角形は互いに対応する辺の比の 2 重の比にある．
> 系: このことから次の事が明らかである．もし 3 つの線分が比例するならば第 1 は第 3 に対するように，第 1 の上のエイドスは第 2 の上の相似で相似な位置に描かれたエイドスに対する．これが証明すべきことであった．
> **『原論』命題 6–20:** 相似多角形は互いに辺の比の 2 重の比をもつ

すると，次のような想像をしてみたくなります．キオスのヒッポクラテス (紀元前 430 頃) の時代には相似平面図形の比が対応する辺上の正方形の

例しようと常につぎつぎに同様である．

すなわち，2 重比，3 重比とは，連続する比例項の第 1 項対第 3 項，あるいは第 1 項対第 4 項，を意味します．記号で書けば，$a:b::b:c::c:d$ のとき，$a:c$ は $a:b$ の 2 重比，$a:d$ は $a:b$ の 3 重比となります．以下では $2(a:b)$ で $a:b$ の 2 重比を，$3(a:b)$ で $a:b$ の 3 重比を表すことにします．なお，比の操作を代数演算と関連づけるには $(a:b)^2$, $(a:b)^3$ という表記のほうが理解しやすのですが，ギリシアにおける多重比の観念は累乗よりも多倍に近いというのが私の考えです．

比と同じであることが知られていた．後にそれは2重比という，より抽象的，代数的な概念によって表現されることになったが，伝統的に正方形に関連付けられていた円の(面積)比については『原論』(紀元前300頃)にまで，以前の表現が残存した．

『原論』をもう少し詳細に分析するとこの想像を補強する事実が明らかになります．上で見た命題6–19に付属する系を検討しましょう．これは6–19と本質的に同じことを，2重比という術語を用いずに「3線分が比例するときの第1の第3に対する比」という表現で表しています．もう一つ，この系は定理が成り立つ図形を三角形から一般の図形(エイドス)に勝手に拡張して，6–20の内容を先取りしています．これも興味深い問題ですがここでは深入りしません[2]．そして注目すべきことに,『原論』第6巻で相似図形の比に関する定理を用いる命題(6–22, 6–25, 6–31)はすべて6–19の系を用いており，2重比という術語を用いていません[3]．利用されるのは「第1が第3に対する比」というやや冗長な系6–19の表現です．

すると，正方形の比，3線分が比例するときの第1の線分の第3の線分に対する比，2重比，という順序で相似図形の比に関する表現が進化をとげたということを考えることができます．あとは資料からこの想像がどこまで裏付けられるかです．

アルキメデスの『螺線について』では，螺線の求積を行なうために，螺線の中心角を等分して，螺線に内接する多数の扇形の和を考えます．アルキメデスの螺線の定義から，これらの扇形の半径は等差列を成すので，それらの面積の合計は2乗のシグマに相当する式で表現されます．以上は現代的な説明ですが，アルキメデスはまず命題10で等差列をなす線分上の正方形の和の関係を得たあと，これを正方形から相似な扇形に拡張できることを命題10の系で主張します．そのときの彼の言葉は，

---

[2]以前の私の議論(1993)は修正が必要とは思っていますが，まだ考えが固まっていません．

[3]6–31では2重比が用いられる別証明があり，しかも私にとって不都合なことに12世紀のゲラルドによるラテン語版(参考文献のBusard)では2重比が用いられる別証明が先になっています．さらにこのラテン語版は，Knorrによれば我々の所持するギリシア語版よりも本来の『原論』に忠実である可能性が高いものです(Knorrの論文参照．Knorrは他のラテン語版についても検討しています)．もちろん言い訳はいくらでも考えられるのですが，これには少々悩んでいます．

なぜならこれらの相似なエイドスどもは互いに正方形と同じ比を持つからである．

というものです．

ここでアルキメデスが相似扇形を『原論』6–19 系で用いられたのと同じエイドスという語で表し，それらの比を正方形の比に関連づけているのは，興味深いところです．

さらにパッポス『数学集成』第 3 巻の最後には，立方体倍積問題の解法に関連して，

> **『数学集成』命題 3–59:** 2 つの等しくない直線が与えられ，これらの直線が互いに持つ比が与えられているとき，機械的作図法は，2 つの中項を見い出す．それらの第 1 の直線の上に描かれた「エイドス」が第 2 の直線の上のものに対するように，第 1 が第 4 に対する．

という表現が見られ，ここでは「エイドス」は文脈上は立方体，一般的には相似立体図形を指します．

このように，2 重比 (立体図形については 3 重比) という術語を用いない相似図形の表現がかなり後世まで残っていたことが確認できます．それならば，2 重比という術語が新しいことにはならないのではないか，と言われそうですが，2 重比というコンパクトで便利な表現が一度確立した後で，「第 1 が第 3(4) に対する比」などという表現が新たに使われることは考えにくいことであり，やはりこの冗長な表現は以前の表現の残存と考えることができると思われます．

パッポスで立体図形の議論が出たところで，『原論』の相似立体図形に関する定理も検討しましょう．

> **命題 11-33:** 相似な平行六面体は互いに，対応する辺の 3 重の比にある．(12–8 で角錐に，12–12 で円錐，円柱に拡張)
> **系:** このことから，次のことが明らかである．もし 4 線分が比例し，第 1 が第 4 に対するように，第 1 の上の平行六面体が第 2 の上に，相似で相似な位置に描かれた平行六面体に対する．第 1 が第 4 に対して，第 2 に対する比の 3 重の比を持つからである．

ここでも，3 重比という表現に並行して,「第 1 の第 4 に対する比」という言い換えが存在します．興味深いのはこの命題 11–33 を利用する命題 11–37(比例する 4 線分上に描かれた相似平行 6 面体の比例) の証明です．これは命題 6–22 の立体版です．先程指摘したように，6–22 の証明は 6–19 でなく 6–19 系を用いており，2 重比という言葉は 6–22 の証明に現われません．そのため，わざわざ比例する線分の第 3 比例項を作図することが必要になっています (詳細は『原論』参照)．これに対して 11–37 の証明は 3 重比という術語を利用して，すなわち 11–33 を利用して行なわれます．6–22 で必要になった第 3 比例項 (ここでは立体ですから第 4 比例項まで必要になるでしょう) の作図は行なわれません．

ところが，先程も触れた中世ラテン語訳のゲラルド版では，上述の 11–37(ゲラルド版では 11–39) の証明はちょうど 6–22 と全くパラレルなもので，具体的に比例する 4 線分を作図して，11–33 系を利用するものです．このことは 3 重比を証明に用いることはエウクレイデスより後になって一般化したと考える有力な根拠になります[4]

もう一つ,「2 重比の不存在」を伺わせる資料に触れておきましょう．それはエウクレイデスの『デドメナ』(あるいは『ダタ』) です．ここでは命題 24 に注目します．

> 『デドメナ』**命題 24:** 3 線分が比例し，第 1 が第 3 に対して与えられた比を持つならば第 1 は第 2 に対しても与えられた比を持つであろう．

すならち，$A:B::B:G$[5]で $A:G$ が与えられた比であるならば，$A:B$ も与えられる，ということです．2 重比という術語を用いるならば，ある比の 2 重比が与えられるならば，もとの比もまた与えられるということになります.「与えられる」という術語は「確定する」「定量である」というイ

[4]しかし少々都合の悪いこともあり，ゲラルド版では 11–36(ギリシア語版の 11–33 に相当) には系が存在しません．平行六面体の比は辺の比の 3 重比として表されるのみで，その系にあたる「4 線分が比例するとき，第 1 が第 4 に対するように，第 1 の上の平行六面体が第 2 の上の相似で相似な位置の平行六面体に対する」という命題を明示的に述べている箇所はありません．

[5]比が同じであることをこの記号で表します．

メージでとりあえず考えていいでしょう．

この証明は，$A : B :: D : E$をみたし，かつ D, Eがともに (大きさにおいて) 与えられる 2 つの線分を見い出すことによって達成されます．まず与えられた線分 Dをとり，$A : G :: D : Z$によって Zを定めます．$A : G$は与えられた比で，Dが与えられていますから，Zも与えられます (prop.2)．Dと Zの比例中項 Eをとると，Eも与えられます．あとは $A : B :: D : E$を示すだけです．これは

$$A : G :: sq(A) : rec(A, G) :: sq(A) : sq(B)$$

$$D : Z :: sq(D) : rec(D, Z) :: sq(D) : sq(E)$$

により，まず正方形の比例 $sq(A) : sq(B) :: sq(D) : sq(E)$ が示され，これから命題 6-22 の後半によって $A : B :: D : E$が得られます．

なお，この証明には，D, E, Zを導入しない簡潔な別証明が知られていますが，やはり A, B上の正方形を作図します．これはこの証明を簡略化したものと考えられます．

もちろんこの議論は正しいのですが，ここで正方形の比例をまず示して，それから 6–22 の後半部を利用して線分の比例を導くのは少々奇妙な気がします．次のような議論を行なえば問題の『デドメナ』命題 24 は比例する 3 線分 A, B, G に限らず，比例する任意の同種の 3 量 A, B, G に対して証明できます．

$A : B :: D : E$が成立しないとき，$A : B > D : E$とすれば，$B : G > E : Z$も成立します．これから $A : G > D : Z$を得ることは容易です．これは矛盾です．同様に，$A : B < D : E$も否定されますから，$A : B :: D : E$を得るわけです．ここでは 2 つの比 $A : B$と $D : E$に対して，大きい，小さい，同じのどれか一つの関係が成立する，ということを仮定しています．この代りに，たとえば $A : B > D : E$のときに $A : B > D : E'$となる E'の存在 (第 4 比例項の存在) を仮定することでも議論は可能です．

以上の検討から,『デドメナ』におけるエウクレイデスには,「2重比が与えられる比は与えられる」といった，2重比に関する一般的な命題を証明する意図が欠けています．そしてまた彼が2重比という概念と術語をこの命題において意識していなかったこともかなり確実でしょう．これは，後の『デドメナ』命題68や70が合成比という概念を結びついていないことにも符合対応します(拙稿, 1986年論文参照).

私は『デドメナ』命題24は正方形の比が辺の比をなして比例する3線分の第1と第3の比であるという認識が，2重比という一般的な概念の導入より早かった，そしてこの時点では比例する3線分は興味のある対象であったが，一般的な比例する3量という概念は幾何学において特別な興味の対象でなかった．という考えるほうに傾いています．

相似図形の比とそれに関する種々の表現について，いくつかの指摘をして，いくつかの想像を述べてみました．ここであげた資料はギリシア数学の初期の発展について示唆に富むものであると思います．ここから何かをまとめたいと考えて色々と試みているところです．

参考文献

- Archimedes. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit I.L. Heiberg.* 3 vols. Leipzig, 1910–1915. Reprint, Stuttgart, 1972.

- Busard, H.L.L. *The Latin translation of the Arabic verstion of Euclid's* Elements *commonly ascribed to Gerard of Cremona.* Leiden, 1984.

- *CAG* = *Commentaria in Aristotelem Graeca*

- 伊東俊太郎.「ユークリッド以前」『数学の歴史 I: ギリシャの数学』19–73. 共立出版, 1979.

- Knorr, Wilbur R. "The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text and its Alternatives." *Centaurus.* 38(1996): 208–276.

- Saito, Ken. "Compounded Ratio in Euclid and Apollonius." *Historia Scientiarum*, 31(1986): 25–59.
- Saito, Ken. "Duplicate Ratio in Book VI of Euclid's Elements" *Historia Scientiarum*, 2nd Ser. 3-2(1993): 115–135.
- Saito, Ken. "Doubling the Cube: A new Interpretation of Its Significance for Early Greek Geometry." *Historia Mathematica*. 22(1995): 119–137.
- 佐藤徹.『アルキメデス方法』東海大学出版会. 1990.