シュヴァレーの群論 II

杉浦光夫（津田塾大）

Iでリー群に関する研究を扱ったのに対し、このIIでは代数群に関する仕事を扱う。文中［　］は、末尾のシュヴァレーの群論に関する刊行物リストの番号を表わし、（　）は参考文献の番号を表わす。

§1.　レプリカと代数群

シュヴァレーが、そのリー群論の研究の中で、代数群との関連に最初に出合ったのがレプリカ理論であった。この理論は次の二つの側面A, Bを持つ。

A. 行列のレプリカという純線型代数学的概念が、標数0のリー環論の基礎部分に有効である。

B. Aのレプリカ概念が、複素線型代数群のリー環を特徴付ける。

Aについては I で詳しく説明したのでここでは繰返さないがリー環論の基礎定理である半単純性のカルタンの判定条件と、

可解リー環の代数閉体上の既約表現Dが一次元であるというリーの定理を、係数体を閉体まで拡大することなく、任意の標数0の体で証明できるという点にシュヴァレーは意義を見出していた。〔8〕の末尾の文章がそれを示している。つまりカルタンの判定条件は、カルタンではいわゆるルート空間分解という詳しい構造論を用いて$\mathbb{C}$上で証明されていたのが、その必要がなくなったことがメリットなのである。例えば標数0のリー環論の標準的教科書であるブルバキ『リー群とリー環』第1章の記述は、この事実が発見されたから可能だったのである。リーの定理については、$\deg D = 1$ は閉体でないときは言えない（反例 $SO(2)$ の自然表現）ので、$\dim(\mathfrak{g})=1$ ということで置換える。閉体のときは、これにシューアのレンマを適用すればよい（レプリカ理論を標数pで考えるとどうなるか及び、リー環でなく群で直接考えるとどうなるかは、岩堀（12）で研究されている。これは1の参考文献として挙げるべきであった。）

さてBについては、実は古くマウラーの研究(Sitz. Bayer. Akad. 1894)があることを［8］で注意している。マウラーの研究は、リーの理論を基礎にしているので、大域的でなく、また結論も意味がわかり難い。これに対し、シュヴァレーとトゥアンは、［8］で次のような明快な定理を証明した。

定理1. Gを$GL(n, \mathbb{C})$の連結複素リー部分群，$\mathfrak{g}$をGのリー環とするとき，次の二つの条件(1)(2)は同値である。

(1) Gは線型代数群である。

(2) $\mathfrak{g}$の任意の元のレプリカは$\mathfrak{g}$に含まれる。

[8]におけるこの定理の証明は，概略を述べただけである。実はシュヴァレーは，線型代数群の一般論を[18]で展開し，任意の標数0の体に定理1を拡張した(§3で述べる)ので元の形の定理1の完全な証明は結局発表されなかった。[8]に述べてある筋道に従って証明を完成することもできるが，別の見地からの定理1の証明が松島与三(15)で与えられている。

§2．コンパクト・リー群と代数群

シュヴァレーは，リー群論研究中に，もう一度代数群と出合う。それはコンパクト・リー群に対する淡中双対定理の解釈においてであった。

淡中忠郎は，ポントリャーギン(18)の双対定理を，非可換群に拡張しようという。誰でも思いつくが簡単ではない問題に挑戦して成功した。淡中は対象の群をコンパクト群Gに限定し，双対は既約性を仮定せずGの有限次元連続行列表現

(簡単のため以下これを単に表現という)の全体とし、表現としての自然な演算のみを$\mathcal{R}$に与えることで成功したのである。

定義1. 今Gをコンパクト群とし、その有限次元連続行列表現(以下これを単に表現という)全体の集合$\mathcal{R}$をGの<u>双対</u>と呼ぶ。$D \in \mathcal{R}$の次数(行列の大きさ)を$d(D)$と記す。$\mathcal{R}$の元の間には、次のような四種の演算が定義されている。以下$D, D_1, D_2 \in \mathcal{R}$とし、また$P \in GL(d(D), \mathbb{C})$とする。

(1) 直和 $D_1 \dotplus D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$

(2) テンソル積 $D_1 \otimes D_2$

(3) 同値 PDP^{-1}

(4) 複素共役 $\overline{D}$

定義2. 今$\mathcal{R}$の表現ζとは、各$D \in \mathcal{R}$に$GL(d(D), \mathbb{C})$の元$\zeta(D)$を対応させる写像$\zeta : \mathcal{R} \longrightarrow \prod_{d=1}^{\infty} GL(d, \mathbb{C})$で次の(i)→(iv)をみたすものをいう。

(i) $\zeta(D_1 \dotplus D_2) = \zeta(D_1 \dotplus \zeta(D_2)$

(ii) $\zeta(D_1 \otimes D_2) = \zeta(D_1) \otimes \zeta(D_2)$

(iii) $\zeta(PDP^{-1}) = P \cdot \zeta(D) \cdot P^{-1}$

(iv) $\zeta(\overline{D}) = \overline{\zeta(D)}$

今$\mathcal{R}$の表現全体の集合G^*に、乗法を

$$(\zeta_1 \zeta_2^{-1})(D) = \zeta_1(D)\zeta_2(D)^{-1}, \quad D \in \mathcal{R}$$

によって，群演算を定義するとG^*は群となる。$\mathcal{R}$に離散位相を与えておく．各$D\in\mathcal{R}$を固定したとき，$\zeta\mapsto\zeta(D)$が$G^*\to GL(d(D),\mathbb{C})$の連続写像となるような，最も弱い位相を$G^*$に入れるとき，$G^*$は分離位相群となる。$G^*$を$G$の<u>再双対群</u>という。

各$g\in G$に対し，$\zeta_g\in G^*$が

$$\zeta_g(D)=D(g),\qquad D\in\mathcal{R}$$

によって定義される。このとき写像

$$\Phi:g\longmapsto\zeta_g$$

は，GからG^*への連続準同型写像であることはすぐわかる。この自然写像Φに対し，次の淡中の定理が成立つ。

淡中双対定理　任意のコンパクト群Gから再双対群G^*への自然写像は全単写であり，位相群としての同型

$$G\cong G^*$$

が成立つ。

Gがアーベル群の場合には，$\mathcal{R}$には群構造が入り，ポントリャーギン(18)が，Gの位相群としての性質が，離散群$\mathcal{R}$の代数的な性質と対応することを発見していた。しかし淡中双対定理には，それまでこのような具体的な応用が発見されていず，ポントリャーギン双対定理の単なる形式的拡張と見ている人達も多かった。これに対しシュヴァレーは，Gをコンパク

ト・リー群と限定することによって，淡中双対定理に一つの具体的な意味を与えたのである。それはつまり，任意のコンパクト・リー群は実アフィン（線型）代数群の構造を持ち、この構造を与えるものが淡中双対定理であるという観点であった。この言い方は若干現代化した形で述べたのであって、[9]の段階では複素代数群の概念しかない（[9] P.135）から、正確にはシュヴァレーは、「任意のコンパクト・リー群Gは、ある複素代数群G^{*c}の実形である」ことを証明したのである。

この複素代数群G^{*c}（Gの複素化）を、シュヴァレーは次のように定義した。

先づGをコンパクト・リー群とし，Gの（行列）表現Dの（i,j）成分であるG上の複素数値函数を，$D_{ij}=f(i,j:D)$とし，その有限一次結合の全体を$\mathfrak{A}(G)$と記す。$\mathfrak{A}(G)$は$\mathbb{C}$上の線型空間であるが，また値の積で定義される函数を積として，$\mathbb{C}$上の多元環ともなる。Gの二つの表現CとDのテンソル積$C\otimes D$の行列成分が$C_{ij}D_{kl}$だからである。この多元環$\mathfrak{A}(G)$を，Gの表現函数環という。先づ$\mathfrak{A}(G)$について基本的なことは，次の近似定理である。

定理 A （ペーター・ワイル（17）の近似定理）コンパクト・リー群G上の連続函数環C(G)の中で，一様ノルム‖ ‖に関し，$\mathfrak{A}(G)$は稠密である。（[9]Ⅵ 定理3）

この定理の証明でGがリー群であることは、G上の有限な不変体積の存在の証明にしか用いないので、ハール測度を用いれば、実は任意のコンパクト群で成立つ。

コンパクト・ハウスドルフ空間は正規だから、$C(G)$はGの二点を分離する。即ちGの相異なる二点で異なる値をとる$C(G)$の元が存在する。従って上の近似定理から、$\mathcal{Q}(G)$もGの二点$g \neq h$を分離する。従って表現Dで$D(g) \neq D(h)$となるものが存在する。この事実を「コンパクト群Gは十分多くの表現を持つ」と表現する。このとき$\bigcap_{D \in \mathfrak{R}} \mathrm{Ker}\, D = \{1\}$である。

さてコンパクト・リー群の場合は、小さい部分群を持たない（I, §6参照）ことから、次の定理Bが成立つことをシュヴァレーは示した。

定理 B　任意のコンパクト・リー群Gは、忠実な表現Dを持つ。（[9] Ⅵ定理4）

実際Gの単位元1の開近傍Vで、$\{1\}$以外のGの部分群を含まないものが存在する。Vの補集合をFとすると、$\bigcap_{D \in \mathfrak{R}} (\mathrm{Ker}\, D \cap F) = \phi$だから、コンパクトなGの閉集合族$\{\mathrm{Ker}\, D \cap F \mid D \in \mathfrak{R}\}$は有限交差性を持たない。従って有限個の表現$D_1, \cdots, D_m$が存在して、$\bigcap_{i=1}^{m} (\mathrm{Ker}\, D_i \cap F) = \phi$となる。そこで$D = D_1 \dotplus \cdots \dotplus D_m$とおけば、$\mathrm{Ker}\, D \subset V$, $\mathrm{Ker}\, D = \{1\}$

となり，Dは忠実なGの表現である。

この定理Bはコンパクト群の間でコンパクト・リー群を特徴付ける定理である。実際コンパクト群Gが忠実な表現Dを持てば，Gは$GL(d(D),\mathbb{C})$の閉部分群であるリー群$D(G)$と位相群として同型であり，Gもリー群である。定理Bから，表現函数環$\mathcal{R}(G)$の最も基本的な次の性質が導かれる。

定理 C. コンパクト・リー群Gの表現函数環$\mathcal{R}(G)$は，有限生成環である。

実際D_0をGの忠実表現とすれば，D_0と$\overline{D_0}$の行列成分が$\mathcal{R}(G)$を生成することは，ワイヤストラスの多項式近似定理から直ちに知られる。（[9] VI §VIII 命題3） しかし[9]では定理B, Cの証明が後にあるので，忠実表現の存在を仮定しない場合にも定理Cが成立つことが証明されている。（[9] VI §7 命題6）

さて，$\mathcal{R}(G)$は数値函数の環なので，0以外の冪零元を含まない$\mathbb{C}$上の可換多元環である。従って現代的に云えば$\mathcal{R}(G)$を座標環とする$\mathbb{C}$上のアフィン代数多様体$\mathfrak{M}(G)$が定義される。[9]では多項式系の共通零点の集合としての$\mathbb{C}^n$内の（アフィン）代数多様体が定義されているだけで，他に代数幾何的な議論は全くない。そこでシュヴァレーは次のように話をすすめる。

定義 3. コンパクト・リー群Gの表現函数環$\mathcal{R}(G)$から$\mathbb{C}$への多元環としての準同型写像ω（$\omega(1)=1$）の全体

$\mathfrak{M}(G)$を、Gに付随する代数多様体という。

$\mathfrak{A}(G)$の生成元の一組 $z=\{z_1, \cdots, z_m\}$ を一つ取れば、

$$M_z=\{(\omega(z_1), \cdots, \omega(z_m))=\omega(z)\in\mathbb{C}^m \mid \omega\in\mathfrak{M}(G)\}$$

は、$\mathbb{C}^m$内のアフィン代数多様体であり、抽象的なアフィン多様体$\mathfrak{M}(G)$のモデルである。写像$\omega\mapsto\omega(z)$は、$\mathfrak{M}(G)$からM_zへの全単写である。

さて$\mathfrak{M}(G)$は群の構造を持つ。それを示すためにシュヴァレーは、淡中のアイディアを用いるのである。いまGの双対$\mathfrak{R}$の表現の定義（定義2）において、条件(iv)を除いたものをみたす写像$\zeta\in\mathfrak{R}\longrightarrow\bigcup_{d=1}^{\infty}GL(d, \mathbb{C})$を、$\mathfrak{R}$の複素表現と呼び、その全体の集合を$G^{*c}$と記す。$G^{*c}$は$G^*$と同じく

$(\zeta_1\zeta_2^{-1})(D)=\zeta_1(D)\zeta_2(D)^{-1}$ によって群となる。

命題 1　$\omega\in\mathfrak{M}(G)$に対し、$\zeta_\omega\in G^{*c}$を

$$\zeta_\omega(D)=(\omega(f(i,j;D)))$$

によって定義すれば、写像$\Psi:\omega\longmapsto\zeta_\omega$は$\mathfrak{M}(G)$と$G^{*c}$の間の全単写である。([9] VI § VIII 命題2)

実際$\{f(i,j;D)\mid 1\leq i, j\leq d(D), D\in\mathfrak{R}\}$が$\mathfrak{A}(G)$を張るから、$\Psi$は単写である。また任意の$\zeta\in G^{*c}$を一つ与えたとき、

$$\omega(f(i,j;D))=\zeta(D)\text{ の }(i,j)\text{ 成分}$$

によって$\omega\in\mathfrak{M}(G)$が矛盾なく定義できることが$f(i,j;D)$の間の基本関係を明示する([9] VI § VIII 命題1)ことによって示される。従って$\zeta=\zeta_\omega$となり、Ψは全写である。

以下この命題1の写像Ψによって$\mathfrak{M}(G)$とG^{*c}を同一視し、$\mathfrak{M}(G)=G^{*c}$とする。こうして、$\mathfrak{M}(G)=G^{*c}$は一方から言えば、$\mathbb{C}$上のアフィン代数多様体であり、他方からすれば群である。今Gの表現D_0で、その成分が$\mathfrak{O}(G)$を生成するものをとり、$\mathfrak{M}(G)=G^{*c}$のモデルとして、

$$M_{D_0}=\{\zeta_\omega(D_0)=(\omega(f(i,j\,;D)))\mid\omega\in G^{*c}\}$$

をとれば、M_{D_0}は$GL(d(D_0),\mathbb{C})$の代数部分群である。そこで以下$G^{*c}=\mathfrak{M}(G)$を、Gに付随する(複素)代数群と呼ぶ。このときG^{*c}の忠実な表現$\widetilde{D_0}$が

$$\widetilde{D_0}(\omega)=\zeta_\omega(D_0)$$

によって定義される。モデルM_{D_0}の位相によってG^{*c}は(複素)リー群となる。この位相はモデルのとり方に依存しない。

さて複素代数群G^{*c}は、実数体$\mathbb{R}$上で定義され、その実有理点の全体が元のコンパクト・リー群Gなのである。これがシュヴァレーによるリー群の場合の淡中双対定理の解釈である。

今$\mathfrak{M}(G)$において複素共役写像$\iota:\omega\longmapsto\overline{\omega}$が、

$$\overline{\omega}(f)=\overline{\omega(\overline{f})}$$

によって定義され、これは複素代数群G^{*c}の位数2の自己同型写像となる。その固定点の全体としてG^{*c}の実形

$$G^{*}=\{\zeta\in G^{*c}\mid\zeta(\overline{D})=\overline{\zeta(D)}\quad({}^{\forall}D\in\mathfrak{D})\}$$

が定義されるが、それは定義により、淡中によるGの再双対群に他ならな

い。こうしてシュヴァレーは、コンパクト・リー群に対して、淡中双対定理を次の形で証明する。

定理 D　1) 自然写像 $\Phi: g \longrightarrow \zeta_g$（ただし $\zeta_g(D)=D(g)$）により，任意のコンパクト・リー群 G は、その再双対群 G^* と同型である。　2) Φ により G と G^* を同一視すれば，G は G に付随する代数群 G^{*c} の実形である。（[9] VI定理 5, §IX 命題 1）

1)の証明に、シュヴァレーは，次の命題 2 を用いている。

命題 2．G をコンパクト・リー群，H を G の閉部分群で $G \neq H$ となるものとすれば，G の既約表現 $D \neq 1_G$（G の単位表現）で，$D|H$（D の H への限定）が，1_H を含むようなものが存在する。

この命題は一見技術的に見えるが，実はコンパクト群 G の等質空間 G/H 上の球函数による表現理論（E. カルタン(3)）を基礎にして考えると極めて自然なものである。カルタンの結果中ここに関係する部分だけ取出せば次のようになる。

カルタンの定理．G をコンパクト群、H をその閉部分群とする。

1)　G/H 上の連続函数の空間 $C(G/H)$ 上の，G の正規表現 T を

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x),\quad g \in G,\quad x \in G/H$$

で定義するとき，T は G の有限次元既約表現の直和となる。

2） Gの既約表現DがTに含まれるための必要十分条件は、$D|H \supset I_H$である。

1）は$C(G/H) \subset L^2(G/H)$として考えると，コンパクト群の既約ユニタリ表現は、有限次元になることからわかる。

2）は有限群の誘導表現に対するフロベニウス相互律のコンパクト群への自然な拡張の特別な場合である。$L^2(G/H)$上のGの表現Tは、Hの単位表現I_Hから誘導されたGの表現に他ならない（ヴェイユ（27）p.82 参照）。

このカルタンの定理の系として、上の命題2が導かれる。実際$G \neq H$ならば、G/Hは2点以上を含む。$C(G/H)$はG/Hの2点を分離するから、表現Tは既約表現$D \neq 1_G$を含む。カルタンの定理により$D|H \supset 1_H$である。

さてシュヴァレーによる淡中双対定理（定理D，1））の証明は次の通りである。

先ず行列Aに対し$\bar{{}^tA} = A^*$とおく。Gの表現Dの反傾表現$D^*(g) = {}^tD(g^{-1})$は任意の$\zeta \in G^{*C}$に対し

(1) $$\zeta(D^*) = \zeta(D)^*$$

をみたす。今その成分が$\mathfrak{A}(G)$を生成するGの表現D_0をとる。Gはコンパクトだから，D_0はユニタリ表現$D_0^* = \overline{D_0}$としてよい。このとき任意の$\omega \in G^* = \mathfrak{M}_R(G)$に対し、(1)から

$$\widehat{D_0}(\omega)^* = \zeta_\omega(D_0)^* = \zeta_\omega(D_0{}^*) = \zeta_\omega(\overline{D_0}) = \overline{\zeta_\omega(D_0)}$$
$$= \overline{\widehat{D_0}(\omega)}$$

であり、$\widehat{D_0}(G^*)$ は $U(d(D_0))$ ($d(D_0)$次ユニタリ群) の閉部分群であり、従ってコンパクトである。G^* の位相はモデル$\widehat{D_0}(G^*)$ で定められるから、G^*もコンパクトである。一方定義から任意の $g \in G$ に対し $\omega_g(f) = f(g)$ は、$G^* = \mathfrak{M}_R(G)$ に属するから、$\Phi(G) \subset G^*$ であり、$\Phi(G)$ はコンパクト・リー群 G^* の閉部分群である。

いまこのとき、次の(2)を示そう。簡単のために $\Phi(G) = G_0$ と記す。

(2)　$C = D \mid G_0 \supset 1_{G_0}$ となる G^* の任意の表現 D は単位表現 1_{G^*} を含む。実際、このとき、ある $\gamma \in GL(d(D), \mathbb{C})$ をとると、任意の $g \in G_0$ に対して

$$\gamma C(g)\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B(g) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

の形になる。従って任意の $\omega \in G^*$ に対し

$$\gamma C(\omega)\gamma^{-1} = \gamma \zeta_\omega(C)\gamma^{-1} = \zeta_\omega(\gamma C \gamma^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \zeta_\omega(B) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

となる。これは $C \supset 1_{G^*}$ であることを示す。いま帰謬法で証明するため、$G_0 \subsetneqq G^*$と仮定すると、命題2により、G^* の既約表現 $D_1 \neq 1_{G^*}$ で、$D_1 \mid G_0 \supset 1_{G_0}$ となるものが存在す

る。このとき(2)から $D_1 \supset 1_{G^*}$ となるので，仮定 $D_1 \neq 1_{G^*}$ から，D_1 は既約でない。これは D_1 に対する仮定に反し矛盾であり，$\Phi(G) = G_0 = G^*$ である。

こうして，シュヴァレーは，リー群の場合には代数群との関連において，淡中双対定理を証明したのである。

さらに彼は，G^* と G^{*c} の関係について次の定理Eを証明した。

定理　E　1) n 次元コンパクト・リー群 G に対し，それに付随する代数群 G^{*c} は，$G \times \mathbb{R}^n$ と同相である。2) G^{*c} のリー環 $L(G^{*c})$ は，G のリー環 $L(G)$ の複素化である。($L(G^{*c}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L(G)$)　([9] VI §IX 命題2，命題3)

定理　E　1)は，それ自身興味のある次の定理Fから導かれる。

定理　F　G が $GL(d, \mathbb{C})$ の代数部分群で自己共役 ($g \in G \Rightarrow {}^t\bar{g} \in G$) ならば，任意の $g \in G$ を

$$g = uh,\quad u \in U(d),\ h \in P(d) = \{d\text{次正値エルミット行列}\}$$

と極分解するとき，$u, h \in G$ である。これにより G は $(G \cap U(d)) \times (G \cap P(d))$ と同相である。

また $G \cap P(d) = \exp(L(G) \cap H(d))$ は，$L(G) \cap H(d) \approx \mathbb{R}^n$ と同相である。ここで $H(d) = \{d\text{次エルミット行列}\}$ とする。

シュヴァレーのこのように，代数群との関連において淡中双

対定理をとらえ，証明したのである。それはリー群の場合の淡中双対定理に具体的意味を与えると共に、任意のコンパクト・リー群Gに実代数群の構造を与えるものであった。またコンパクト・リー群Gに対し大域的な複素化 G^{*C} を構成したことも重要な事実であった。このようなコンパクト実形を持つ複素代数群が、定理Fの自己共役な代数群に他ならない。

後にホッホシルト・モストウ(10)は、シュヴァレーの理論を、連結成分が有限個の任意のリー群で考えた。彼等は淡中の再双対群の代りに $\mathcal{Q}(G)$ の自己同型写像ですべての左移動と可換なもの（固有自己同型）の全体の作る群を考えた。任意の固有自己同型が右移動になるということが、彼等の流儀での双対定理が成立つということに他ならない。この意味の双対定理は、Gのすべての表現が完全可約のとき(例えばGがコンパクトあるいは半単純のとき)，淡中型の双対定理と一致する（杉浦(21)）。リー群と限らない任意のコンパクト群に対する淡中双対定理もこのような固有自己同型に対する命題に言い換えて見通しのよい証明が得られることを，岩堀信子(14)が示している。

§3. 標数0の線型代数群の理論

シュヴァレーは彼の『リー群論』オⅠ巻[9]の序文で「オⅡ巻は半単純リー群の理論と分類を主な内容とする」と述べているが、実際に出版された『リー群論』オⅡ巻[18]は、それと全く内容が異なり、標数0の任意の体上における線型代数群の一般論，特にそのリー環との対応を主な内容とするものであった。そして出版社も変り、フランス語で書かれることになった。以下[18]の内容を概観しよう。

オⅠ章で必要な代数的な準備（主として線型代数的事項）をすませた後，オⅡ章では，無限体K上の有限次元線型空間V上の一次変換全体の作る多元環を$\mathcal{E}(V)=\mathcal{E}$とし，$\mathcal{E}$上の多項式函数環を$\mathcal{Q}(\mathcal{E})$とする。そしてV上の正則一次変換全体の群$GL(V)$の部分群Gで，$\mathcal{Q}(\mathcal{E})$のある部分集合Sの共通零点の集合と$GL(V)$の交わりとなるものとして，<u>線型代数群</u>を定義する。G上で0となる多項式函数Pの全体が作る$\mathcal{Q}(\mathcal{E})$のイデアル$I(G)$が，素イデアルであるとき，Gは<u>既約</u>であるという。任意の代数群Gに対し，その既約代数部分群で，Gにおける指数が有限なものG_1が唯一つ存在し，G_1はGの正規部分群となる。(定理2)　G_1がGにおけるIを含む<u>既約成分</u>である。$\mathcal{Q}(\mathcal{E})$の元をG上で考えたものを，G上の多項式函数といい、その全体を$\mathcal{Q}(G)$と記す。$\mathcal{Q}(G)=\mathcal{Q}(\mathcal{E})/I(G)$である。特にGが既約であるとき，$\mathcal{Q}(G)=\mathcal{Q}(\mathcal{E})/I(G)$は整域

であるから，商体$\mathcal{R}(G)$ができる。$\mathcal{R}(G)$の元RをG上の有理函数という。函数としては，それは既約表示の分母が0とならない点で定義される。この係数体Kに値をとる有理函数の概念を拡張して，Gから，K上の有限次元線型空間$\mathfrak{F}$への有理写像の概念が定義される。特に線型空間V上の一次変換全体の空間$\mathfrak{E}(V)$に値をとるG上の有理写像ρで，G上到る所定義され，Gから$GL(V)$への準同型写像となっているものを，Gの有理表現という。Gが既約でないときも，Gから$GL(V)$への準同型写像で，Gにおける1の既約成分G_1の有理表現となっているものを，Gの有理表現という。LをKの拡大体とするとき，線型空間VのLへの係数拡大をV^Lとする。($V^L=L\otimes_K V$である) $GL(V)$の代数部分群Gに対し，Gを含む$GL(V^L)$の最小の代数部分群をG^Lとし，GのLへの係数拡大という。Gに対する$\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$のイデアルを$I(G)$とするとき，$G^L$に対する$\mathfrak{A}(\mathfrak{E}^L)$のイデアルは$I(G)^L$であり，$G^L\cap\mathfrak{E}=G$となる（定理3）。特に$G$が既約のとき，$\mathcal{R}(G^L)=L(\mathcal{R}(G))$であり，$K$上で$L$と$\mathcal{R}(G)$は線型無関連である。$G$上の有理写像$R: G\to\mathfrak{F}$の延長となる$G^L\to\mathfrak{F}^L$の有理写像$R^L$が唯一つ存在する。特に$G$の有理表現$\rho: G\to GL(V)$の延長となる$G^L$の有理表現$\rho^L: G^L\to GL(V^L)$が唯一つ存在する。$\rho(G)$を含む$GL(V)$の最小の代数部分群を$H$とすれば，$\rho^L(G^L)$を含む

$GL(V^L)$の最小の代数部分群がH^Lである。

さてKの二つの拡大体L, L'と$s \in V^L$, $s' \in V^{L'}$に対し、次の条件(S)がみたされるとき、s'はsの<u>特殊化</u>という。

(S)　$P(s)=0$となるV上の任意の多項式函数Pに対して、必らず$P(s')=0$となる。

Kの拡大体Lに対するG^Lの任意の元sをGの<u>一般化点</u>という。特に$s \in G^L$は、すべての$t \in G$がsの特殊化となっているとき、Gの<u>生成点</u>という。代数群Gが生成点を持つための必要十分条件は、Gが既約であることである(定理4)。Gが既約のとき、$\mathcal{R}(G)$のK上の超越次数を、Gの<u>次元</u>といい$\dim_K G$と記す。$\dim_K G = \dim_L G^L$, $\dim_K (G \times G') = \dim_K G + \dim_K G'$が成立つ。Vの双対線型空間を$V^*$とするとき、$X \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(V)$に対し、$-{}^tX \in \mathcal{E}(V^*)$である。またV上の多項式函数環は対称環$S(V^*)$と同一視でき、その商体$\mathcal{R}=\mathcal{R}(V)$がV上の有理函数体である。$X \in \mathcal{E}(V)$に対し$V^*$上の一次変換$-{}^tX$の延長となる$\mathcal{R}=\mathcal{R}(V)$の導作用素(derivation) D_Xが唯一つ存在する(Ch.1. §4 命題5)。D_XをXに<u>付随</u>する導作用素という。

以下$\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$に、括弧積$[X, Y]$を

$$[X, Y] = XY - YX$$

と定義して得られるK上のリー環を$\mathfrak{gl}(V)$と記す。任意の$X \in \mathcal{E}$に対し、$\mathcal{E}$上の一次変換f_Xを

$$f_X(s) = Xs \quad , \quad s \in \mathcal{E}$$

によって定義する。

$X \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(V)$ に対し、$\mathcal{E}$上の一次変換 $f_X : s \longmapsto Xs$ に付随する $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ の導作用素を $\delta(X)$ と記す。δ は線型写像で、$\delta([X, Y]) = [\delta(X), \delta(Y)]$ をみたす。

定義　　Gを $GL(V)$ の代数部分群とし、Gを定義する $\mathfrak{O}(\mathcal{E})$ のイデアル $I(G)$ を $\mathfrak{a}$と記す。

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \delta(X)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} \}$$

は、$\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環である。$\mathfrak{g}$を代数群Gのリー環といい、$\mathfrak{g} = L(G)$ と記す。Gが典型群のとき $L(G)$ は期待されるものになる（§10 例）。G における 1 の既約成分を G_1 とすれば、$L(G_1) = L(G)$ である。また $\dim_K G = \dim_K L(G)$ である（定理5）。また代数群Gの有理表現 $\rho : G \longrightarrow GL(U)$ に対し、$\rho(G)$を含む $GL(U)$の最小の代数部分群をHとするとき、リー環の準同型写像 $d\rho : L(G) = \mathfrak{g} \longrightarrow L(H) = \mathfrak{h}$ が存在する（定理6）。$d\rho$をρの微分表現という。このとき $\mathrm{Ker}\,\rho = N$はGの正規代数部分群で、$L(\mathrm{Ker}\,d\rho) \subset \mathrm{Ker}\,d\rho$ が成立つ（§9 命題4）。特に係数体Kの標数が 0 のときは，$L(\mathrm{Ker}\,\rho) = \mathrm{Ker}\,d\rho$ が成立つ（定理12）。しかし標数 $p > 0$ の場合には この等式が成立たない例がある（§10. 例V）。また代数群Gの随伴表現$(\mathrm{Ad}\,t)Y = tYt^{-1}$,（$Y \in L(G)$）の微分表現は、リー環 $L(G)$ の随伴表現

$(\mathrm{ad}\,X)Y=[X,Y]$ である(§9 命題7).

以下係数体Kの標数は0とする。今まで通りVをK上の有限次元線型空間 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(V)$ とする。今文字Tの**K**係数形式的冪級数環を $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}$ の商体をLとして係数拡大 V^L を作り、その中でVの元の $\mathfrak{o}$ 係数一次結合として表わされる元の全体を $V^{\mathfrak{o}}$ と記す。このとき任意の $X\in\mathfrak{gl}(V)$ に対し, $\mathcal{E}^{\mathfrak{o}}$ の元

$$\exp TX=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}T^nX^n$$

を考える。このとき次のことが成立つ。

定理 7. $X\in\mathfrak{gl}(V)$ が代数群 $G\ (\subset GL(V))$ のリー環 $L(G)$ に含まれるための必要十分条件は、$\exp TX$ が G の一般化点となることである。

系 $K=\mathbb{R}$ (実数体) のとき、実代数群 G のリー環は、リー群としての G のリー環と一致する。

定理 8. G が $GL(V)$ の既約代数部分群とし, $\{X_1,\cdots,X_d\}$ をリー環 $L(G)$ の一つの基底とする。d 個の文字 $\{T_1,\cdots,T_d\}$ に関する K 係数形式的冪級数環を $\mathfrak{o}=K[[T_1,\cdots,T_d]]$ とし, その商体を L とする。このとき $\mathcal{E}^L$ の点 $s=\exp T_1X_1\cdots\exp T_dX_d$ は、G の生成点である。

系 1. G, H が共に $GL(V)$ の既約代数部分群とするとき次のことが成立つ。 1) $H\subset G\Leftrightarrow L(H)\subset L(G)$.

2) $H=G \Longleftrightarrow L(H)=L(G)$.

（注意　Kの標数が$p>0$のとき、この定理及び系は成立たないことがある.（§X 例 V））

定理　9. Gを代数群, $\rho: G \to GL(U)$を有理表現とするとき、任意の$X \in L(G)$に対し、

$$\rho(\exp TX) = \exp T((d\rho)(X))$$

が成立つ。

こうして、標数0の場合には、リー群の場合と平行した理論が線型代数群とそのリー環の間に成立つことをシュヴァレーは示したのであった。

〔18〕 第Ⅱ章後半では、レプリカの理論を代数群という枠組の中で新たに論じ直し、かつその応用として代数群とそのリー環に関するいくつかの重要な定理を証明する。$\mathfrak{gl}(U)$の部分リー環$\mathfrak{g}$は、ある代数部分群Gのリー環$L(G)$と一致するとき、代数的リー環という。

定理　11. $\mathfrak{gl}(V)$の代数的部分リー環の任意の族$(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$に対し、$\mathfrak{g}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{g}_i$は代数的である。$L(G_i)=\mathfrak{g}_i$となる代数群$G_i(\subset GL(V))$をとるとき、$\mathfrak{g}$は代数群$G=\bigcap_{i\in I}G_i$のリー環である。

定義　$\mathfrak{gl}(U)$の元Xに対し、Xをそのリー環に含むような代数群$G(\subset GL(V))$全体の共通部分を$G(X)$と記す：$G(X)$

は，$X\in L(G)$となるような代数群（$\subset GL(V)$）中最小のものである。$G(X)$のリー環$L(G(X))=\mathfrak{g}(X)$の元を，<u>Xのレプリカ</u>という。（これが〔6〕の線型代数的な定義と一致することはすぐ後で述べる。）

定理 10. $X\in\mathfrak{gl}(V)$のジョルダン分解を$X=S+N$（$S=$半単純，$N=$冪零，$[S,N]=0$）とするとき，$G(X)$は可換な既約代数群で，直積$G(S)\times G(N)$と同型である。

この定理により$G(X)$を求めることは，$X=S,N$のときに帰着する。すぐわかるように$G(N)=\{\exp aN\mid a\in K\}$である（§13命題1）。

またSがVの基底Bに関し対角要素$(a_1,\cdots,a_n)$の対角行列$\Delta(a_1,\cdots,a_n)$であるとき，$\Lambda=\{(e_1,\cdots,e_n)\in\mathbb{Z}^n\mid\sum_{i=1}^{n}e_ia_i=0\}$とおけば，$G(S)=\{\Delta(c_1,\cdots,c_n)\mid\prod_{i=1}^{n}c_i\neq 0$，すべての$(e_1,\cdots,e_n)\in\Lambda$に対し，$\prod_{i=1}^{n}c_i^{e_i}=1\}$となる（§13命題2）。$S$が対角型でない半単純一次変換のときは，$S$の固有値をすべて含む$K$のガロア拡大$L$に係数拡大して考えると$G(S)^L=G(S^L)$は上の形で定まり，$G(S)=G(S^L)\cap\mathcal{E}(V)$となる。これらのことから上の定義による$X$のレプリカが〔6〕のテンソル不変式によって定義されたものと一致することがわかる。

定理 12. Gを$GL(V)$の代数部分群，$\rho: G\to GL(U)$をその有理表現とする。Hを$GL(U)$の代数部分群，$N=\rho^{-1}(H)$とおくとき，Nは代数群で，$L(\rho^{-1}(H))=(d\rho)^{-1}(L(H))$と

なる。

系 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{E}$ の部分空間で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ となるものとする。このとき $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{q}\}$ は, $\mathfrak{gl}(V)$ の代数的部分リー環で、代数群 $G = \{A \in GL(V) \mid AYA^{-1} \equiv Y \mod \mathfrak{q}$ for all $Y \in \mathfrak{p}\}$ のリー環である。

この系から直ちに次の定理13が導かれる。

定理 13. 1) $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分リー環であるとき、$\mathfrak{g}$ を含む $\mathfrak{gl}(V)$ の代数的部分リー環の内で最小のもの $\mathfrak{g}'$ が存在する。 2) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ は、$\mathfrak{g}'$ のイデアルでもある。 3) $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$。

定理 14. $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を, $\mathfrak{gl}(V)$ の代数的部分リー環の任意の族とする。 1) このとき $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ から生成されるリー環 $\mathfrak{g}$ は, 代数的である。 2) さらに $L(G_i) = \mathfrak{g}_i \ (i \in I)$ となる既約代数群 G_i をとるとき, $\bigcup_{i \in I} G_i$ を含む最小の代数群 $(\subset GL(V))$ G は既約で、$L(G) = \mathfrak{g}$ となる。

定理 15. 1) $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分リー環とするとき、$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は代数的である。 2) $\mathfrak{g}$ が既約代数群 G のリー環であるとき、$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は G の交換子群 G' を含む $GL(V)$ の最小の代数群のリー環である。

定理 16. A を K 上の任意の有限次元の algebra (結合律をみたさなくてもよい) とすれば, A の自己同型群 $\mathrm{Aut}\ A$

は、代数群で、そのリー環は A の導作用素（derivation）全体の作るリー環 $\mathfrak{D}(A)$ と一致する。

系　$X\in\mathfrak{D}(A)$ のとき、$X=S+N$ をジョルダン分解とすれば、$S, N\in\mathfrak{D}(A)$.

定理 A　1) $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環 $\mathfrak{g}$ に対し、$\mathfrak{g}$＝代数的 $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\mathfrak{g}$ のレプリカ Y は $\mathfrak{g}$ に属す。　2) 任意の $X\in\mathfrak{gl}(V)$ のレプリカは、X の多項式 $f(X)$ となる。ただし $f(T)\in K[T]$, $f(0)=0$. 3) $X=S+N$ がジョルダン分解ならば、S, N は X のレプリカである。　4) L を K の拡大体とする。「$\mathfrak{g}$ が代数的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}^L$ が代数的」が成立つ（§14 命題2, 3, 4）。

定理 17.　$X\in\mathfrak{gl}(V)$ に対して次のことが成立つ。
X は冪零 $\Leftrightarrow$ X の任意のレプリカ X' に対し $\mathrm{Tr}(XX')=0$

定理 18.　$g\in GL(V)$ は一意的に、$g=su$, s＝半単純, u＝冪単（即ち $u-1$ は冪零), $su=us$, と表わされる（g の乗法的ジョルダン分解）. g の半単純および冪零成分は $s, s(u-1)$ である。　s, u は g の K 係数多項式として表わされる。g を含む任意の代数群 G は、s および u をも含む。

こうしてシュヴァレーは、A. 任意の無限体 K 上で線型代数群とそのリー環を定義し、B. 標数0の体上での線型代数群とそのリー環の間に、リー群とその環の間の関係に平行した関係を確立し、C. 一次変換 X のレプリカの理論を、線型代数群

論の中で展開するという彼の目標を達成した。この結果は、彼の『リー群論』才Ⅲ巻[24]で、標数0の体上でのリー環論を展開するに当って、有効に利用された。この本では代数幾何の手法を限定的にだけ用い、なるべく線型代数の範囲ですませようという傾向が見られる。一方次のような理論的な問題点を残すことになった。

I. $GL(V)$の部分群として、線型代数群を外在的に定義したため、代数群の構造とは何かという問題を残した。二つの代数群の同型とか、剰余群 G/N を代数群として直接定義するためには、やはりアフィン代数群というような内在的な概念から出発すべきだったように思われる。前節で述べたように、シュヴァレーはコンパクト・リー群に付随する代数群の場合には、この方法をとっているのであるから、なぜこのような記述を選んだのか、やや不思議に思われる。

Ⅱ 標数 $p>0$ 特に有限体を係数体とする場合の扱いが未解決問題として残った。

Ⅲ 標数0の場合も形式冪級数 $\exp TX$ の導入は、リー群の場合の類似を追ったものであるが、より代数幾何的に自然な方法はないか。

これらは、理論の発展途上において、成書にまとめられたために、後から見て指摘される点である。これらの問題点の

ため、この[18]は、線型代数群の教科書の定本とはならなかったけれども、それはその歴史的意義を否定するものではない。現代における線型代数群の理論は、やはりシュヴァレーが主要な推進者となって始められたのである。

§4　シュヴァレー群

シュヴァレーは、上述のような問題点は、当然自覚していたと思われる。

特に上の問題IIは、有限単純群との関連で重要である。複素典型群はすべて線型代数群であるが、その定義式を有限体上で考えて得られる群は、中心で割るとき有限単純群となることが古くから知られていた（ディクスン(5)）。また有限体でなく、任意の体（非可換でもよい）でもやはり単純群が得られることディュドンネ(7)が示した。ディクスンはさらにG_2型例外群の場合も同様であることを発見していた(6)。そこでシュヴァレーは、他の型の例外群で同じ事を考え、E_6, E_6, F_7の三種の例外単純リー群を、任意の体上で考えることにより単純群が得られることを確めていた。これは彼が53年に来日したときの最初の講演で報告された（服部(9)）。これは特に有限体上で考えるとき、何十年振りかでの新しい有限単純

群を発見したわけで、重要な仕事であった。しかしこのように、各単純リー群について別々に考えるやり方には、方法的に面白くない外に、E_8型に対しては既にリー群自身の構成が難しいという難点があった。そこでシュヴァレーは、滞日中に単純リー群（環）から出発して、群の型および係数体によらないで統一的に単純群を構成する問題を考えて、その解決に成功し、滞日の記念に東北数学雑誌に投稿した（最初東大紀要への掲載を希望したが予算不足で困難ということで東北にしたのである）。

これが今日シュヴァレー群の名前で呼ばれる単純群についての論文「ある種の単純群について」[25]である。ただしシュヴァレーの方法は、ディクスンのものとは異なり、いくつかの部分群を具体的に構成し、それらから生成される群を考えるのである。この群の構造を知るためにシュヴァレーはブリュア分解と呼ばれる。極大可解部分群による両側coset分解を利用した。

以下彼の方法を説明しよう。シュヴァレーは、任意の複素単純リー環$\mathfrak{g}$から出発する。$\mathfrak{g}$のカルタン部分環$\mathfrak{h}$をとり、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$のルート系を$\Phi$とする。$\Phi$の元は$ad_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$の0でない同時固有値である$\mathfrak{h}$上の1次形式である。$\alpha \in \Phi$に対する固有空間$\mathfrak{g}_\alpha$は1次元で、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

の形に$\mathfrak{g}$は直和分解（ルート分解）される。ここで$\alpha, \beta \in \Phi$に対し、

$$[H, H'] = 0, \quad H, H' \in \mathfrak{h}$$

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha, \quad H \in \mathfrak{h}, \ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} H_\alpha^* \in \mathfrak{h}, & \alpha+\beta = 0 \\ N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta \in \Phi \\ 0, & \alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\} \end{cases}$$

である。この$N_{\alpha,\beta}$をさらに正規化することをワイルが試みた。ワイル[28]は、すべての$N_{\alpha,\beta}$が実数となるようにX_αを選ぶことができることを示した。シュヴァレーは、ワイルのこの論法をさらに精密化し、現在シュヴァレー基底と呼ばれている次の性質を持つ基底の存在を示した。以下$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y)$を、$\mathfrak{g}$のキリング形式とする。$B$は$\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$上非退化だから、これにより、$\mathfrak{h}$とその双対空間$\mathfrak{h}^*$を同一視する。すなわち各$\lambda \in \mathfrak{h}^*$に対し$\lambda(H) = B(h_\lambda, H) \ (\forall H \in \mathfrak{h})$となる$h_\lambda \in \mathfrak{h}$が唯一つ存在するからこれにより$\lambda$と$h_\lambda$を同一視する。このとき$\mathfrak{h}_0 = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R} h_\alpha$は、$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = l$となる$\mathfrak{h}$の実部分空間で、$B$は$\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0$上で正値である。そこでこれによりルート間に内積$(\alpha, \beta) = B(h_\alpha, h_\beta)$を考えることができる。このとき$\alpha, \beta \in \Phi$に対し$\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$と置くと、$\langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$である。今各$\alpha \in \Phi$に

対し $H_\alpha = 2h_\alpha/(\alpha,\alpha)$ とおく。

またルート系Φに対し、その基底$\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$が存在し、各$\alpha\in\Phi$は、$\Delta$の元の同符号整係数一次結合として（$\alpha=\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$, $m_i\in\mathbb{Z}$で、すべての$m_i\geqq 0$またはすべての$m_i\leqq 0$）と表わされる。

定理 1. 任意の複素単純リー環$\mathfrak{g}$は、その構造定数がすべて整数であるような基底Bを持つ。より詳しくは、$B=\{X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\ \alpha\in\Phi\}\cup\{H_i\in\mathfrak{h}\,|\,1\leqq i\leqq l\}$で次の(1)—(4)をみたすものが存在する。

(1) $[H_i, H_j]=0$　　(2) $[H_i, X_\alpha]=\langle\alpha,\alpha_i\rangle H_\alpha$

(3) $[X_\alpha, X_{-\alpha}]=H_\alpha$（$H_i$ $(1\leqq i\leqq l)$の整係数一次結合）

(4) $\alpha,\beta\in\Phi$が一次独立で$\beta+k\alpha\in\Phi$ $(-r\leqq k\leqq q,\ r,q\in\mathbb{N})$で$\beta-(r+1)\alpha,\ \beta+(q+1)\alpha\notin\Phi$のとき、

$$[X_\alpha, X_\beta]=\begin{cases}\pm(r+1)X_{\alpha+\beta}, & q\geqq 1\\ 0 & q=0\end{cases}.$$

このようなシュヴァレー基底の整係数一次結合の全体を$\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$とする。$\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$は環$\mathbb{Z}$上のリー環である。今任意の可換体Kをとり、K上のリー環$\mathfrak{g}_K$を

$$\mathfrak{g}_K = K\otimes_\mathbb{Z}\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$$

により定義する。体Kは$\mathbb{Z}$加群であるから、$\mathbb{Z}$加群としてのテンソル積を考え、$a\in K$に対し、$a(b\otimes X)=ab\otimes X$によ

りK上のベクトル空間と考えるのである。従ってKの標数が$p>0$の時は、係数の整数は$\bmod p$で考えることになる。

各$\alpha\in\Phi$に対し、$\mathrm{ad}X_\alpha$は冪零一次変換だから、$t\in\mathbb{C}$に対し

$$x_\alpha(t)=\exp(t\,\mathrm{ad}\,X_\alpha)$$

の行列成分は、tの多項式であり、シュヴァレー基底の性質から、それは整係数多項式である。従ってここでtに任意の体Kの元を代入することができ、Kの加法群から自己同型群$Aut(\mathfrak{g}_K)$への準同型写像x_αが得られる。

次に$P_r=\sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{Z}\alpha$とおく。加法群$P_r$から、体$K$の乗法群$K^\times$への準同型写像（$P_r$の$K$指標）$\chi$に対して、$Aut(\mathfrak{g}_K)$の元$h(\chi)$を、次式で定義する：

$$h(\chi)H_\alpha=H_\alpha,\quad h(\chi)X_\alpha=\chi(\alpha)X_\alpha,\quad \alpha\in\Phi$$

$h(\chi)$は、シュヴァレー基底に関し対角行列で表わされる。写像

$$h:Hom(P_r,K^\times)\to Aut(\mathfrak{g}_K):\chi\longmapsto h(\chi)$$

は、準同型写像である。

$$h(Hom(P_r,K^\times))=\mathfrak{h}$$

と置く。

定義 $\{x_\alpha(t)\mid t\in K,\alpha\in\Phi\}\cup\{h(\chi)\mid\chi\in Hom(P_r,K^\times)\}$から生成される$Aut(\mathfrak{g}_K)$の部分群$G$を、$(\mathfrak{g},K)$に対する<u>シュヴァレー群</u>という。

これはシュヴァレー基底のとり方によらないことが示される。

さて群Gの性質を調べるために、シュヴァレーはいわゆるブリュア分解を用いた。これはブリュア(2)が、半単純リー群のユニタリ表現論で複素典型群について導入したものであり、そのすぐ後にハリッシュ・チャンドラ(8)が一般の実および複素半単純群について、同様のことが成立つことを証明した。連結複素半単純リー群Gについて言えば、Gの任意の一つの連結極大可解部分群Bをとるとき、$G=\bigcup_{w\in W} BwB$(直和)と、Bに関する有限個の両側剰余類の直和にGが分解され、各両側剰余類は、ワイル群Wの元と一対一に対応するというのが、Gのブリュア分解である。

シュヴァレーのこの論文は、当時発見されたばかりの、この分解に触発されて成ったものとも言える。彼はこの分解が、シュヴァレー群に対しても成立つことを発見し、それをGの構造を定める中心的手段として活用したのであった。

さて実ユークリッド空間$\mathfrak{h}_0$上で、ルート$\alpha\in\Phi$を法線ベクトルとする超平面に関する鏡映をw_αとし、$\{w_\alpha|\alpha\in\Phi\}$から生成される$GL(\mathfrak{h}_0)$の部分群Wを、$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$の(あるいは$\Phi$の)ワイル群という。$w_\alpha$を$Aut(\mathfrak{g})$の元$\omega_\alpha$として実現するために、シュヴァレーは$SL(2,K)$のGへの埋め込みを利用している。これはまた $\omega_\alpha(t)=x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-\frac{1}{t})x_\alpha(t)$, $\omega_\alpha=\omega_\alpha(1)$

とすると、

$$\omega_\alpha(X_\beta) = \zeta_{\alpha,\beta} X_{w_\alpha(\beta)}, \quad \zeta_{\alpha,\beta} = \pm 1$$

となるので、この $\omega_\alpha \in Aut(\mathfrak{g}_K)$ を用いてもよい（岩堀(13)）。

$\mathfrak{h}$と$\{\omega_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ から生成されるGの部分群を$\mathfrak{W}$とする。このとき任意の $w \in \mathfrak{W}$ に対して

$$w x_\alpha w^{-1} = x_{w(\alpha)}, \quad w h(\chi) w^{-1} = h(\chi'), \ \chi'(\alpha) = \chi(w^{-1}(\alpha))$$

となり、$\mathfrak{W}/\mathfrak{h} \cong W$ である。

加法群 P_r の基底Δに関する字引式順序を考え、P_rを順序群とする。$\Phi_+ = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha > 0\}$, $\Phi_- = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha < 0\}$ とおく。今 $\{x_\alpha(t) \mid t \in K, \alpha \in \Phi_+\}$ から生成されるGの部分群を$\mathfrak{U}$と置く。$\mathfrak{U}$の元はすべて冪単元である。このとき

$$G = \mathfrak{U}\mathfrak{W}\mathfrak{U}$$

が成立つ。これをより精密にすることを考える。今$w \in W$に対して $\Phi_w' = \{\alpha \in \Phi \mid w\alpha > 0\}$, $\Phi_w'' = \{\alpha \in \Phi \mid w\alpha < 0\}$

とおく。 $\alpha, \beta \in \Phi_w'$, $\alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi_w'$

が成立ち、Φ_w'' についても同じである。そこでAから生成される群を$\langle A \rangle$と記すとき、

$\mathfrak{U}_w' = \langle x_\alpha(t) \mid t \in K, \alpha \in \Phi_w' \rangle$, $\mathfrak{U}_w'' = \langle x_\alpha(t) \mid t \in K, \alpha \in \Phi_w'' \rangle$

とおけば、これらは$\mathfrak{U}$の部分群である。また$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{h}$ は、Gの部分群で、$\mathfrak{U}$は$\mathfrak{B}$の正規部分群である。このとき次の定理が成立つ。

定理 2. シュヴァレー群Gは次の両側分解を持つ。

$$G = \bigcup_{w \in W} \mathfrak{B}\, \omega(w)\, \mathfrak{U}_w'' \quad (\text{集合の直和}).$$

ここで $\omega(w)$ は、剰余数 $w \in W = \mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ の一つの代表元である。

これがシュヴァレー群 G のブリュア分解である。係数体 K が $\mathbb{C}$ のときは、ハリッシュ・チャンドラの定理の特別な場合であり、シュヴァレーはその別証を与えたわけである。

$|\Phi_w''| = N(w)$ とおくと、$\mathfrak{U}_w''$ は $\mathbb{C}^{N(w)} \approx \mathbb{R}^{2N(w)}$ と同相であるから、ブリュア分解はこの場合旗多様体 $\mathfrak{B}\backslash G$ の胞体分割を与え、それから $\mathfrak{B}\backslash G$ のベッチ数とポアンカレ多項式 $P(T) = \sum_{w \in W} T^{2N(w)}$ とが与えられる。

そこで、G 自身のポアンカレ多項式 $P_G(T)$ は、コンパクト実形に移ってハーシュの公式(「シュヴァレーの群論 I, p. 206 参照)を用いれば

$$P_G(T) = (T-1)^{\ell} \sum_{w \in W} T^{2N(w)}$$

によって与えられる。

一方係数体 K が、q 個の元から成る有限体 $\mathbb{F}_q$ であるときは、$\mathfrak{H}, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}_w''$ はそれぞれ $(q-1)^{\ell}$, q^N, $q^{N(w)}$ 個の元から成る。ただし $N = |\Phi_+|$ である。従ってこの場合の有限群 G の位数 $|G|$ は

$$|G| = (q-1)^{\ell} q^N \sum_{w \in W} q^{N(w)}$$

である。$N(w)$ と W の冪指数 m_i の関係から、これらの式を m_i で表わすことができる。

このように、$K = \mathbb{C}$ のときの G のベッチ数、$K =$ 有限体

の場合のGの位数が、共に定理2から導かれることは、極めて興味ある事実である。

最後にシュヴァレーは，Gの交換子群G'が少数の例外の場合を除き，単純であることを証明する。結果は次の通りである。

定理 3. シュヴァレー群Gの交換子群をG'とする。次の(a),(b)の場合を除き，Gの部分群Hで，$H \neq \{e\}$ かつすべての $z \in G'$ に対し $zHz^{-1} = H$ となるものはG'を含む。

(a) $K = \mathbb{F}_2$, $\mathfrak{g} = A_1, B_2, G_2$. b) $K = \mathbb{F}_3$, $\mathfrak{g} = A_1$.

定理 3.系. 定理3の (a) (b) 以外の場合には、シュヴァレー群Gの交換子群G'は、単純である。

こうしてシュヴァレーは，リー群，リー環についての結果を活用して，各複素単純リー環$\mathfrak{g}$に対し，任意の可換体Kをパラメタとする単純群の無限系列を統一的に作りだすことに成功したのである。これらはブリュア分解という共通の構造上の特徴を持つものとして，単純群の世界の最も大きな族を作る。また彼はこれによって、例外リー環，F_4, E_6, E_7, E_8 に対応する単純群が各可換体K上に存在することをも示した。これは例えば有限単純群の表に、新しいメンバーを追加するものであった。

このようにシュヴァレーの論文 [25] は，それ自身群論に

重要な寄与をしたのであるが、またこの論文は、他の多くの研究の出発点ともなった。

例えばシュタインバーグ(19)は、ディンキン図形の位数2の自己同型に対応するシュヴァレー群Gの自己同型の固定群に対しては、シュヴァレー群と平行した理論が成立ち、シュタインバーグ群と呼ばれる単純群が得られることを発見した。またティッツ(24)は、ブリュア分解を持つ群の公理論を作った。

またシュヴァレーの理論の改良もいろいろ行われている。例えば、単純性の証明は阿部(1)が簡単化した。シュヴァレー群についての詳しい解説としては、岩堀(13)とシュタインバーグ(20)の講義録がある。

シンポジウムでは、この後任意の代数的閉体上の単純代数群の分類を行った[27]についても述べたが、その説明は不十分であった。別の機会に改めて「シュヴァレーの群論III」として報告することとしたい。

The Publications of C.Chevalley on the group theory

[1] Groupes topologiques, groupes fuchsiens, groupes libres, C.R.Acad. Sci. Paris 192(1931), 724-726. (with J. Herbrand)

[2] Génération d'un groupe topologique par transformations infinitésimales, C.R. Acad. Sci. Paris 196(1933), 744-746.

[3] Two theorems on solvable topological groups, Lectures on topology (University of Michigan), Univ. of Michigan Press, An Arbor, 1941, pp. 291-292.

[4] On the topological structure of solvable groups, Ann. of Math. 42(1941), 666-675.

[5] An algebraic proof of a property of Lie groups, Amer.J.Math. 63(1941), 785-793.

[6] A new kind of relationship between matrices, Amer. J. Math. 65(1943), 321-351.

[7] On groups of automorphisms of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 30(1944), 274-275.

[8] On algebraic Lie algebras, Proc. Nat.Acad. Sci.U.S.A. 31(1945),195-196. (with H.Tuan)

[9] "Theory of Lie groups I", Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[10] Algebraic Lie algebras, Ann. of Math. 48(1947), 91-100.

[11] Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans.AMS. 63(1948), 85-124. (with S. Eilenberg)

[12] Sur la classification des algèbres de Lie et de leurs représentations, C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948),1136-1138.

[13] Sur les représentations des algèbress de Lie simples,C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948), 1197.

[14] The exceptional Lie algebras F_4 and E_6, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 36(1950), 137-141. (with D.Schafer)

[15] The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, Proc.ICM 1950, Cambridge Mass. vol. 2, pp.21-24.

[16] Two proofs of a theorem on algebraic groups, Proc.AMS 2(1951),126-134. (with E.Kolchin)

[17] On a theorem of Gleason, Proc.AMS 3(1951), 122-125.

[18] "Théorie des groupes de Lie II", Hermann, Paris, 1951.

[19] Sur le groupe E_6, C.R.Acad.Sci. Paris 232(1951), 1991-1993.

[20] Sur une variété algébrique liée à l'étude du groupe E_6, C.R.Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2168-2170.

[21] On algebraic group varaieties, J.Math. Soc. Japan 6(1954), 36-44.

[22] "The algebraic theory of spinors", Columbia Univ. Press, New York, 1954.

[23] Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J. Math. 77(1955), 778-782.

[24] "Théorie des groupes de Lie III", Hermann, Paris, 1955.

[25] Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. 7(1955), 14-66.

[26] The Betti numbers of the exceptional groups, Memoirs AMS 14(1955), 1-9. (with A.Borel)

[27]"Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques", École Norm. Sup. Paris, 1956-1958. (with P.Cartier, M.Lazard, and A.Grothendieck)

[28] La théorie des groupes algébriques, Proc. ICM 1958, Edinburgh, Canbridge Univ. Press, 1960, pp.53-68.

[29] Une démonstration d'un théorème sur groupes algébriques, J. Math. pure et appl. 39(1960), 307-317.

[30] Certains schémas de groupes semi-simples, Sém.Bourbaki 1960/61,no.219, Benjamin, New York, 1966.

References

(1) 阿部英一, Groupes simples de Chevalley,Tôhoku Math.J.13(1961), 253-267.
(2) F.Bruhat, Représentations induites des groupes de Lie semisimples connexes,C.R.Paris 238 (1954), 437-439.
(3) E.Cartan, Les Groupes réels simples finis et continus, Ann.Éc.Norm.31(1914), 263-355.
(4) E.Cartan, Sur la détemination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend.Circ.Mat.Palermo, 53(1929),217-252.
(5) L.E.Dickson, "Linear Groups with an Exposision of the Galois Field Theory", Teubner, Leipzig, 1901.
(6) L.E.Dickson, A New system of simple groups, Math.Ann.60(1905),137-150.
(7) J.Dieudonné, Sur les groupes classiques, Hermann,Paris, 1948.
(8) Harish-Chandra, On a lemma of F.Bruhat, J.Math.Pures Appl.35(1956), 203-210.
(9) 服部昭, C.Chevalley 教授の東大における講演,「新しい単純群について」, 数学6 (1954),42-45.
(10) G.Hochschild and G.D.Mostow, Representations and representative functions of Lie groups, Ann.of Math. 66 (1957). 495-542.
(11) J.E.Humphreys,"Linear Algebraic Groups", Springer,1981.
(12) 岩堀長慶, On some matrix operators, J.Math.Soc.Japan 6(1954), 76-104.
(13) 岩堀長慶, リー環論とChevalley 群, 東大数学教室セミナリーノート・12・13, 1965.
(14) 岩堀信子, 淡中双対定理の別証明, 数学10(1958), 34-36.
(15) 松島与三, On algebraic Lie Groups and algebras, J.Math.Soc.Japan 1(1948),47-57.
(16) 小野孝, Sur les groupes de Chevalley, J.Math.Soc.Japan 10(1958), 307-313.
(17) F.Peter und H.Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontnuierlichen Gruppen, Math.Ann.97(1927),737-755.
(18) L.S.Pontryagin,The theory of topological commutative groups, Ann.of Math.,35 (1934) , 361-388.
(19) R.Steinberg, Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. Math. 9(1959),875-890.
(20) R.Steinberg, Lectures on Chevalley Groups, Mimeographed Lecture Notes,Yale Univ, 1968.
(21) 杉浦光夫, Some remarks on duality theorems of Lie groups, Proc.Jap.Acad.43(1967), 927-931.
(22) 杉浦光夫, The Tannaka duality theorem for semisimple Lie groups, pp.405-428 in "Manifolds and Lie groups, Papers in Honour of Yozô Matsushima",Birkhäuser,1981.
(23) T.Tannaka, Dualität der nicht-kommutativen Gruppen, Tôhoku Math.J. 53(1938), 1-12.
(24) J.Tits, Algebraic and abstract simple groups, Ann. of Math. 80(1964), 313-329.
(25) J.Tits, Classification of algebraic simple groups, "Algebraic Groups and Discontinuous groups, Proc.Symp.Pure Math.10, AMS,1966", pp.33-62.
(26) J.Tits, Sur les constants de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semisimple, Publ. I.H.E.S. 31(1966), 21-58.
(27) A.Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications", Hermann,1940.
(28) H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen, I, II,III, Math. Zeit. 23(1925), 271-309,24(1926), 328-395.