ヒルベルトの問題から見た20世紀数学

杉浦光夫（津田塾大）

はじめに

20世紀数学は、勿論19世紀数学を受継いで発展して来たのであるが、この100年の間に、自から19世紀数学と異なる特色を備えるに至った。この発展の相を、1900年に発表されたヒルベルトの23の問題の内のいくつかについて、具体的に明らかにしたいというのが本稿の目標である。時間の制約から、ここでは第1、2、5、9問題のみを取上げる。

第５問題

ヒルベルトの提出した第５問題は、

① リーの連続変換群の理論を、群の演算並びに作用を定義する関数の微分可能性または解析性の仮定なしで、連続性のみを仮定して展開することができるか」というものであった。

これに対し、フォン・ノイマンは、1933年に、実数の加法群が平面に、連続ではあるが微分可能でない仕方で作用し得ることを示して、上の形の第５問題は否定的に解決されたのである。そしてそれと同時にフォン・ノイマンは当時導入されたばかりの位相群の概念を用いて第５問題を次のように新しく定式化した。

② 位相リー群Ｇ（位相多様体である位相群）は、（解析的）リー群か」

そしてＧがコンパクトであるとき、この問題に肯定的な答を出した。ポントリャーギン、シュヴァレーは、Ｇがアーベル群、可解群のときも肯定的であることを示した。

後1948～49年頃岩澤健吉とグリースンは、視野を広げ、局所コンパクト群全体の中でのリー群の位置と特徴付けを求める問題として第５問題をとらえ直した。彼等の立てた問題は、次の形のものであった。

③ 局所コンパクト群Ｇで、小さい（正規）部分群を含まないものはリー群である。」

④ 任意の局所コンパクト群Ｇは、リー群の射影極限となる開部分群を含むか」

③、④は1952～53にグリースンと山辺英彦によって肯定的に解決された。

②は③の一部と他の結果を合わせて、モンゴメリー・ジピンによって52年に解決した。

③に関し、リー群と対蹠的な位置にあるのが、ｐ進体 のような完全不連結な局所コンパクト群で、単位元の任意の近傍は、開正規部分群を含む。1964年にセールは、任意の完備付値体k上の解析的リー群の理論を作り、このような群にもリー環が定義され、リー理論が成り立つことを示した。

これは、アルキメデス付値と非アルキメデス付値に共通なリー群論が存在することを示したものであり、第５問題におけるリー群の特徴付けとは別の視点を示した点において注目に値する。

第９問題

第９問題は、「代数体において、高次冪剰余相互法則を証明せよ」という問題である。これはガウス以来19世紀の代数的整数論の発展を推進した問題であった。それは適当に冪剰余記号を定義すれば、平方剰余相互法則と類似の形で高次冪剰余相互法則が成り立つことを予想するものである。ヒルベルトは、代数体kの絶対類体（最大不分岐アーベル拡大体）Ｋの存在を示し、その基本的性質を証明することによって相互法則が証明されることを予想した。そしてこの路線に沿って、フルトヴェングラーは、任意の奇素数ｐに対し、１のｐ乗根を含む代数体ｋにおいて、ｐ冪剰余相互法則の証明に成功したのであった（1909年）。一方高木貞治は分岐する場合をも含む代数体の、アーベル拡大の一般論を、類体論という形で建設した（1920年）。高木は類体の基本性質の一つとして次の同型定理をとらえていた。

代数体ｋの有限アーベル拡大体Ｋのガロア群Ｇ＝Gal(K/k)は、Ｋに対応する合同イデアル類群Ｈと同型

である」　この同型定理をフロベニウス置換を用い具体的に与えたのが、アルティンの一般相互法則（1927年）であり、それから任意の自然数ｎに対するｎ冪剰余相互法則が直ちに導かれる。こうして歴史的経緯から重要視されて来た冪剰余相互法則は、アルティンの手によって構造的な一般相互法則の形に定式化され、代数体のアーベル拡大の理論（類体論）の基本定理となった。さらに類体論は、有限体上の一変数代数函数体でも成り立つことが1930年代に知られた。

一方アルティンは、代数体kの任意のガロア拡大体Kと、ガロア群Ｇ＝Gal(K/ｋ)の表現ｆに対してアルティンのＬ函数Ｌ(ｓ、K/ｋ、f)を定義した。K/ｋがアーベル拡大のとき、Ｇの既約表現χは1次元で、Ｇの指標に他ならない。一般相互法則により、χはｋに対応する合同イデアル類群Hの指標と見なされるのでこの場合には、アルティンＬ函数Ｌ(ｓ、K/ｋ、χ)は、ｋにおけるヘッケのＬ函数に等しい。これが一般相互法則の解析的な表現である。

K/ｋがアーベル拡大でないときの、アルティンＬ函数のこれに対応する解析的表現を求めることは、1960年後半から、ラングランヅによる広大な研究プログラムの中で研究されている。こうしてヒルベルトの第９問題は、ヒルベルトの予想した枠を越えて発展した。

第１、２問題

第１問題は、カントールの集合論が残した二つの問題、即ち「連続体仮説」と「整列可能問題」の解決を問題とする。

1904年ツェルメロは、選択公理（ＡＣ）を導入して、任意の集合が整列可能なことを証明した。逆に整列集合では、選択函数が直ちに構成できるから、整列可能定理と選択公理は同値な命題である。1908年集合論の公理系がツェルメロによって導入され、のちフレンケルによって置換公理が補われ、ツェルメロ、フレンケル（ＺＦC）集合論の公理系が成立した。以下ではＺＦＣからＡＣを除いたものをＺＦ集合論という。

1940年ゲーデルは「ＺＦ集合論が無矛盾ならば、それは選択公理または一般連続体仮説（ＧＣＨ）を添加した体系も無矛盾である」ことを証明した。さらに1964年に、コーエンは「ＺＦ集合論に対し、ＡＣ及びＧＣＨは独立である」ことを強制法によって証明した。こうして連続体仮説の正否は、ＺＦ集合論を越えた問題であることが明らかになり、以後集合論の新しい公理の探求が盛んになった。

第２問題は、「実数論の無矛盾性を証明せよ」という問題である。ヒルベルトは、数学の各部門が公理系によって基礎付けられると考え、その公理系の無矛盾性を、いわゆる有限の立場に基いて証明することによって、数学の厳密な基礎付けができると信じていた。

これに対し、1931年ゲーデルは、不完全性定理「自然数論を含むような帰納的公理系Ｔが無矛盾ならば、Tにおける閉論理式Ｐであって、ＰもＰの否定もＴ内では証明不可能であるようなものが存在する」ことを証明した。これは誰も予想しなかった意外な結果であった。これから導かれる第二不完全性定理は、無矛盾性の証明に大きな原理的制約を課すものである。不完全性定理は公理化された数学の性格に対する深い洞察に基づくもので、数学基礎論に大きな影響を与えた。

まとめ

以上の例でもわかるように、ヒルベルトの問題には、出題者の意図を越えた新しい展開を示したものが何題もある。これは20世紀になって新たに発展した新しい分野（例えば位相幾何学、多変数関数論、非線型問題、確率過程論、大域解析学、単純群の分類問題等等）と共に、20世紀数学が、いかに19世紀数学から離れてきたかを具体的に示しているのである。